

I — 3 半無限弾性体へ剛体を落下させた場合の衝撃力について

北海道大学 正員 能町 純雄
室蘭工業大学 正員 松岡 健一
専修大学 道短期大学 正員 三上 敬司

1. まえがき

クイ打ち機械や鍛造機のように、重量物の落下衝突によって生ずる衝撃力を評価することは、重要な問題である。この種の問題において、工学的に扱う場合の簡単な解法¹⁾としては、衝突理論を適用する方法と衝撃力をあらかじめ仮定し、それを Laplace 変換を用いて代数計算する方法があるが、衝撃力の大きさ、衝撃作用時間などの決め方に問題がある。静的な圧入問題であるが、宮本博²⁾は、半無限弾性体の平面境界を剛体で圧入した場合に半無限弾性体内に生ずる応力分布と圧縮される面積の領域を仮定して円柱に加える全圧力を求めている。1977 年の Bycroft³⁾は、衝撃をデルタ関数 $m v_0$ (m : 剛体の質量, v_0 : 剛体の初速度) と仮定して、半無限弾性体上の剛体の衝撃力を求め、さらに、実験値と比較している。

半無限弾性体上の質量をもたない剛円盤の鉛直方向の定常強制振動問題において、Lysmer と Richart⁴⁾, Luco と Westmann⁵⁾, Veletsos と Wei⁶⁾によって、広範囲な振動係数に対するコンプライアンスとして求められている。本論文では、Fourier-Bessel 変換を用いて、コンプライアンスを求め、このコンプライアンスを用いて、初期条件である初速度 v_0 から定常状態までの時間変化を考慮した半無限弾性体上のフラットな表面に平底円柱を落下させた場合の衝撃力を求めた。

2. 解析方法

図-1 に示すように、半無限弾性体上に質量をもたない剛円盤の定常鉛直振動による複素コンプライアンスを求めてみる。

弾性接触問題より、鉛直方向に $P e^{i \omega t}$ の荷重と質量をもたない半径 r_0 の剛円盤に作用させた場合の弾性体の応力分布は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{P e^{i \omega t}}{2 \pi r_0 (r_0^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} & \text{for } r < r_0 \\ &= 0 & r > r_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

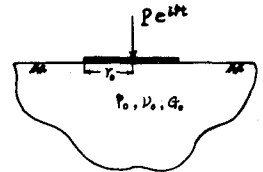


図 - 1

となる。

動的三次元運動方程式を 回転方向、鉛直方向には Fourier 変換、半径方向には、Bessel 変換をそれぞれ施して、鉛直方向の応力 σ_z を求めると

$$J_m C_m[\sigma_z] = - \frac{2 G_0 \xi}{r_0^2 \beta} \left\{ \xi^2 - \frac{r_0^2 \beta^2}{2 G_0} - \alpha \beta \right\} J_{m-1}[T_{m r z}] - \frac{G_0^2}{r_0^2 \beta} \left\{ 4 \alpha \beta \xi^2 - (2 \xi^2 - \frac{r_0^2 \beta^2}{G_0})^2 \right\} J_m C_m[\delta_0] \quad (2)$$

境界条件として、地表面では、せん断力が作用していないとすると、 $T_{m r z} = 0$ となり、(1)式を用いて (2)式を表わすと、

$$J_m C_m[\delta_0] = - \frac{r_0^2 \beta}{G_0^2 \{ 4 \alpha \beta \xi^2 - (2 \xi^2 - \frac{r_0^2 \beta^2}{G_0})^2 \}} \int_0^{r_0} \frac{P e^{i \omega t}}{2 \pi r_0 (r_0^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} r J_1(\xi r) dr \quad (3)$$

(3)式を逆変換すると、鉛直方向の変位 δ_0 は、

$$\delta_0 = - \frac{P e^{i \omega t}}{2 \pi} \int_0^\infty \frac{r \beta}{G_0^2 \{ 4 \alpha \beta \xi^2 - (2 \xi^2 - \frac{r_0^2 \beta^2}{G_0})^2 \}} \cdot \frac{\sin r_0 \xi}{r \xi} \xi J_1(\xi r) d\xi \cdot \cos \theta \quad (4)$$

さらに、(4)式を重みをつけた平均鉛直変位 δ_a は、

$$\delta_a = \int_0^{r_0} \frac{r \delta_0}{r_0 (r_0^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} dr = -\frac{P e^{i\omega t}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{P_0 P \beta}{G_0^2 \{4\alpha\beta^2 - (2\xi^2 - \frac{P_0^2}{G_0^2})^2\}} \cdot \left(\frac{\sin r_0 \xi}{r_0 \xi}\right)^2 \xi d\xi \quad (5)$$

ここで、

P_0, λ_0 = 半無限弾性体の Lamé の定数

G_0 = 半無限弾性体の剛性率

ν_0 = 半無限弾性体のポアソン比

β = 定常鉛直振動の内振動数

P = 定常振動力の振幅

$\xi = \kappa \Delta$, $r_0 \xi = a_0 \Delta$, $\kappa = (\frac{P_0}{G_0})^{\frac{1}{2}} \beta$, $\eta = (\frac{P_0}{2G_0 + \lambda_0})^{\frac{1}{2}}$

$\eta^2 = \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0}$, $\bar{\alpha} = a_0 (\Delta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$, $\bar{\beta} = a_0 (\Delta^2 - \eta^2)^{\frac{1}{2}}$

$a_0 = \kappa r_0$ と置くと、(5) 式は、

$$\delta_a = C_{VV} \cdot P e^{i\omega t} = (C_1 + iC_2) \cdot P e^{i\omega t} \quad (6)$$

ところで、 C_{VV} は、鉛直方向の定常振動による複素コンプライアンスである。 C_1 は実数、 C_2 は虚数である。

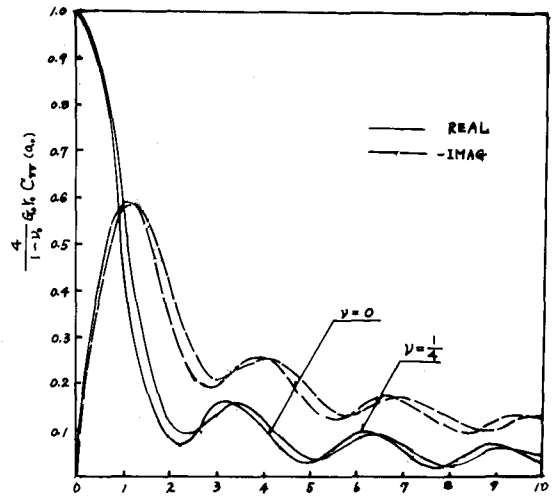


図-2 鉛直振動による複素コンプライアンス

$$C_{VV}(a_0) = -\frac{1}{2\pi G_0 r_0} \int_0^\infty \frac{(1-\eta^2) \bar{\beta} (\bar{\beta} + \bar{\alpha})}{\bar{\beta}^2 - \bar{\alpha}^2 (3-4\nu_0^2) - \bar{\alpha}^2 \bar{\beta} - (1-2\nu_0^2) \bar{\alpha}^2} \cdot \frac{\sin^2 a_0 \Delta}{a_0 \Delta} d(a_0 \Delta) \quad (7)$$

$\beta = 0$ である静的なコンプライアンス $C_{VV}(0)$ は、

$$C_{VV}(0) = \frac{1-\nu_0}{4 G_0 r_0} \quad (8)$$

図-2は、パラメーターとして、ポアソン比 $\nu_0 = 0, \frac{1}{4}$ のときの無次元円振動数 a_0 に対する静的なコンプライアンスによる動的な複素コンプライアンスを表している。ポアソン比が小さい程、コンプライアンスの値は大きく、無次元円振動数が大きくなるに従って漸次的に減衰している。複素コンプライアンスの実数部は、半無限弾性体のバネ定数を表し、虚数部は、減衰を表している。

図-3に示すように、質量 m 、半径 r である平底円柱を 初速度 V で、半無限弾性体上のフラットな面に圧入衝撃を与えた場合の運動方程式は、

$$m \frac{\partial^2 \delta_a}{\partial t^2} = -V \quad (9)$$

ところで、 V は、半無限弾性体に生じる圧入衝撃力による反力である。定常状態では、(9)式の両辺に $e^{-i\omega t}$ を掛けて 時間 t について Fourier 積分すれば、

$$m \int_0^\infty \frac{\partial^2 \delta_a}{\partial t^2} e^{-i\omega t} dt = - \int_0^\infty V e^{-i\omega t} dt \quad (10)$$

ここで、 $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$ であるから、(10)式は、

$$m \int_0^\infty \frac{\partial^2 \delta_a}{\partial t^2} \cos \omega t dt = - \int_0^\infty V \cos \omega t dt \quad (11)$$

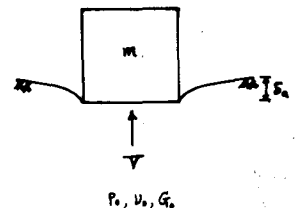


図-3

$$m \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \delta_a}{\partial t^2} \sin pt \, dt = \int_0^{\infty} V \sin pt \, dt \quad (10)$$

(9)式を積分すると、

$$m \left. \frac{\partial \delta_a}{\partial t} \cos pt \right|_0^{\infty} + mp \int_0^{\infty} \frac{\partial \delta_a}{\partial t} \sin pt \, dt = - \int_0^{\infty} V \cos pt \, dt$$

$$-m v_0 + mp \left. \delta_a \sin pt \right|_0^{\infty} - mp^2 \int_0^{\infty} \delta_a \cos pt \, dt = - \int_0^{\infty} V \cos pt \, dt$$

ここで、

$$v_0 = \left. \frac{\partial \delta_a}{\partial t} \right|_{t=0}, \quad \bar{V} = \int_0^{\infty} V \cos pt \, dt, \quad \bar{\delta}_a = \int_0^{\infty} \frac{\partial \delta_a}{\partial t} \cos pt \, dt \quad \text{と}$$

置くと、上式は、

$$m v_0 + mp^2 \bar{\delta}_a = \bar{V} \quad (11)$$

虚数部の項である(10)式を解いても解が求まらない。

(11)式に(6)式を代入すると、圧入衝撃力 $\bar{V}$ は、

$$\bar{V} = \frac{m v_0}{1 - m p^2 C_{rr}} = \frac{m v_0}{1 - m p^2 (C_1 + i C_2)} \quad (12)$$

(12)式をFourier逆変換すると、

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m v_0}{\{1 - m p^2 (C_1 + i C_2)\}} e^{ipt} \, dp \quad (13)$$

$$= \frac{m v_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{ (1 - m p^2 C_1) + i m p^2 C_2 \} (\cos pt + i \sin pt)}{(1 - m p^2 C_1)^2 + (m p^2 C_2)^2} \, dp$$

上式の実数部分を取り出すと、

$$\bar{V} = \frac{m v_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - m p^2 C_1) \cos pt - m p^2 C_2 \sin pt}{(1 - m p^2 C_1)^2 + (m p^2 C_2)^2} \, dp$$

$$= \frac{m v_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - m p^2 C_1) \cos pt}{(1 - m p^2 C_1)^2 + (m p^2 C_2)^2} \, dp$$

半無限弾性体への圧入衝撃力は、

$$V = \frac{m v_0 (G_0 / \rho_0)^{\frac{1}{2}}}{\pi r_0} \int_0^{\infty} \frac{(1 - b a_0^2 C_1) \cos(\lambda a_0)}{(1 - b a_0^2 C_1)^2 + (b a_0^2 C_2)^2} \, da_0 \quad (14)$$

(13)式を(16)式に代入すると、鉛直変位 δ_a は、

$$\delta_a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m v_0 C_{rr}}{1 - m p^2 C_{rr}} e^{ipt} \, dp$$

$$= \frac{m v_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(C_1 + i C_2) \{1 - m p^2 (C_1 + i C_2)\} (\cos pt + i \sin pt)}{\{1 - m p^2 (C_1 + i C_2)\} \{1 - m p^2 (C_1 - i C_2)\}} \, dp$$

上式を実数部分を取り出すと、

$$\delta_a = \frac{m v_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\{C_1 - m p^2 (C_1^2 + C_2^2)\} \cos pt}{(1 - m p^2 C_1)^2 + (m p^2 C_2)^2} \, dp = \frac{m v_0 (G_0 / \rho_0)^{\frac{1}{2}}}{\pi G_0 r_0^2} \int_0^{\infty} \frac{\{C_1 - b a_0^2 (C_1^2 + C_2^2)\} \cos(\lambda a_0)}{(1 - b a_0^2 C_1)^2 + (b a_0^2 C_2)^2} \, da_0 \quad (15)$$

ここで、 $b = \frac{m}{\rho_0 r_0^2}$: 質量比, $\lambda = \frac{t}{r_0} \left(\frac{G_0}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$: 無次元時間

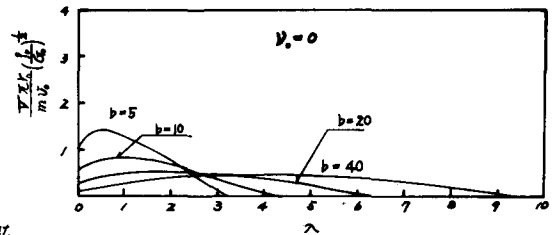


図-4 圧入衝撃力

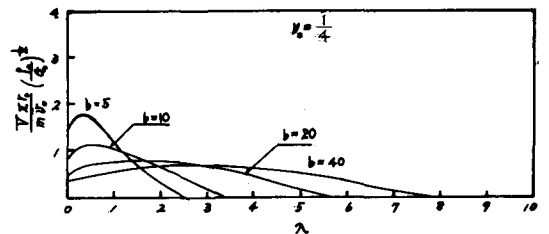


図-5 圧入衝撃力

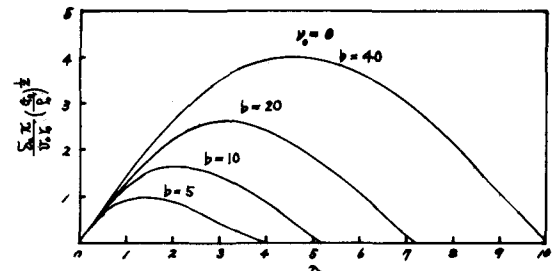


図-6 鉛直変位

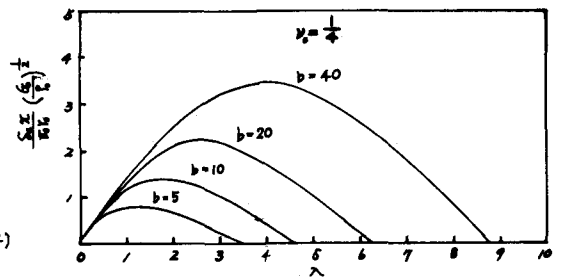


図-7 鉛直変位

3. 数値計算例

数値計算例として、半無限弾性体のポアソン比 ν_0 を0, $\frac{1}{4}$ のときの圧入衝撃力と鉛直変位を求めた。

図-4, 5は、半無限弾性体のポアソン比 $\nu_0=0$, $\frac{1}{4}$ の場合のパラメーターを質量比 $b=5, 10, 20, 40$ とした無次元時間に対する圧入衝撃力を示している。

図-4の結果に対しては、質量比が大きくなるに従って最大圧入衝撃力は、減少するが、衝撃作用時間は長くな

っている。図-5の結果に対しても、図-4と同様な傾向であるが、 ν_0 が大きくなれば最大圧入衝撃力は大きくなるが、衝撃作用時間は短くなっている。 $\nu_0=0$ の場合の圧入衝撃力は、波動伝播が生じないために横方向を拘束した半無限棒の自由端に初速度 v_0 を作用させた場合の衝撃力と同じである。

図-6, 7は、半無限弾性体のポアソン比 $\nu_0=0$, $\frac{1}{4}$ の場合のパラメーターを質量比 $b=5, 10, 20, 40$ とした無次元時間に対する鉛直変位を示している。図-6の結果に対しては、質量比が大きくなるに従って、最大鉛直変位は増大し、さらに、衝撃作用時間も増大する傾向にある。図-7の結果に対しても同様な傾向を示しているが、 ν_0 が大きくなると最大鉛直変位、衝撃作用時間が減少する。

図-8の結果に対しては、ポアソン比 $\nu_0=0$, $\frac{1}{4}$ をパラメーターとして、衝撃作用時間に対する質量比を示している。ポアソン比が小さく、質量比が大きくなるに従って、衝撃作用時間は長くなる。

4. あとがき

以上の数値計算例の結果より次の事が言える。

- i) 半無限弾性体の密度 ρ_0 、剛体の半径 r_0 が一定であれば、質量が大きいと考えることができる。
- ii) 圧入衝撃力については、質量が大きくなる程、最大圧入衝撃力が小さくなり、衝撃作用時間が長くなる。
(このことは、圧入衝撃力を質量 m で割っているから、逆に、質量が大きくなれば、圧入衝撃力が小さな値を示している。) さらに、半無限弾性体のポアソン比が大きくなれば、圧入衝撃力は、多少大きくなっている。
- iii) 鉛直変位については、質量が大きくなる程、最大鉛直変位は大きくなり、さらに、衝撃作用時間は長くなる。
- iv) 衝撃作用時間については、質量が大きい程、半無限弾性体のポアソン比が小さい程、衝撃作用時間は長くなる傾向にある。衝撃作用時間は、質量比とポアソン比とで決定される。

5. 参考文献

- 1) 土と構造物の動的相互作用(土質基礎工学ライブラリー-9) 土質工学会編
- 2) 宮本博著: "三次元弾性論"
- 3) Bycroft, G.N.: "Impact of a Rigid Body on an Elastic Half Space" Journal of Applied Mechanics. Transactions of ASME. June. 1977.
- 4) Lysmer, J. and Richart, F.E., "Dynamics Response of Footings to Vertical Loading." Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, Proceedings, ASCE, Jan. 1966.
- 5) Luco, J.E. and Westmann, R.A.: "Dynamic Response of Circular Footings." Journal of Engineering Mechanics Division, Proceedings, ASCE, Oct. 1971.
- 6) Veletsos, A.D., and Wei, Y.T., "Lateral and Rocking Vibration of Footings," Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, Proceedings, ASCE Sept., 1971

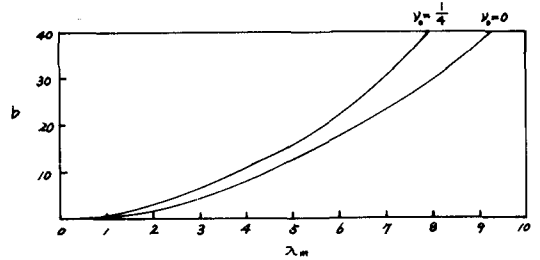


図-8 衝撃作用時間