

I-11 吊橋の動的応答性状におけるせん断変形と回転慣性の影響に関する研究

北海道大学工学部	正員	林 川 俊 郎
北海道大学工学部	正員	渡 辺 昇
北海道大学工学部	正員	佐 藤 浩 一

1. まえがき

吊橋はケーブル、塔、補剛桁および吊材などよりなる複合構造物であり、長径間構造物として最も適した橋梁形式である。しかし、吊橋は他の橋梁形式にくらべて比較的剛性が低いため、常に振動しやすいという大きな欠点がある。そこで、風荷重、地震荷重および走行荷重などの動的外力に対する安全性の検討は、吊橋の設計上重要な問題となっている。

これらの動力学的な諸問題を解析するための基本条件として、まず第一に知らなければならないのは吊橋の固有振動性状である。吊橋の固有振動解析は静的問題の場合と同様に、簡便性のある吊橋特有の線形化撓度理論に基づいた計算方法が用いられ、吊橋の動的設計に広く使用されている。Bleich¹⁾は境界条件を満足する近似波形および座屈波形を用いたエネルギー法を示している。Moppert²⁾は境界条件を満足している影響線関数と積分方程式法を用いて吊橋の固有振動数を計算している。また、前田らは線形化撓度理論に基づく基礎微分方程式の厳密解を用いて、単純支持および連続支持された吊橋の固有振動解析を示した³⁾。これは、いわゆる微分方程式法の範ちゅうに属する解法である。この微分方程式法は最も正統的な解析手法であり、連続体の振動を扱うのに適している。筆者らもこの解析手法に従い、吊橋の固有振動解析方法を確立し、その固有振動性状について報告してきた^{4,5)}。

Abdel-Ghaffar⁶⁾は吊橋の鉛直たわみ振動に関して、有限要素法による定式化を行い、剛性マトリックスおよび質量マトリックスを誘導している。さらに、中央径間長458mの実在吊橋(Vincent-Thomas橋)の振動実験を行い、理論値との比較を行っている⁷⁾。その中で、低次振動においては固有振動数の理論値と実測値とは比較的良好に一致しているが、高次振動になるにつれて理論値は実測値よりも大きくなる傾向を示している。最近、小松・西村⁸⁾の論文では、この両者に差を生じた原因は、補剛桁のせん断変形の影響であることを明らかにした。さらに、吊橋の耐震設計において重要となる / Hz 以上の高次振動の領域では、このせん断変形の影響は重要であることを示摘している。しかし、後者の論文でも吊橋の回転慣性の影響、補剛桁が連続支持されている場合(連続形式)については言及されていない。

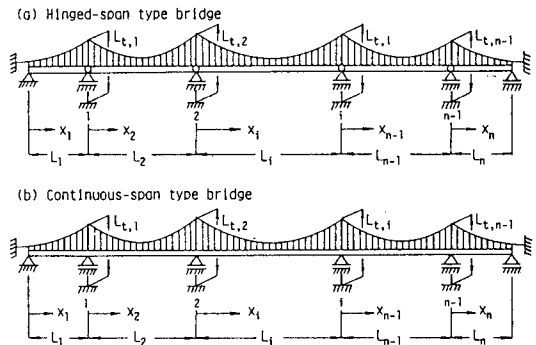
本研究の目的は補剛桁のせん断変形と回転慣性を考慮した吊橋の鉛直たわみ固有振動解析を示すことである。さらに、走行荷重による吊橋の動的応答性状における両者の影響について明らかにすることである。ここでは、Timoshenko 桁理論により吊橋のひずみエネルギーと運動エネルギーを求め、Hamilton 原理により吊橋の支配方程式とそれともなう境界条件式を誘導する。最後に、数値計算例により補剛桁の支持条件(図一/参照)による差異について詳細な検討が示される。

2. 固有振動解析

せん断変形と回転慣性の影響を考慮した吊橋の鉛直たわみ自由振動に関する基礎微分方程式は

$$E_i I_i \frac{\partial^4 \eta_i}{\partial x_i^4} - \frac{w_i}{g} \left(\frac{I_i}{A_i} + \frac{E_i I_i}{k_i A_i G_i} \right) \frac{\partial^4 \eta_i}{\partial x_i^2 \partial t^2} + \frac{w_i^2 I_i}{g^2 k_i A_i G_i} \frac{\partial^4 \eta_i}{\partial t^4} - H_w \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x_i^2} + \frac{w_i}{H_w} H_{p,i} + \frac{w_i}{g} \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} = 0 \quad (/)$$

となる。この上式の誘導過程および記号等の詳細についてはすでに発表済みであるので⁹⁾、ここでは省略する。ここで、回転慣性の影響は式(/)の左辺第2項の前者で、せん断変形の影響は式(/)の左辺第



図一 / 多径間吊橋の形式と座標

2項の後者と第3項で表わされる。もし式(1)の左辺の第2、第3の項を無視すると、従来の曲げ変形のみを考慮した撓度理論による基礎微分方程式に全く一致する。式(1)の微分方程式の一般解は固有値の取り得る範囲によって、3通り存在する。そのときの特性方程式とパラメーター b_i 、 c_i 、 r_i 、 s_i はそれぞれ式(2)、(3)に示されている。また、固有関数 $V_i(x_i)$ と $\theta_i(x_i)$ は表-1に示されている。

$$\lambda_i^4 + \{b_i^2(r_i^2 + s_i^2) - c_i^2\}\lambda_i^2 - b_i^2(1 - b_i^2 r_i^2 s_i^2) = 0 \quad (2)$$

$$b_i^2 = \frac{\omega_i^4 L_i^4 \omega^2}{g E_i I_i}, \quad c_i^2 = \frac{H \omega_i^2 L_i^2}{E_i I_i}, \quad r_i^2 = \frac{I_i}{A_i L_i^2}, \quad s_i^2 = \frac{E_i I_i}{k_i A_i G_i L_i^2} \quad (3)$$

。この中で、未知量は積分定数 A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i 、慣性力によって生じる水平付加張力 $H_{p,i}$ 、および吊橋の固有円振動数 ω である。積分定数は吊橋の補剛桁の支持条件（境界条件）によって、水平付加張力はケーブルの方程式⁵⁾によって定式化される。最終的に、吊橋の振動数方程式は

Conditions	Eigenfunctions $V_i(x_i)$ and $\theta_i(x_i)$	Values of μ_i and ν_i	Values of $R_{\mu i}$ and $R_{\nu i}$
$b_i^2(r_i^2 + s_i^2) < c_i^2$	$V_i(x_i) = A_i \cos \frac{\mu_i x_i}{L_i} + B_i \sin \frac{\mu_i x_i}{L_i} + C_i \cosh \frac{\nu_i x_i}{L_i} + D_i \sinh \frac{\nu_i x_i}{L_i} + \frac{g}{H \omega_i} H_{p,i}$ $\theta_i(x_i) = R_{\mu i} \sin \frac{\mu_i x_i}{L_i} - B_i \cos \frac{\mu_i x_i}{L_i} + R_{\nu i} (C_i \sinh \frac{\nu_i x_i}{L_i} + D_i \cosh \frac{\nu_i x_i}{L_i})$	$\mu_i = \sqrt{W_i(L_i - 1)}$ $\nu_i = \sqrt{W_i(L_i + 1)}$	$R_{\mu i} = \frac{b_i^2 r_i^2 - \mu_i^2 (1 + c_i^2 r_i^2)}{\nu_i^2 L_i}$ $R_{\nu i} = \frac{b_i^2 s_i^2 - \nu_i^2 (1 + c_i^2 s_i^2)}{\mu_i^2 L_i}$
$b_i^2(r_i^2 + s_i^2) > c_i^2$ and $b_i^2 r_i^2 s_i^2 > 1$	$V_i(x_i) = A_i \cos \frac{\mu_i x_i}{L_i} + B_i \sin \frac{\mu_i x_i}{L_i} + C_i \cosh \frac{\nu_i x_i}{L_i} + D_i \sinh \frac{\nu_i x_i}{L_i} + \frac{g}{H \omega_i} H_{p,i}$ $\theta_i(x_i) = R_{\mu i} \sin \frac{\mu_i x_i}{L_i} - B_i \cos \frac{\mu_i x_i}{L_i} + R_{\nu i} (C_i \sinh \frac{\nu_i x_i}{L_i} + D_i \cosh \frac{\nu_i x_i}{L_i})$	$\mu_i = \sqrt{W_i(L_i - 1)}$ $\nu_i = \sqrt{W_i(L_i + 1)}$	$R_{\mu i} = \frac{b_i^2 r_i^2 - \mu_i^2 (1 + c_i^2 r_i^2)}{\nu_i^2 L_i}$ $R_{\nu i} = \frac{b_i^2 s_i^2 - \nu_i^2 (1 + c_i^2 s_i^2)}{\mu_i^2 L_i}$
$b_i^2(r_i^2 + s_i^2) > c_i^2$ and $b_i^2 r_i^2 s_i^2 < 1$	$V_i(x_i) = A_i \cos \frac{\mu_i x_i}{L_i} + B_i \sin \frac{\mu_i x_i}{L_i} + C_i \cos \frac{\nu_i x_i}{L_i} + D_i \sin \frac{\nu_i x_i}{L_i} + \frac{g}{H \omega_i} H_{p,i}$ $\theta_i(x_i) = R_{\mu i} \sin \frac{\mu_i x_i}{L_i} - B_i \cos \frac{\mu_i x_i}{L_i} + R_{\nu i} (C_i \sin \frac{\nu_i x_i}{L_i} - D_i \cos \frac{\nu_i x_i}{L_i})$	$\mu_i = \sqrt{W_i(L_i - 1)}$ $\nu_i = \sqrt{W_i(1 - L_i)}$	$R_{\mu i} = \frac{b_i^2 r_i^2 - \mu_i^2 (1 + c_i^2 r_i^2)}{\nu_i^2 L_i}$ $R_{\nu i} = \frac{b_i^2 s_i^2 - \nu_i^2 (1 + c_i^2 s_i^2)}{\mu_i^2 L_i}$
$b_i^2(r_i^2 + s_i^2) < c_i^2$ and $b_i^2 r_i^2 s_i^2 < 1$	$V_i(x_i) = A_i \cos \frac{\mu_i x_i}{L_i} + B_i \sin \frac{\mu_i x_i}{L_i} + C_i \cos \frac{\nu_i x_i}{L_i} + D_i \sin \frac{\nu_i x_i}{L_i} + \frac{g}{H \omega_i} H_{p,i}$ $\theta_i(x_i) = R_{\mu i} \sin \frac{\mu_i x_i}{L_i} - B_i \cos \frac{\mu_i x_i}{L_i} + R_{\nu i} (C_i \sin \frac{\nu_i x_i}{L_i} - D_i \cos \frac{\nu_i x_i}{L_i})$	$\mu_i = \sqrt{W_i(L_i - 1)}$ $\nu_i = \sqrt{W_i(1 + L_i)}$	$R_{\mu i} = \frac{b_i^2 r_i^2 - \mu_i^2 (1 + c_i^2 r_i^2)}{\nu_i^2 L_i}$ $R_{\nu i} = \frac{b_i^2 s_i^2 - \nu_i^2 (1 + c_i^2 s_i^2)}{\mu_i^2 L_i}$

Note: A_i , B_i , C_i , and D_i = integration constants, $W_i = [c_i^2 - b_i^2(r_i^2 + s_i^2)]/2$, and

$$\det |A - H E^{-1} G| = 0 \quad (4) \quad z_i = \sqrt{1 + (4b_i^2(1 - b_i^2 r_i^2 s_i^2)) / (c_i^2 - b_i^2(r_i^2 + s_i^2))} \quad \text{and } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

となり、固有円振動数 ω に関する超越方程式となる。つまり、せん断変形と回転慣性を考慮した吊橋の自由振動は式(4)で示す固有値問題に帰着され、これまで一般的に用いられてきた慣用的な方法^{3,4,5)}に比較して、何ら固有振動解析における計算効率を劣化させることはない。

表-1 固有関数 $V_i(x_i)$ と $\theta_i(x_i)$

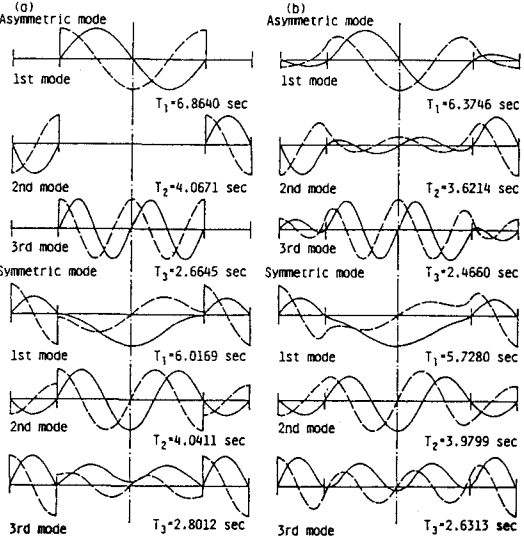
Mode types of vertical vibration	Mode order	Hinged-span type			Continuous-span type		
		Roller connection (N=0)	Hinged connection (N=0)	Hinged connection (N≠0)	Roller connection (N=0)	Hinged connection (N=0)	Hinged connection (N≠0)
Asymmetric mode	1st	6.8640	6.8640	6.8640	6.3763	6.3746	6.3755
	2nd	4.0821	4.0671	4.0754	3.6319	3.6214	3.6267
	3rd	2.6645	2.6645	2.6645	2.4661	2.4660	2.4660
	4th	1.4206	1.4206	1.4206	1.4333	1.4333	1.4333
	5th	0.8981	0.8981	0.8981	1.2757	1.2757	1.2757
Symmetric mode	1st	6.0397	6.0169	6.0295	5.7487	5.7280	5.7395
	2nd	4.0431	4.0411	4.0422	3.9814	3.9799	3.9807
	3rd	2.8013	2.8012	2.8013	2.6314	2.6313	2.6314
	4th	1.8830	1.8830	1.8830	1.7909	1.7909	1.7909
	5th	1.1103	1.1103	1.1103	1.3451	1.3451	1.3451

3. 動的応答解析

走行荷重による吊橋の強制振動を解く一般的な手法として、いわゆるModal Analysisがある。荷重の大きさは一定で、かつ一定速度を有する平滑走行集中荷重とする。また、橋梁減衰は小さいものとし無視する。

表-2 鉛直たわみ振動の固有周期 ($r=0.01$, $\pi=0.2$)

吊橋の動的たわみを固有関数を用いて級数展開表示し、橋梁構造物の運動方程式をLaplace変換により解くと、その解は閉じた形で得ることができる。したがって、任意径間の任意着目点における動的たわみ値が得られる。その詳細は参考文献⁵⁾を参照されたい。



4. 数値計算例

数値計算例として、主径間長770mの3径間2ヒンジ形式の因島大橋の断面諸元⁹⁾を参考にする。式(3)の無次元パラメーターの中で、せん断変形と回転慣性の影響を最もよく表わすのは $r = \sqrt{I/AL^2}$, $\pi = kG/E$ と考えることができる。以下、固有振動および動的応答における r と π の影響について考察する。

図-2 固有周期と固有振動モード

4-1. 固有周期

表-2はパラメーター $r=0.01, \pi=0.2$ の場合の計算された固有周期を示す。塔の変形を無視したローラー結合と塔の変形を考慮したヒンジ結合の差異についてみると、低次の固有周期において若干の差はあるものの、高次の固有周期においてはほとんど差はない。一方、補剛桁の支持条件による差異についてみると、著しい差が認められる。一般的に、2ヒンジ形式の吊橋の固有周期の値は連続形式のものより大きいことがわかる。

4-2. 固有振動モード

図-2は表-2の固有周期に対応した固有振動モードを示す。図中の実線は鉛直たわみモードを、点線は曲げによるたわみ角モードをそれぞれ表わしている。また、(a)は単純支持された吊橋（2ヒンジ形式）を、(b)は連続支持された吊橋（連続形式）を意味する。図-2(a)の逆対称モードのように、2ヒンジ形式の吊橋は各径間において独立して振動する。さらに、補剛桁の中間支持点部において、たわみ角の不連続性を示すのが2ヒンジ形式の特徴である。この結果が表-2に示した固有周期の差異の主たる原因であると考えられる。

4-3. パラメーター r と π の影響

図-3、4、5は固有円振動数比 ω^*/ω とパラメーター r との関係を示す。ここで、 ω^* はTimoshenko桁理論より求められた固有円振動数を意味する。 ω は従来の曲げのみを考慮した撓度理論より求められた固有円振動数である。一般的に、せん断変形と回転慣性の影響は r が増加すると、また、 π が減少すると大きいことがわかる。さらに、高次振動になるにつれて、せん断変形と回転慣性の影響は顕著となる傾向がある。

4-4. たわみの時刻歴応答曲線

図-6は走行荷重によるたわみの時刻歴応答曲線を示す。実線は動的応答値を、点線は静的応答値を表わす。2ヒンジ形式の吊橋は中間支持点部に、たわみ角の不連続性、つまり折れ角を生じている。

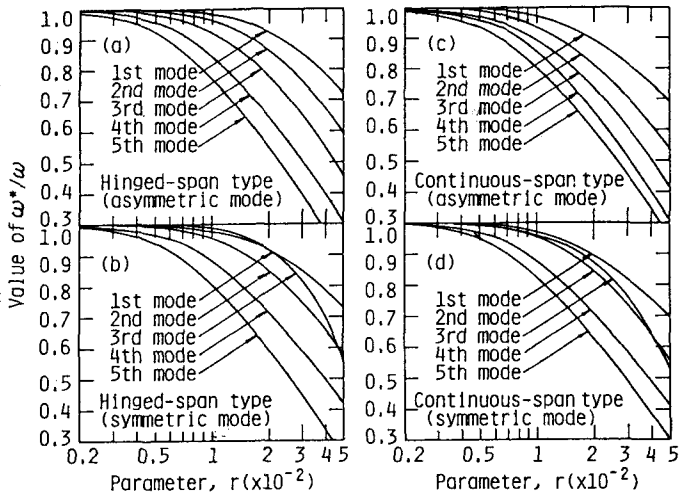


図-3 固有円振動数比と r との関係 ($\pi=0.1$)

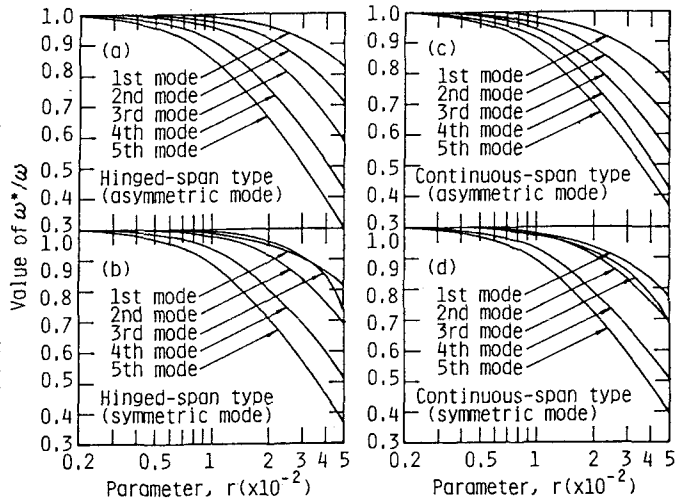


図-4 固有円振動数比と r との関係 ($\pi=0.2$)

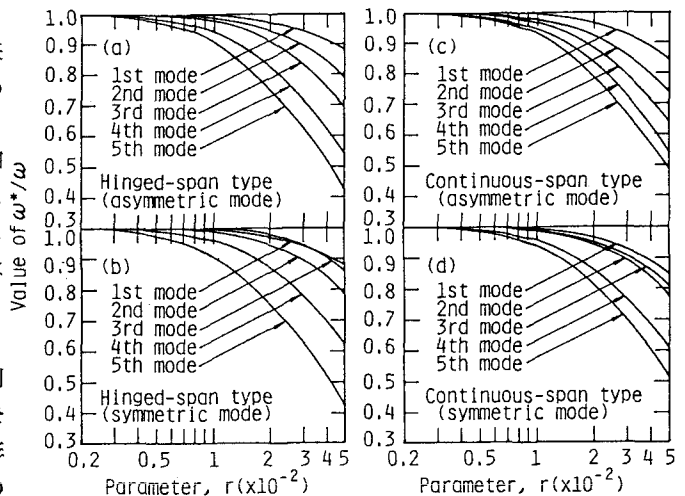


図-5 固有円振動数比と r との関係 ($\pi=0.4$)

4-5. 動的増加率

図-7から図-10は動的増加率 δ と速度パラメーター α との関係を示している。図中の実線は従来の撓度理論による解析結果である。動的増加率はいくつかの極大値をもち、速度パラメーターの増加にともない増加する傾向にある。全体的に、パラメーター r が増加すると動的増加率は大きくなる。さらに、その増加の割合から連続支持された吊橋は単純支持された吊橋とくらべて、せん断変形と回転慣性の影響を比較的大きく受けることがわかる。

5. あとがき

筆者らの知る限りにおいて、実在橋におけるパラメーターの範囲は $r=0.005\sim0.03$ 、 $\pi=0.1\sim0.3$ と考えられる。したがって、せん断変形と回転慣性の影響は決して無視できない因子であると結論づけられる。なお、本研究は文部省科学研究費奨励研究Aの補助を受けたことを付記する。また、数値計算には北大大型計算機を使用した。

1) Bleich, F. et al.

Bureau of Public Roads, 1950.

2) Moppert, H.,

Stahlbau-Verlags-GmbH, Köln, 1955.

3) 前田・林・前田, 土木学会論文報告集, 262号, 1977.

4) 林川・渡辺, 北海道支部論文報告集, 37号, 1981.

5) Hayashikawa, T.

et al., Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Univ., Vol. 16, 1982.

6) Abdel-Ghaffar, Proc., of ASCE, Vol. 106, ST6, 1980.

7) Abdel-Ghaffar, et al., EERL 77-01, 1977.

8) 小松・西村, 土木学会論文報告集, 323号, 1982.

9) 林川, 北海道支部論文報告集, 38号, 1982.

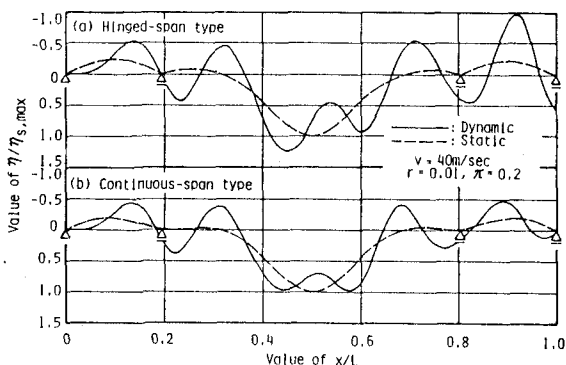


図-6 たわみの時刻歴応答曲線 ($x_2=L_2/2$)

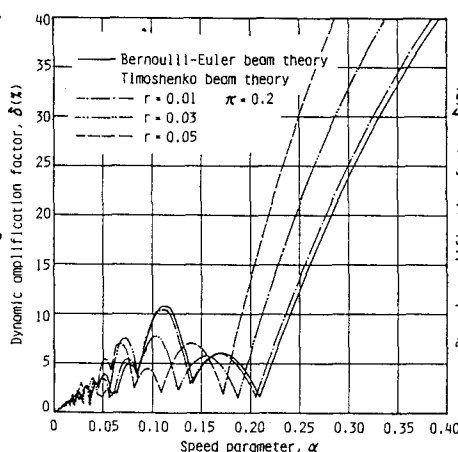


図-7 $\delta-\alpha$ 図 (2ヒンジ形式、 $L_1/2$)

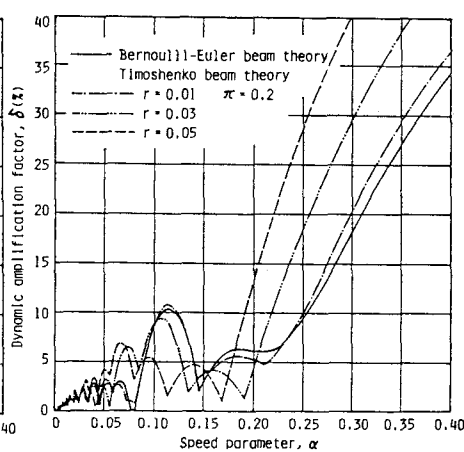


図-8 $\delta-\alpha$ 図 (連続形式、 $L_1/2$)

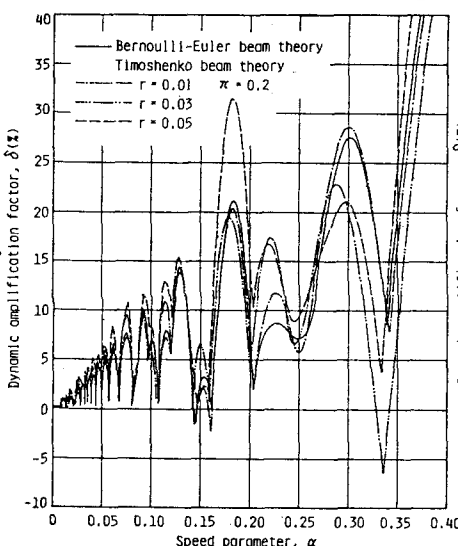


図-9 $\delta-\alpha$ 図 (2ヒンジ形式、 $L_2/2$)

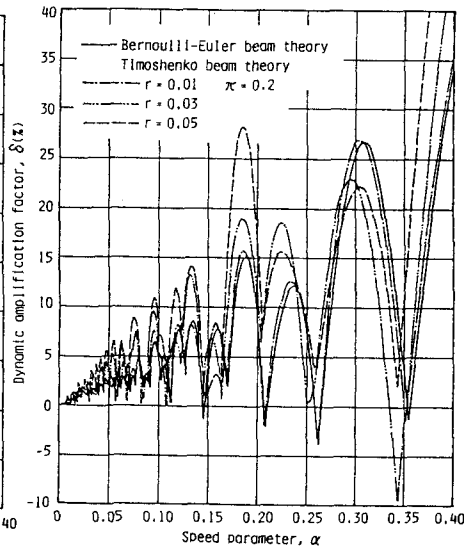


図-10 $\delta-\alpha$ 図 (連続形式、 $L_2/2$)