

I-10 球形キャップを有する円筒殻の振動特性について

北海道大学 正員 三上 隆
北海道大学 正員 菲澤 寛吉
北海道大学 正員 芳村 仁

1. はじめに

本報告は、頭部に球形キャップを有する片持円筒殻(図-1参照)の振動特性の検討を行ったものである。なお、この種の構造はサイロ、水櫃、原子炉容器などに見られる。

解析手法は選点法によった。その際、選点は Shifted Legendre 多項式の零点を用いた。この零点は、区間 $[0, 1]$ の端点近くで密に、中央部ほど粗に分布する性質を有している。それゆえ、不連続部を有する構造(例えば、殻厚や曲率などの形状が不連続)に対して、選点の分布が有効な働きをすることが期待できる。

2. 殻の基礎式

選点法は現象を支配する微分方程式と境界条件が与えられさえすれば定式化が行える。以下に Novozhilov の殻理論に基づく基礎式を列記する。

球殻、円筒殻の経線、円周および法線方向変位を u, v, w とし、円周方向に級数展開すると次式となる。

$$\begin{aligned} u^j &= \sum_n h U^n(x) \cos n\theta e^{i\omega t}, & v^j &= \sum_n h V^n(x) \sin n\theta e^{i\omega t} \\ w^j &= \sum_n h W^n(x) \cos n\theta e^{i\omega t} & j &= C, S \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、肩付添字 $j = C$ は円筒殻を、 $j = S$ は球殻を表わす。 h = 厚さ、 ω = 固有円振動数、 U, V, W = 無次元化された変位、 n = 円周方向波数、 $x = [0, 1]$

殻の微分方程式は経線方向座標 s に關する 3 元連立常微分方程式で表わされる。

(1) 円筒殻について

$$a_0 \ddot{U}^C + a_1 U^C + a_2 \dot{V}^C + a_3 \dot{W}^C - \lambda_c^2 U^C = 0 \quad (2-a)$$

$$a_4 \ddot{U}^C + a_5 \ddot{V}^C + a_6 \dot{V}^C + a_7 \dot{W}^C + a_8 W^C - \lambda_c^2 V^C = 0 \quad (2-b)$$

$$a_9 \ddot{U}^C + a_{10} \ddot{V}^C + a_{11} \dot{V}^C + a_{12} \dot{W}^C + a_{13} \dot{W}^C + a_{14} W^C - \lambda_c^2 W^C = 0 \quad (2-c)$$

$$<< \text{で、} a_0 = -\frac{1}{S^2(1-\nu^2)}, a_1 = \frac{n^2}{2(1+\nu)}, a_2 = -\frac{n}{2S(1-\nu)}$$

$$a_3 = \frac{\nu}{S(1-\nu^2)}, a_4 = -a_2, a_5 = -\frac{1}{2S^2(1+\nu)} \left(1 + \frac{E_c^2}{6}\right)$$

$$a_6 = \frac{n^2}{1-\nu^2} \left(1 + \frac{E_c^2}{12}\right), a_7 = \frac{n E_c^2}{12S^2(1-\nu^2)}$$

$$a_8 = -\frac{n}{1-\nu^2} \left(1 + \frac{n^2 E_c^2}{12}\right), a_9 = -\frac{\nu}{S(1-\nu^2)}$$

$$a_{10} = \frac{n(2-\nu) E_c^2}{12S^2(1-\nu^2)}, a_{11} = a_8, a_{12} = \frac{E_c^2}{12S^4(1-\nu^2)}$$

$$a_{13} = -\frac{E_c^2 n^2}{6S^2(1-\nu^2)}, a_{14} = \frac{1}{1-\nu^2} \left(1 + \frac{n^2 E_c^2}{12}\right)$$

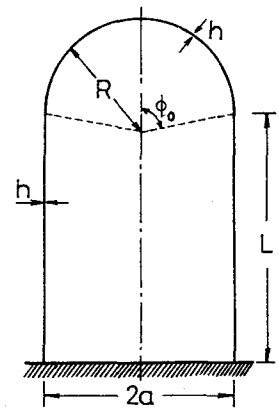


図-1 解析モデル

ただし、 $E_c = h^3/a$, $S = 1/a$, $\lambda_c^2 = \rho \omega^2 a^3/E$, ρ = 密度、 E = 弾性係数、 ν = ポアソン比、 L = 長さ

(2) 球殻について

$$b_0 \ddot{U}^S + b_1 \dot{U}^S + b_2 U^S + b_3 \dot{V}^S + b_4 V^S + b_5 \ddot{W}^S + b_6 \dot{W}^S + b_7 \dot{W}^S + b_8 W^S - \lambda_s^2 U^S = 0 \quad (3-a)$$

$$b_9 \dot{U}^S + b_{10} U^S + b_{11} \dot{V}^S + b_{12} \dot{V}^S + b_{13} V^S + b_{14} \ddot{W}^S + b_{15} \dot{W}^S + b_{16} W^S - \lambda_s^2 V^S = 0 \quad (3-b)$$

$$b_{17} \ddot{U}^S + b_{18} \dot{U}^S + b_{19} \dot{U}^S + b_{20} U^S + b_{21} \dot{V}^S + b_{22} \dot{V}^S + b_{23} V^S + b_{24} \ddot{W}^S + b_{25} \dot{W}^S + b_{26} \dot{W}^S + b_{27} W^S - \lambda_s^2 W^S = 0 \quad (3-c)$$

$$<< \text{で、} b_0 = -\left(1 + \frac{E_c^2}{12}\right) \frac{1}{S^2(1-\nu^2)}, b_1 = -\left(1 + \frac{E_c^2}{12}\right) \frac{\cot \phi}{S_a} \frac{1}{1-\nu^2}$$

$$b_2 = \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\cos^2 \phi + \nu \sin^2 \phi}{\sin^2 \phi} \left(1 + \frac{E_c^2}{12}\right) + \frac{n^2}{2(1+\nu)} \frac{1}{\sin^2 \phi} \left(1 + \frac{E_c^2}{6}\right)$$

$$b_3 = -\frac{n}{2(1-\nu)} \left\{1 + \frac{E_c^2}{6(1+\nu)} \int_0^1 \frac{1}{S_a \sin \phi} d\phi\right\}, b_4 = \frac{n}{2(1-\nu)} \left\{(3-\nu) + (2-\nu) E_c^2 \int_0^1 \frac{\cos \phi}{\sin^3 \phi} d\phi\right\}$$

$$b_5 = -\frac{E_c^2}{12S_a^2(1-\nu^2)}, b_6 = -\frac{E_c^2 \cot \phi}{12S_a^2(1-\nu^2)}$$

$$b_7 = \frac{1}{S_a^2(1-\nu^2)} \left\{1 + \nu + \frac{E_c^2}{12} \frac{n^2 + \nu \sin^2 \phi + \cos^2 \phi}{\sin^2 \phi}\right\}, b_8 = -\frac{n^2 E_c^2}{6(1-\nu^2)} \frac{\cos \phi}{\sin^3 \phi}$$

$$b_9 = \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{1 + \frac{E_c^2}{2(1+\nu)} \int_0^1 \frac{n}{S_a \sin \phi} d\phi\right\}, b_{10} = \frac{n}{2(1-\nu)} \left\{(3-\nu) + \frac{2-\nu}{6} E_c^2 \int_0^1 \frac{\cos \phi}{\sin^3 \phi} d\phi\right\}$$

$$b_{11} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(1 + \frac{E_c^2}{6}\right) \frac{1}{S_a^2}, b_{12} = -\frac{\cot \phi}{2(1+\nu) S_a} \left(1 + \frac{E_c^2}{6}\right)$$

$$b_{13} = -\frac{1}{2(1+\nu)} \left\{\frac{\sin^2 \phi - \cos^2 \phi + E_c^2(1-2\cos^2 \phi)}{\sin^2 \phi}\right\} + \frac{n^2}{1-\nu^2} \left(1 + \frac{E_c^2}{12}\right) \frac{1}{\sin^2 \phi}$$

$$b_{14} = \frac{\eta \epsilon^2}{12(1-\nu^2)S_0^2} \frac{1}{\sin \varphi}, \quad b_{15} = \frac{\eta \epsilon^2}{12(1-\nu^2)S_0} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$

$$b_{16} = -\frac{\eta}{1-\nu^2} \{1 + \nu + \frac{\epsilon^2}{12} (\frac{\eta^2}{\sin \varphi} - 1 + \nu)\} \frac{1}{\sin \varphi}$$

$$b_{17} = \frac{\epsilon^2}{12(1-\nu^2)S_0^2}, \quad b_{18} = \frac{\epsilon^2 \cot \varphi}{6(1-\nu^2)S_0^2}, \quad b_{19} = -\frac{1}{S_0(1-\nu)}$$

$$-\frac{\epsilon^2}{12(1-\nu^2)S_0} \{1 + \nu + \cot^2 \varphi + \frac{\eta^2}{\sin \varphi} (2 - \nu)\}, \quad b_{20} = -\frac{\cot \varphi}{S_0(1-\nu)}$$

$$-\frac{\epsilon^2}{12(1-\nu^2)} \{ \cot \varphi (\nu - 1 - \frac{1}{\sin \varphi}) + \frac{\eta^2 \cos \varphi}{\sin \varphi} \}, \quad b_{21} = \frac{2 - \nu}{12(1-\nu^2)S_0^2} \frac{\eta \epsilon^2}{\sin \varphi}$$

$$b_{22} = -\frac{\eta \epsilon^2}{12(1-\nu^2)S_0^2} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad b_{23} = \frac{\eta \epsilon^2}{12(1-\nu^2)} \frac{1 - \eta^2 + 2(1-\nu) \sin \varphi}{\sin \varphi}$$

$$-\frac{1}{1-\nu} \frac{\eta}{\sin \varphi}, \quad b_{24} = \frac{\epsilon^2}{12(1-\nu^2)S_0^2}, \quad b_{25} = \frac{\cot \varphi \epsilon^2}{6(1-\nu^2)S_0^2}$$

$$b_{26} = -\frac{\epsilon^2}{12(1-\nu^2)S_0^2} \{ \frac{2\eta^2}{\sin^2 \varphi} + 1 + \nu + \cot^2 \varphi \}, \quad b_{27} = \frac{\epsilon^2}{12(1-\nu^2)S_0} \{ (1-\nu) \cot \varphi$$

$$+ \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} (1 + 2\eta^2) \}, \quad b_{28} = \frac{2}{1-\nu} + \frac{\epsilon^2 \eta^2}{12(1-\nu^2)} \{ \frac{\eta^2 - 4}{\sin \varphi} + \frac{1 + \nu}{\sin^2 \varphi} \}$$

ただし, $\epsilon = h/R$, $S_0 = \pi \phi_0 / 180$, $\lambda_0^2 = 8\omega^2 R^3 / E$,
 $R =$ 半径, $\phi_0 =$ 半仰角。

なお, 式(2), (3)でドット(・)は x に関する微分を表す。

球殻の頂点, 球殻と円筒殻の不連続部および円筒殻下端での条件は以下である。

(1) 球殻の頂点で

$$\left. \begin{aligned} n=0; \quad U^s &= V^s = \dot{W}^s = \ddot{W}^s = \ddot{U}^s = 0 \\ n=1; \quad U^s + V^s &= W^s = \dot{U}^s = M_x^s = 0 \\ n \geq 2; \quad U^s &= V^s = W^s = \dot{W}^s = 0 \end{aligned} \right\} \text{-----(4)}$$

ここで, $M_x =$ 経線方向曲げモーメント

(2) 球殻と円筒殻の不連続部で

$$U^c = U^s \cos \phi_0 + W^s \sin \phi_0, \quad W^c = -U^c \cos \phi_0 + W^s \sin \phi_0$$

$$V^c = V^s, \quad \dot{W}_s^c = (\sin \phi_0 / S_0) \dot{W}^s + \sin \phi_0 U^s$$

$$N_x^c = N_x^s \sin \phi_0 + T_x^s \cos \phi_0, \quad M_x^c = M_x^s, \quad S_{x\theta}^c = S_{x\theta}^s$$

$$T_x^c = -N_x^s \cos \phi_0 + T_x^s \sin \phi_0 \text{-----(5)}$$

ここで, $N_x =$ 経線方向合力, $T_x, S_{x\theta} =$ 等価せん断力

(3) 円筒殻下端で

円筒殻下端の固定条件は次の2種類を考え, C_1, C_2 の略称を付した。

$$C_1: U^c = V^c = W^c = \dot{W}^c = 0 \text{-----(6.a)}$$

$$C_2: U^c = S_{x\theta}^c = W^c = \dot{W}^c = 0 \text{-----(6.b)}$$

3. 変点法による定式化

円筒殻, 球殻の変位関数 U, V, W を次のべき級数で表す。

$$U^j = \sum_{i=1}^{M+2} a_i x^{i-1}, \quad V^j = \sum_{i=1}^{M+2} b_i x^{i-1}, \quad W^j = \sum_{i=1}^{M+4} c_i x^{i-1} \text{-----(7)}$$

($j = c, s$)

式(7)で, M_c は円筒殻, M_s は球殻に対する変点数(内部変点数)を表す。

式(7)そのものを用いると, 振動数方程式は未定係数(a_i, b_i, c_i)を固有ベクトルとする形で得られるが, 数値計算の簡易化を計るため, 基礎式中に現れる導関数(1~4次)を変点における値(モード値)と結びつけるマトリックスを導出する¹⁾。このマトリックスを用いると振動数方程式は次のように得られる。

以下, 簡単のため式(7)で $M_c = M_s = M$ とすると, 未知量の総数は $6M + 16$ である。

まず $6M$ の条件は微分方程式の変点における残差の条件より得られ, マトリックス表示すると次式となる。

$$[\alpha_1] \{ \delta_1 \} + [\alpha_2] \{ \delta_2 \} - \Omega^2 \{ \delta_1 \} = \{ 0 \} \text{-----(8)}$$

ここで, $\{ \delta_1 \}$ は変点におけるモード値を未知量とするベクトル, $\{ \delta_2 \}$ は球殻の頂点, 円筒殻下端などにおけるモード値に関するベクトル, $[\alpha_1], [\alpha_2]$ はそれぞれ $6M \times 6M, 6M \times 16$ の大きさのマトリックスである。参考のため $[\alpha_1]$ の内容を示す。

$$[\alpha_1] = \begin{bmatrix} \text{式(3)より} & 0 \\ 0 & \text{式(2)より} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3M \times 3M \\ 3M \times 3M \end{matrix} \text{------(9)}$$

$[\alpha_2]$ は $[\alpha_1]$ に類似な形で与えられるが, $3M \times 8$ のサブマトリックスで構成される。

残り, 16個の条件は, 球殻の頂点, 球殻と円筒殻の不連続部および円筒殻下端の固定条件より得られる。これらの条件を, 式(8)に習いマトリックス表示すると次式となる。

$$[\beta_1] \{ \delta_1 \} + [\beta_2] \{ \delta_2 \} = \{ 0 \} \text{------(10)}$$

ここで, $[\beta_1]$ は $16 \times 6M$, $[\beta_2]$ は 16×16 のマトリックス。参考のため $[\beta_1]$ の内容を示す。

$$[\beta_1] = \begin{bmatrix} \text{式(4)より} & 0 \\ \text{式(5)より} & \\ 0 & \text{式(6.a) or (6.b)より} \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \times 3M \\ 8 \times 6M \\ 4 \times 3M \end{matrix} \text{-----(11)}$$

$[\beta_2]$ も $[\beta_1]$ に類似な形で与えられるが, 式(11)で $4 \times 3M, 8 \times 6M$ のサブマトリックスの大きさがそれぞれ $4 \times 8, 4 \times 16$ の大きさとなる。

式(8), (10)より $\{ \delta_2 \}$ を消去すれば振動数方程式は次式となる。

$$[\alpha_1] - [\alpha_2] [\beta_2]^{-1} [\beta_1] \{ \delta_1 \} - \Omega^2 \{ \delta_1 \} = \{ 0 \} \text{-----(12)}$$

ここで、 $\Omega^2 = a^2 \omega^2 g / E$ である。なお、以下に示す結果は $\Omega = a \omega \sqrt{g/E}$ を用いた。

4. 数値計算

表-1 a), b) に $L/a = 1.0$, $h/a = 0.02$, $\nu = 0.2$, $\phi = 90^\circ$ のときの、遷点数 M に対する収束状況を示す。a) は基本振動数, b) は軸方向モード次数 $m = 2 \sim 5$ に対するものである。本手法による結果は $M = 10, 11$ で一定値と判断される。なお、a) に比較のため既往の解も示した。これによると既往の解との差はほとんどない。以下の数値結果は $M = 11$ による結果である。

表-1 a) 基本振動数の収束性

Circumferential mode n	Series solution	F.E.M	This study		
			$M=9$	$M=10$	$M=11$
0	0.64664	0.64663	0.64664	0.64664	0.64664
1	0.29628	0.29628	0.29629	0.29629	0.29629
2	0.50551	0.50916	0.50910	0.50910	0.50910
3	0.41020	0.41067	0.41062	0.41062	0.41062
4	0.34374	0.34385	0.34374	0.34374	0.34374

表-1 b) 軸方向モード 2~5 次の収束性

Axial mode m	Circumferential mode n					
	$n = 0$			$n = 1$		
	$M=9$	$M=10$	$M=11$	$M=9$	$M=10$	$M=11$
2	0.92289	0.92289	0.92289	0.78722	0.78722	0.78722
3	0.98076	0.98077	0.98077	0.86635	0.86636	0.86636
4	1.00581	1.00591	1.00590	0.96626	0.96626	0.96626
5	1.02976	1.02997	1.02996	0.98172	0.98172	0.98172

表-2 ポアソン比の振動数に与える影響

n	Mode 1		Mode 2	
	$\nu = 0.15$	$\nu = 0.30$	$\nu = 0.15$	$\nu = 0.30$
0	0.4969	0.4897	0.8706	0.8457
1	0.1782	0.1721	0.5247	0.5179
2	0.2891	0.2820	0.5927	0.5852
3	0.1995	0.1961	0.4507	0.4460
4	0.1477	0.1465	0.3480	0.3449

表-2 にポアソン比の振動数に及ぼす影響を示した。解析諸元は $L/a = 2.0$, $h/a = 0.01$, $\phi = 90^\circ$, 円筒殻下端の固定条件は C_1 (完全固定) である。表よりポアソン比の増加は振動数を僅かであるが減少させることがわかる。

図-2 に球形ギャップつき円筒殻の振動数 Ω と円周方向波数 n の一般的な関係を示す。諸元は $L/a = 2.0$, $h/a = 0.01$, $\nu = 0.3$, $\phi = 90^\circ$ である。図は円筒殻下端の固定条件 C_1 (完全固定), C_2 (円周方向の拘束がない, $V \neq 0$) に対する軸方向モード 3 次までの結果である。図より振動数 Ω - 波数 n 曲線に次のような特性があることがわかる。

すなわち波数 $n = 1, 2$ で極値(極小値, 極大値)をとり, n が増すにつれ ($n > 2$) 振動数が減少し, そしてある波数 n で極値(極小値)を持ち, その後波数の増加と共に振動数も増加する。なお、この $\Omega - n$ 曲線は上記の諸元より得られたものであるが、他の諸元についても同様の結果が得られた。またこの図より円筒殻下端の固定条件の振動数に及ぼす影響は、波数 n が小さいとき大きいことがわかる。

図-3 は $L/a = 2.0$, $\nu = 0.3$, $\phi = 90^\circ$ のときの種々の殻厚・半径比 (h/a) に対する基本振動数と波数

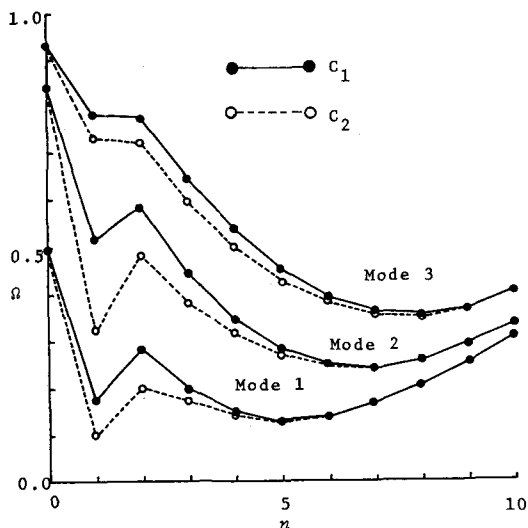


図-2 振動数-波数曲線

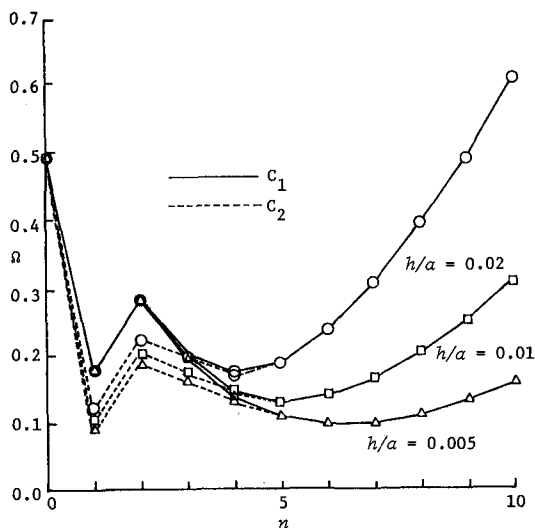


図-3 h/a の振動数に与える影響

の関係を示す。円筒殻下端の固定条件が C_2 のとき、 h/a によらず最小振動数を与える波数は $n=1$ である。一方固定条件 C_1 のとき、 h/a の増加と共に最小振動数を与える波数は小さくなる。また固定条件の振動数に与える影響は、波数 $n=1, 2$ のときおよび h/a が小さい程大きい。

図-4に円筒殻の長さ・半径比 (L/a) に対する基本振動数と波数の関係を示す。ただし、 $h/a=0.01$, $\nu=0.3$, $\phi_0=90^\circ$ である。円筒殻下端の固定条件 C_2 のときは最小振動数を与える波数は $n=1$ であるが、条件 C_1 では L/a の増加につれ最小振動数を与える波数は小さくなっていく。このような L/a と最小振動数を与える波数の関係などは、想定した動的荷重が高い円筒方向波数を持つて殻を振動させる場合などに留意すべき点と思われる。固定条件の振動数に与える影響は、波数 n が小さく、そして L/a が小さいとき著しい。ちなみに $n=1$ の条件 C_2 による値は C_1 による値より、 $L/a=1$ で50%, $L/a=2$ で40%程度減少している。

図-5に固定条件が C_1 , $L/a=2$, $h/a=0.01$, $\nu=0.3$ のときの、半開角 ϕ_0 の振動数に与える影響を示す。図が示すように半開角の影響は他の形状パラメータほど大きくない。

図-6に半開角 $\phi_0=45^\circ, 90^\circ$ の球形キャップを有する円筒殻のモードを示す。これによると軸方向モード数が大きくなるにつれ、円筒殻の変形が支配的となる。

5. まとめ

頭部に球形キャップを有する円筒殻の自由振動解析に重点法を適用し、振動特性に及ぼす形状パラメータの影響を明らかにした。

参考文献

1) 三上 芳村,
オシロイ学会年次
学術講演会要録集,
オシロイ 1980.

2) R.A. FEIJÓO
etal, Int. J. Num.
Mech. Engng, 16,
pp 19-33, 1980.

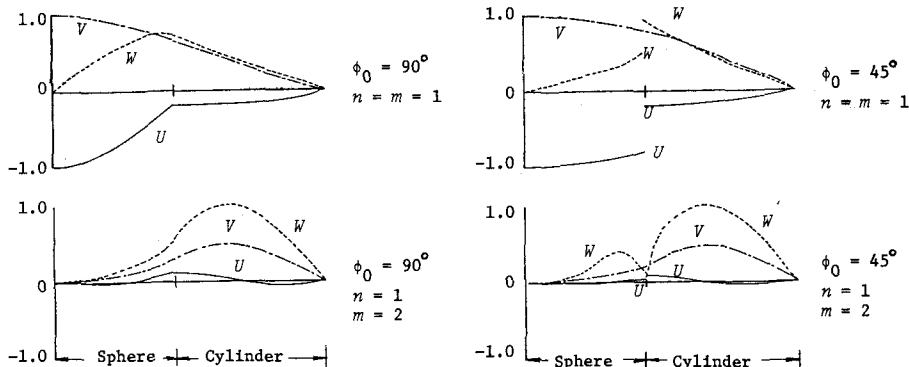


図-6 モード形 ($L/a=2.0$, $h/a=0.01$, $\nu=0.3$, C_1 のとき)

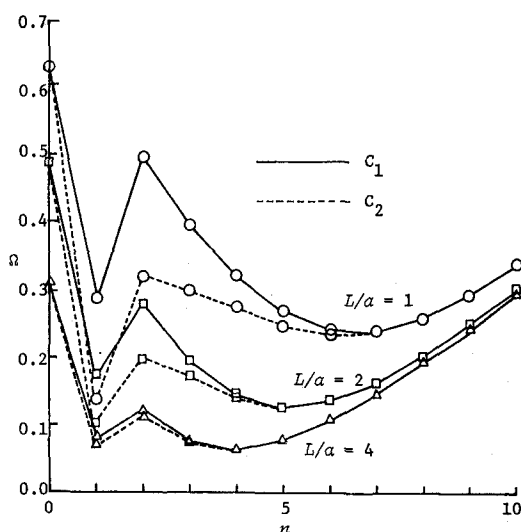


図-4 L/a の振動数に与える影響

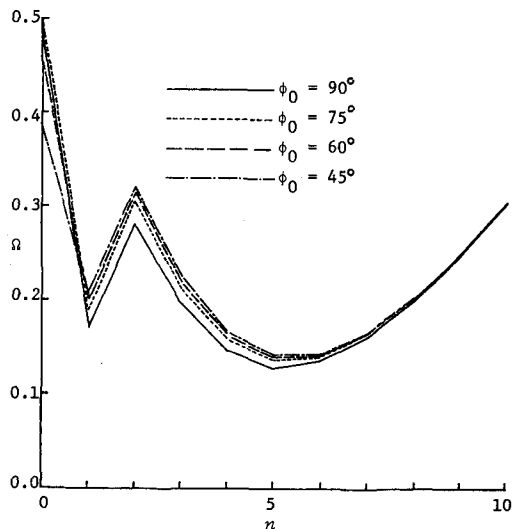


図-5 ϕ_0 の振動数に与える影響