

I—5 上下表面に対称ねじり荷重を受ける 繊維強化複合棒の三次元応力解析

北見工大 正員 三上修一

同 同 大島俊之

北大工学部 同 能町純雄

1. まえがき

本論文においては一方に連続する補強繊維が母材中に等断面積、等間隔で配列されている複合材料からなる長方形断面棒を対象として、上下面に対称部分分布ねじり荷重が作用する場合について、有限要素法を応用した三次元応力解析を行なっている。

このような複合材料(FRC)の応力解析には、補強繊維と母材マトリックスとの相互作用を、補強繊維が断面に点状している状態を考慮しつつ解析する手法と、補強繊維と母材を平均化し連続体力学による異方性弾性体とみなして解析する手法があるが、ここでは前者に従うこととする。

複合材料の応力解析としては、等分布積層材や補強繊維が等距離に分布している場合、補強繊維方向の剛性が、どの補強材も同じ相互作用を母材と行うものと仮定して、積層複合材(Laminated Composite)や繊維強化複合材(Fiber Reinforced Composite)に関する研究が広く行なわれている。^{1), 2), 3)}

また一方、均質、等方材料の棒のねじり問題の応力解析も Saint Venant⁴⁾ 以来多くの研究がある。⁵⁾

ここでは長軸方向に両端に支持された長方形断面棒の部分分布せん断荷重によるねじりの問題の応力解析を行なうとともに、繊維が変位および応力分布に与える影響および積層異方性材(Stratified anisotropic material)としての結果との比較などについて検討する。

2. 理論式

図1のように、部材内部で補強繊維が規則的に配列されているような、同じ形式の繰返しに内部構造である場合、母材を補強繊維の位置を節点とする長方形断面有限要素に分割し、また補強繊維は部材全体の断面積に比較して十分小さく、有限要素の節点に集中する断面積とみなし、節点でのつりあい式の中に組み込む方法により解析する。

補強繊維の抵抗は軸方向ひずみによるものと、横断方向には Euler ばり抵抗をとることとする。

図2のような任意の節点に対して、有限要素法を適用する。節点での節点力のつりあいを X, Y, Z 3方向にそれぞれあらわすと、

$$\sum T_{yz}^i(x) + E_f A_f \ddot{u}_{yz} = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_{yz}^i(x) + E_f I_{fy} \ddot{v}_{yz} = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z_{yz}^i(x) + E_f I_{fz} \ddot{w}_{yz} = 0 \quad (3)$$

ただし、上式では強化繊維の軸方向剛性と軸直角二方向の曲げ剛性を考慮している。

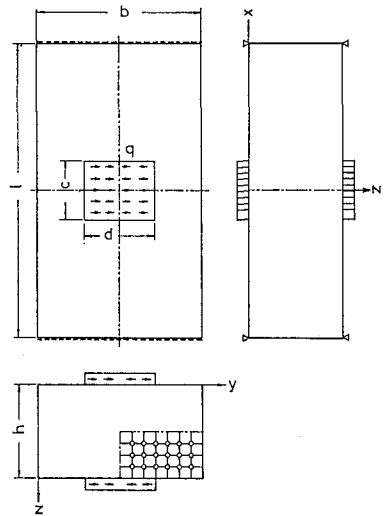


図 1 繊維強化長方形断面棒

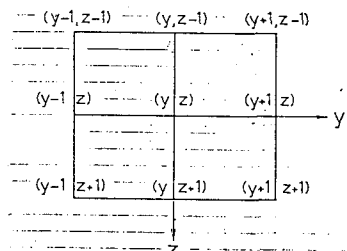


図 2 座 標 系

式(1)~(3)にフリズム要素関係式⁵⁾を代入すると、基礎微分差分方程式として次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} L_{11}^* & L_{12}^* & L_{13}^* \\ & L_{22}^* & L_{23}^* \\ \text{Sym.} & & L_{33}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{yz} \\ V_{yz} \\ W_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\text{ただし, } L_{11}^* = \frac{(2\mu + \lambda) \lambda_2 \lambda_3}{36} \bar{\Delta}_y^2 \bar{\Delta}_z^2 D_x^2 + \frac{\mu \lambda_3}{6 \lambda_2} \Delta_y^2 \bar{\Delta}_z^2 + \frac{\mu \lambda_2}{6 \lambda_3} \Delta_z^2 \bar{\Delta}_y^2 + E_f A_f D_x^2,$$

$$L_{12}^* = \frac{(\mu + \lambda) \lambda_3}{12} \Delta_y \bar{\Delta}_z^2 D_x, \quad L_{13}^* = \frac{(\mu + \lambda) \lambda_2}{12} \Delta_z \bar{\Delta}_y^2 D_x,$$

$$L_{22}^* = \frac{\mu \lambda_2 \lambda_3}{36} \bar{\Delta}_y^2 \bar{\Delta}_z^2 D_x^2 + \frac{(2\mu + \lambda) \lambda_3}{6 \lambda_2} \Delta_y^2 \bar{\Delta}_z^2 + \frac{\mu \lambda_2}{6 \lambda_3} \Delta_z^2 \bar{\Delta}_y^2 + E_f I_{fy} D_x^2,$$

$$L_{23}^* = \frac{\mu + \lambda}{4} \Delta_y \Delta_z, \quad L_{33}^* = \frac{\mu \lambda_2 \lambda_3}{36} \bar{\Delta}_y^2 \bar{\Delta}_z^2 D_x^2 + \frac{(2\mu + \lambda) \lambda_2}{6 \lambda_3} \Delta_z^2 \bar{\Delta}_y^2 + \frac{\mu \lambda_3}{6 \lambda_2} \Delta_y^2 \bar{\Delta}_z^2 + E_f I_{fz} D_x^2$$

$$\bar{\Delta}_y^2 = \Delta_y^2 + 6, \quad \bar{\Delta}_z^2 = \Delta_z^2 + 6, \quad D_x = d/dx, \quad \Delta_y^2 f(y) = f(y+1) - 2f(y) + f(y-1),$$

$$\Delta_y f(y) = f(y+1) - f(y-1)$$

式(4)の解を求めるため、x方向には有限フーリエ変換⁸⁾、yおよびz方向には定和分変換^{6),7)}を用いる。
x=0, lにおける境界条件として、ヒンジ支持の場合を取り扱うので、この場合の条件式は、

$$\left. \begin{aligned} U_{yz}(0) = U_{yz}(l) = 0 \\ V_{yz}(0) = V_{yz}(l) = 0, \quad \bar{V}_{yz}(0) = \bar{V}_{yz}(l) = 0 \\ W_{yz}(0) = W_{yz}(l) = 0, \quad \bar{W}_{yz}(0) = \bar{W}_{yz}(l) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5) \quad \text{表 1 分割数の比較} (\sigma_x / E)$$

次にyとz方向の自由面の境界条件としては、上下、左右の表面に荷重が作用する場合、フリズム要素の節点、に離散化して表わす。

自由表面の条件を示せば

$$\left. \begin{aligned} \text{上下面において; } \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \text{左右の側面において; } \sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

3. 均質棒に対する分割数および級数の精度の検討

b/h = 2, l/b = 4, b = 160cm, の長方形断面棒に $q = 10 \text{ kg/cm}^2$, $d/b = 1/4$, $c/l = 1/8$ の部分分布ねじり荷重が支間中央に作用している場合について分割数およびフーリエ級数の項数を変えて比較した。

(a) 分割数による精度の比較

Case 1; 16×8 分割, Case 2; 16×16 分割, Case 3; 32×16 分割の3通りに変化させ、弾性定数により無次元化した。

表 2 分割数の比較 (τ_{yz} / G) (c)

σ_x / E および τ_{yz} / G の比較

を表1と表2に示した。

これらによると、16×16 分割の Case 2 において Case 3 と近似していることから、ほぼこの程度の分割数で実用的結

x	x=0	y=0	z=0
	8×16	16×16	16×32
0	0.0	0.0	0.0
1/8	0.072	0.098	0.095
1/4	0.829	1.138	1.132
3/8	5.163	7.352	7.345
7/8	7.112	10.763	10.609
1/2	7.325	11.598	11.287

(c)

x	x=0	y=b/4	z=h/4
	8×16	16×16	16×32
0	0.0	0.0	0.0
1/8	0.020	0.025	0.022
1/4	0.359	0.499	0.498
3/8	2.440	3.502	3.503
7/8	3.493	5.137	5.016
1/2	3.512	5.253	5.008

($\mu = 10^{-6}$)

z	x=0	x=a/2	y=b/4
	8×16	16×16	16×32
0	-0.866	-0.594	-2.691
h/8	-5.742	-11.293	-12.168
h/4	-12.124	-17.850	-18.837
3h/8	-14.742	-19.937	-21.067
h/2	-15.715	-20.330	-21.505

z	x=0	x=a/2	y=b/2
	8×16	16×16	16×32
0	18.93	15.07	17.18
h/8	-12.43	-45.14	-44.25
h/4	-32.22	-34.12	-33.37
3h/8	-22.37	-26.02	-25.34
h/2	-25.23	-23.82	-22.82

x	x=0	y=b/2	z=h/4
	8×16	16×16	16×32
0	0.0	0.0	0.0
1/8	-0.35	-0.30	-0.30
1/4	0.49	0.75	0.77
3/8	-2.78	-3.79	-3.91
7/8	-14.23	-14.55	-14.09
1/2	-32.22	-34.12	-33.37

果が得られるとみなすことができる。また、表面付近のせん断応力の変化がばげいため、充分な注意を払う必要がある。

(b) 級数の項数による精度の比較

フーリエ級数の項数を20, 40, 80と変化させて計算した結果を表3と表4に示している。

これらによると20項の場合でもほぼ実用的結果が得られており、級数については分割数の場合ほど精度の変動がみられない。

表3 級数の比較 (σ_x/E)

(a)				(b)			
x	x/y	y=0	z=0	x	x/y	y=b/4	z=0
	20	40	80		20	40	80
0	0.0	0.0	0.0	0	0.0	0.0	0.0
$l/8$	0.98	0.10	0.10	$l/8$	0.066	0.095	0.095
$l/4$	1.14	1.14	1.14	$l/4$	0.900	0.903	0.901
$3l/8$	7.35	7.34	7.34	$3l/8$	6.751	6.644	6.645
$7l/16$	10.76	10.76	10.76	$7l/16$	12.959	12.948	12.943
$l/2$	11.60	11.61	11.61	$l/2$	16.132	16.307	16.310

表4 級数の比較 (τ_{yz}/G)

(a)				(b)				(c)			
x	x/y	y=b/2	z=0	x	x/y	y=b/2	z=h/4	x	x/y	y=b/4	z=h/4
	20	40	80		20	40	80		20	40	80
0	0.0	0.0	0.0	0	0.0	0.0	0.0	0	0.0	0.0	0.0
$a/8$	0.447	0.019	0.002	$a/8$	-0.30	0.12	0.12	$a/8$	0.007	0.077	0.077
$a/4$	0.201	0.101	0.070	$a/4$	0.75	0.80	0.80	$a/4$	0.552	0.552	0.550
$3a/8$	-1.079	0.433	0.103	$3a/8$	3.79	-2.34	2.43	$3a/8$	0.541	0.332	0.340
$7a/16$	6.793	7.259	6.669	$7a/16$	-14.55	-14.81	-14.67	$7a/16$	-9.039	-9.084	-9.079
$a/2$	15.540	13.188	14.082	$a/2$	-34.12	-31.80	-32.01	$a/2$	-17.850	-17.510	-17.520

4. 数値解析結果

母材中に図1のように補強繊維が規則的に配列されている場合を対象として、補強繊維の影響などを調べた。

繊維はY方向に31列、Z方向に

15列配置されており、この場合スリズム要素数は $n \times r = 32 \times 16$ となる。また

また繊維の間隔はY方向、Z方向それぞれ5cmとなっている。

母材の弾性定数として $E = 3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.17$

繊維については $E_f/E = 7$, $\nu_f = 0.3$

全体の繊維の混入率は約9%となる。図中スリズム要素法による結果を $\eta (= A_1/\lambda_2\lambda_3) = 0.1$, 換算等方性弾性体としての結果を E^* , 積層直交異方性体としての結果を E_a と表示している。

これらの結果から補強繊維が変形および応力分布に与える影響をみることもできるとともに、 E_a の結果が $\eta = 0.1$ の結果とほぼ一致することもたしかめられた。

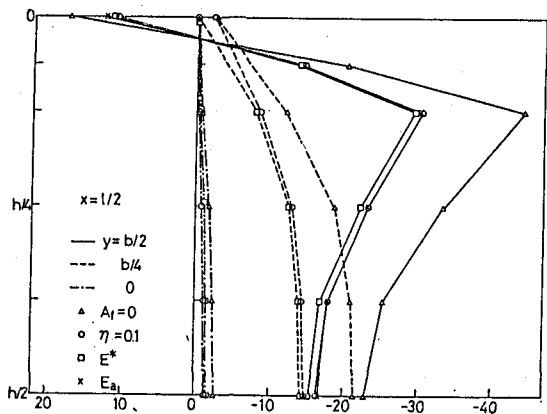


図5 τ_{yz} のZ方向分布

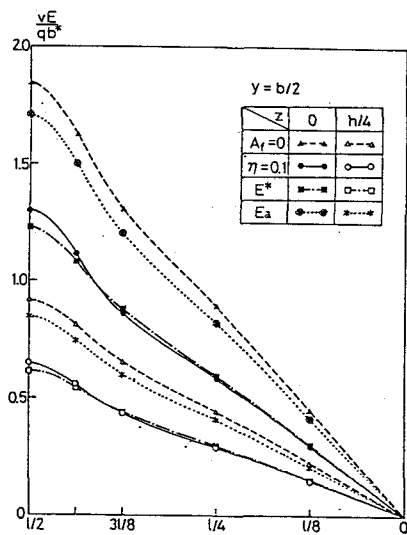


図3 水平変位vのX方向分布

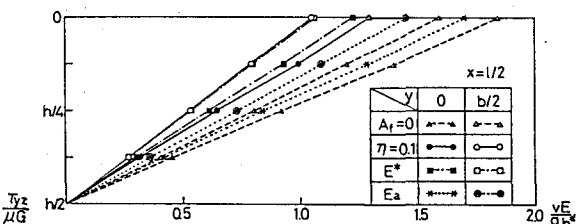


図4 水平変位のZ方向分布

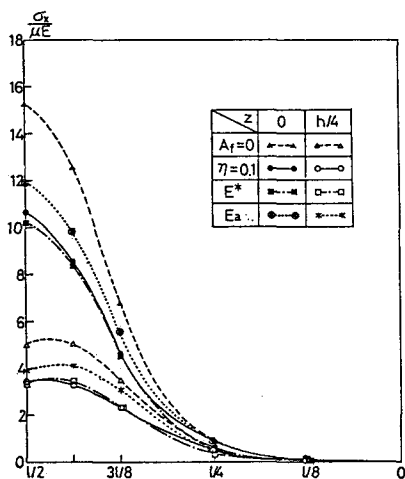


図 6 σ_x の X 方向分布

5. あとがき

以上のことから、本論文のような長方形断面棒のねじりの問題の場合、表面でのせん断応力分布の変化がばげしいので、分割数は 16×16 程度以上とすることが必要となり、また級数については 20 項程度で実用上充分と思われる。

また積層直交異方性体としての計算結果が、7-リズム要素法による結果とほぼ一致することから、このような平均化換算法が妥当なものであることが確かめられた。また計算結果の図からは、補強繊維が全体として、30% 程度変位および母材の応力の減少が見られる。

参考文献

- 1) 林毅 編；複合材料工学，日科技連，1977
- 2) Hashin, Z., B. W. Rosen ; The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials, J. Appl. Mech., June, 1964.
- 3) 石川, 小林；一方向繊維強化複合材料の応力解析, 日本複合材料学会誌, 才2巻, 才3号, 1976, 才3巻, 才4号, 1977.
- 4) Todhunter, Pearson ; A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials, Dover, Vol. 2, 1960.
- 5) Timoshenko, S.P. ; Theory of Elasticity, Third Ed., McGraw-Hill, 1970.
- 6) Nomachi, S.G., T. Ohshima ; On the Stress Analysis of the Beams with Rectangular Cross Section by Means of Finite Prism Method ; Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 24, 1974.
- 7) T. Ohshima, S.G. Nomachi ; Stress Analysis of Elastic Plate with a Viscoelastic Layer by Means of Finite Prism Method, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 27, 1977
- 8) Sneddon, I.H. ; Fourier Transforms, McGraw-Hill, 1951

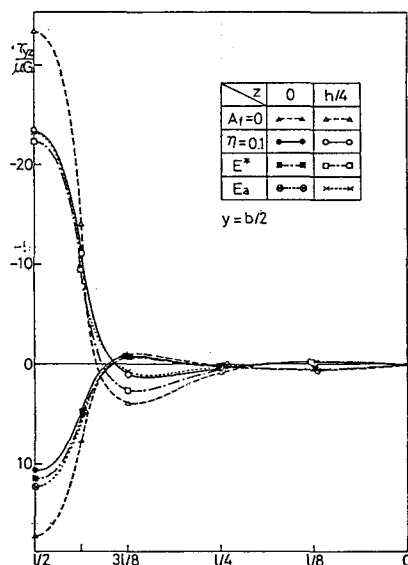


図 7 τ_{yz} の X 方向分布

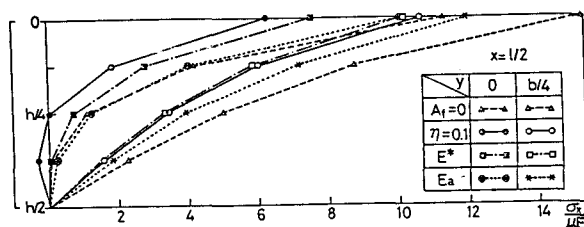


図 8 σ_x の Z 方向分布 (1/2)