

I — 2 厚肉球殻のスタンプの近似解析について

北見工業大学 正員 奥村 勇

北見工業大学 正員 尾中孝美

櫻田機械工業 工藤智紀

1. まえがき

軸対称問題としての中実球、厚肉球殻及び無限体中の球からの第1種及び第2種の境界値問題は、3次元弾性論の書物において良く見受けられる所であるが、厚肉球殻の混合境界値問題の1つであるスタンプの解析は、あまり見受けられないようである。

本研究は、厚肉球殻の外表面の1部が変位成分によって規定され、他の部分及び内表面が応力成分によって規定されたスタンプの解析を近似解法により行ったものである。ここで用いた近似解法は、厚肉球殻の内部の変位端・応力端及び内表面における境界条件は、3次元弾性解により厳密に満たされ、外表面のスタンプの境界条件のみが近似的に満たされる半解析方法である。前回は、同じ手法により、中実球のスタンプの解析について報告したが、今回は、それを厚肉球殻のスタンプの解析に発展させたものである。

2. 球座標系における軸対称問題の解

球座標系 (r, θ, φ) における物体力が無い場合のつり合い方程式の解は、軸対称変形に限定すると、次のように表わされる。

$$\text{第1基本解: } 2G u_r' = 2G [u_r', u_\theta', 0] = \text{grad } \phi \cdots \cdots (1a)$$

ここで、

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \nabla^2 \equiv \partial^2 / \partial r^2 + (2/r) \partial / \partial r + (1/r^2) \partial^2 / \partial \theta^2 + (\cot \theta / r^2) \partial / \partial \theta \cdots \cdots (1b)$$

$$\text{第3基本解: } 2G u_r^3 = 2G [u_r^3, u_\theta^3, 0] = \text{grad } (r\lambda) - 4(1-\nu)\lambda$$

$$= \text{grad } (r\lambda_r) - 4(1-\nu)[\lambda_r, \lambda_\theta, 0] \cdots \cdots (2a)$$

ここで、

$$\lambda_r = -r \frac{\partial}{\partial r} \int \lambda_\theta d\theta, \quad \nabla^2 \lambda_\theta = \frac{\lambda_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial \lambda_\theta}{\partial r} = 0 \cdots \cdots (2b)$$

ただし、式(1a)及び式(2a)における G 及び ν は、それぞれ、せん断弾性係数及びポアソン比を表わすものとする。求める解は、上の2つの基本解を加えたものであり、次式で表わされる。

$$2G u = 2G [u_r, u_\theta, 0] = 2G (u_r' + u_r^3) = 2G [u_r' + u_r^3, u_\theta' + u_\theta^3, 0] \cdots \cdots (3)$$

式(1a)及び式(2b)より、変位ポテンシャルは、次式のように求められる。

$$\phi = \sum_{n=2}^{\infty} r^n A_n P_n(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} D_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) \cdots \cdots (4)$$

$$\lambda_r = \sum_{n=2}^{\infty} r^{n+1} (\pi+1) E_n P_n(\mu) - \sum_{n=2}^{\infty} \pi C_n r^{-n} P_n(\mu), \quad \lambda_\theta = \sum_{n=2}^{\infty} r^{n+1} E_n \sin \theta P_n'(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} C_n r^{-n} \sin \theta P_n'(\mu) \cdots \cdots (5)$$

ここで、 $\mu \equiv \cos \theta$ であり、また、 $A_n, \dots, C_n$ は、境界条件によって定められるべき未知定数である。

式(4)及び式(5)に示した変位ポテンシャルを、それぞれ、式(1a)及び式(2a)に代入して、式(3)を用いると、変位成分は、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} 2G u_r &= \sum_{n=2}^{\infty} r^{n+1} A_n \pi P_n(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} r^{n+1} E_n (\pi+1) (\pi-2+4\nu) P_n(\mu) - 2(1-2\nu) E_0 r \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} r^{-(n+2)} D_n (\pi+1) P_n(\mu) - D_0 r^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} r^{-n} C_n \pi (\pi+3-4\nu) P_n(\mu) \\ 2G u_\theta &= \sum_{n=2}^{\infty} r^{n+1} A_n \sin \theta P_n'(\mu) - \sum_{n=2}^{\infty} r^{n+1} E_n (\pi+5-4\nu) \sin \theta P_n'(\mu) \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} r^{-(n+2)} D_n \sin \theta P_n'(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} r^{-n} C_n (\pi-4+4\nu) \sin \theta P_n'(\mu) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (6)$$

また、応力成分は、上の変位成分よりひずみ成分を求め、球座標系における Hooke の応力-ひずみ関係式を用

いると、例えば、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} A_n n(n-1) P_n(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n E_n (n+1)(n^2-n-2-2\nu) P_n(\mu) - 2(1+\nu) E_0 \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} r^{-(n+3)} D_n (n+1)(n+2) P_n(\mu) + 2D_0 r^{-3} - \sum_{n=1}^{\infty} r^{-(n+1)} C_n n(n^2+3n-2\nu) P_n(\mu) \\ \sigma_{r\theta} &= - \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} A_n (n-1) \sin \theta P_n'(\mu) - \sum_{n=1}^{\infty} r^n E_n (n^2+2n-1+2\nu) \sin \theta P_n'(\mu) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} r^{-(n+3)} D_n (n+2) \sin \theta P_n'(\mu) - \sum_{n=1}^{\infty} r^{-(n+1)} C_n (n^2+2+2\nu) \sin \theta P_n'(\mu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

3. 線荷重を受けた時の解

図-1に示したように、外半径 R_2 の厚肉球殻の外表面の $\theta = \theta_0$ と $\theta = \pi - \theta_0$ との円周上に分布する線垂直荷重を $i(\theta)$ で表わし、また、図-2に示したように、外表面の $\theta = \theta_0$ と $\theta = \pi - \theta_0$ との円周上に分布する線せん断荷重を $j(\theta)$ で表わすと、これらは、次のように Legendre 展開される。

$$i(\theta) = e_0 + \sum_{n=2}^{\infty} e_n P_n(\mu), \quad j(\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} d_n \sin \theta P_n'(\mu) \dots\dots (8)$$

そこで、

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= p_0 \sin \theta_0 / R_2, \quad e_n = p_0 \sin \theta_0 (2n+1) P_n(\cos \theta_0) / R_2 \\ d_n &= q_0 \sin \theta_0 \{ P_{n-1}(\cos \theta_0) - P_{n+1}(\cos \theta_0) \} / R_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (9)$$

いま、内表面 $r = R_1$ には外力が作用せず、外表面において、式(8)の外力を受けた厚肉球殻を考えると、境界条件は、次式となる。

$$r = R_1 \text{ において, } \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \dots\dots (10a)$$

$$r = R_2 \text{ において, } \sigma_{rr} = -i(\theta), \quad \sigma_{r\theta} = j(\theta) \dots\dots (10b)$$

式(10a)及び式(10b)の境界条件を、式(7)の応力成分に課すると、未知定数 $A_n, \dots, C_n$ が次式のように定められる。

$$\begin{aligned} A_n &= G \sin \theta_0 / \{ R_2^{n-2} (n-1) \Delta_n \} \{ \bar{p}_0 (2n+1) P_n(\cos \theta_0) \{ \delta_n \\ &\quad \cdot \{ n\kappa_n - (n+1) \eta_n \} (\rho^{2-n} - \rho^{n+5}) - \eta_n (n+1) (\zeta_n + \delta_n) \\ &\quad \cdot (\rho^{n+5} - \rho^{n+3}) \} - \bar{p}_0 (n+1) \{ P_{n-1}(\cos \theta_0) - P_{n+1}(\cos \theta_0) \} \\ &\quad \cdot \{ \zeta_n \{ n\kappa_n - (n+1) \eta_n \} (\rho^{2-n} - \rho^{n+5}) + n\kappa_n (\zeta_n + \delta_n) \\ &\quad \cdot (\rho^{n+5} - \rho^{n+3}) \} \} \dots\dots\dots (11a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n &= G \sin \theta_0 / \{ R_2^n \Delta_n \} \{ \bar{p}_0 (2n+1) P_n(\cos \theta_0) \{ \eta_n (2n+1) (\rho^{2-n} - \rho^{n+1}) + n(\eta_n + \kappa_n) (\rho^{n+3} - \rho^{2-n}) \} + \bar{p}_0 \\ &\quad \cdot n \{ P_{n-1}(\cos \theta_0) - P_{n+1}(\cos \theta_0) \} \{ \kappa_n (2n+1) (\rho^{2-n} - \rho^{n+1}) + (n+1) (\eta_n + \kappa_n) \\ &\quad \cdot (\rho^{n+3} - \rho^{2-n}) \} \} \dots\dots\dots (11b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_n &= G \sin \theta_0 R_1^{n+3} / \{ (n+2) \Delta_n \} \{ \bar{p}_0 (2n+1) P_n(\cos \theta_0) \{ \eta_n \delta_n (\eta_n + \kappa_n) (1-\rho^2) - \eta_n \{ (n+1) \zeta_n \\ &\quad - n\delta_n \} (\rho^2 - \rho^{2n+1}) \} - \bar{p}_0 n \{ P_{n-1}(\cos \theta_0) - P_{n+1}(\cos \theta_0) \} \{ (n+1) \zeta_n (\eta_n + \kappa_n) (1-\rho^2) \\ &\quad + \kappa_n \{ (n+1) \zeta_n - n\delta_n \} (\rho^2 - \rho^{2n+1}) \} \} \dots\dots\dots (11c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &= G \sin \theta_0 R_1^{n+1} / \Delta_n \{ \bar{p}_0 (2n+1) P_n(\cos \theta_0) \{ \delta_n (2n+1) (1-\rho^2) + \{ (n+1) \zeta_n - n\delta_n \} (\rho^{2n+3} - \rho^2) \} \\ &\quad + \bar{p}_0 (n+1) \{ P_{n-1}(\cos \theta_0) - P_{n+1}(\cos \theta_0) \} \{ \{ (n+1) \zeta_n - n\delta_n \} (\rho^{2n+3} - \rho^2) - \zeta_n (2n+1) \\ &\quad \cdot (1-\rho^2) \} \} \dots\dots\dots (11d) \end{aligned}$$

$$E_0 = \frac{-G \bar{p}_0 \sin \theta_0}{2(1+\nu)(\rho^3-1)}, \quad D_0 = \frac{-G R_1^3 \bar{p}_0 \sin \theta_0}{2(\rho^3-1)} \dots\dots\dots (11e)$$

そこで、

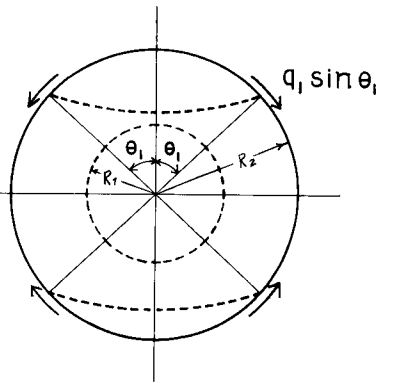
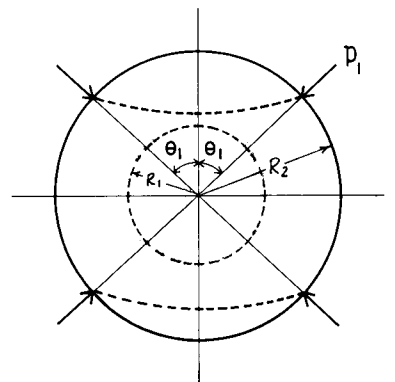


図-2 線せん断荷重を受ける厚肉球殻

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= n^2 + 2n - 1 + 2\nu, \quad \eta_n = n^2 - 2 + 2\nu, \quad \zeta_n = n^2 - n - 2 - 2\nu, \quad \kappa_n = n^2 + 3n - 2\nu \\ \Delta_n &= (\rho^{2n+3} - 1)(\rho^{2-n} - \rho^{n+1}) \{ (n+1)\zeta_n - n\delta_n \} + \{ (n+1)\eta_n - n\kappa_n \} - (1-\rho^2)(\rho^{n+3} - \rho^{n+1}) \\ &\quad \cdot n(n+1)(\eta_n + \kappa_n)(\zeta_n + \delta_n) \\ \bar{p}_e &= p_e / (GR_2), \quad \bar{q}_e = q_e / (GR_2), \quad \rho = R_1 / R_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

いま、厚肉球殻の外表面の $0 < \theta \leq \theta_0$ の区間に線荷重 p_e が L 個及び線せん断荷重 $q_e \sin \theta_e$ が L 個作用している場合を考えると、その解は、 $\theta = \theta_e$ ($0 < \theta_e \leq \theta_0$) に 1 個の線荷重が作用している時の解、すなわち、式 (11a) から式 (11e) の未知定数を式 (6) 及び式 (7) に代入した時の解を L 個重ね合わせることにより得られ、式 (6) 及び式 (7) に $\sum_{e=1}^L$ を付すことになる。

4. スタンプの境界条件

図-3 に示した厚肉球殻のスタンプの境界条件は、次の通りである。

$$r = R_1 \text{ において, } \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad \dots \dots \dots (13)$$

$$r = R_2, \quad 0 \leq \theta < \theta_0 \text{ において,}$$

$$u_r = -R_2(\mu - \cos \theta_0)\mu, \quad u_\theta = R_2(\mu - \cos \theta_0)\sin \theta \quad \dots \dots (14a)$$

$$r = R_2, \quad \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0 \text{ において, } \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad \dots \dots (14b)$$

$$r = R_2, \quad \pi - \theta_0 < \theta \leq \pi \text{ において,}$$

$$u_r = -R_2(\mu + \cos \theta_0)\mu, \quad u_\theta = R_2(\mu + \cos \theta_0)\sin \theta \quad \dots \dots (14c)$$

式 (13) 及び式 (14b) の境界条件は、式 (11a) から式 (11e) の解においてすべて満足されている。なぜなら、式 (11a) から式 (11e) は、 $r = R_1$ において $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0$ の条件及び $0 < \theta \leq \theta_0$ の区間の $\theta = \theta_e$ のみに線荷重が作用している条件を用いて求めた解であるからである。図-3

に示したように、 $z = 0$ に関して、上、下対称であるので、式 (14a) の境界条件について考える。

式 (6) の変位成分に、式 (14a) の境界条件を課すると、次式が得られる。

$$(R_2/2G) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n(\cos \theta) \{ R_2^{-n-2} A_n n + R_2^{-n} E_n (n+1)(n-2+4\nu) - R_2^{-(n+3)} D_n (n+1) - R_2^{-(n+1)} C_n n(n+3-4\nu) \} - (R_2/2G) \{ 2(1-2\nu) \sum_{n=0}^{\infty} E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_2^{-3} D_0 \} = -R_2(\cos \theta - \cos \theta_0) \cos \theta \quad \dots \dots (15a)$$

$$- (R_2/2G) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sin \theta P_n'(\cos \theta) \{ R_2^{-n-2} A_n + R_2^{-n} E_n (n+5-4\nu) + R_2^{-(n+3)} D_n - R_2^{-(n+1)} C_n \cdot (n-4+4\nu) \} = R_2(\cos \theta - \cos \theta_0) \sin \theta \quad \dots \dots (15b)$$

上の 2 つの方程式に式 (11a) から式 (11e) を代入して整理して示すと、線荷重の強度 $\bar{p}_e$ 及び $\bar{q}_e$ を定める連立方程式が次のように得られる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e a_{11} \bar{p}_e + e a_{12} \bar{q}_e) = (\cos \theta - \cos \theta_0) \cos \theta, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (e a_{21} \bar{p}_e + e a_{22} \bar{q}_e) = -(\cos \theta - \cos \theta_0) \sin \theta \quad \dots \dots (16)$$

ここで、例えば、

$$\begin{aligned} e a_{11} &= \sin \theta_e \{ \{ 2(1-2\nu) + \rho^3(1+\nu) \} / \{ 4(1+\nu)(1-\rho^3) \} + \sum_{n=2}^{\infty} P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta_e) (2n+1) / (2Gn) \\ &\quad \{ n/(n-1) [\eta_n(n+1)(\zeta_n + \delta_n)(\rho^{n+5} - \rho^{n+3}) - \delta_n \{ n\kappa_n - (n+1)\eta_n \} (\rho^{2-n} - \rho^{n+5})] \\ &\quad + (n+1)(n-2+4\nu) \{ \eta_n(2n+1)(\rho^{n+1} - \rho^{2-n}) + n(\eta_n + \kappa_n)(\rho^{2-n} - \rho^{n+3}) \} + (n+1)/(n+2) \\ &\quad \cdot [n\delta_n(\eta_n + \kappa_n)(\rho^{n+3} - \rho^{n+5}) - \eta_n \{ (n+1)\zeta_n - n\delta_n \} (\rho^{n+5} - \rho^{3n+4})] + n(n+3-4\nu) \{ \delta_n(2n+1) \\ &\quad \cdot (\rho^{n+3} - \rho^{n+1}) + \{ (n+1)\zeta_n - n\delta_n \} (\rho^{n+3} - \rho^{3n+4}) \}] \} \cdot \dots \dots (17a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e a_{12} &= -\sin \theta_e \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1)/(2Gn) P_n(\cos \theta) \{ P_{n-1}(\cos \theta_e) - P_{n+1}(\cos \theta_e) \} \{ \{ \zeta_n \{ n\kappa_n - (n+1) \\ &\quad \cdot \eta_n \} (\rho^{n+5} - \rho^{2-n}) + n\kappa_n(\zeta_n + \delta_n)(\rho^{n+3} - \rho^{n+5}) \} / (n-1) + (n-2+4\nu) \{ \kappa_n(2n+1)(\rho^{2-n} \\ &\quad - \rho^{n+1}) + (n+1)(\eta_n + \kappa_n)(\rho^{n+3} - \rho^{2-n}) \} + \{ (n+1)\zeta_n(\eta_n + \kappa_n)(\rho^{n+3} - \rho^{n+5}) + \kappa_n \\ &\quad \cdot \{ (n+1)\zeta_n - n\delta_n \} (\rho^{n+5} - \rho^{3n+4}) \} / (n+2) + (n+3-4\nu) \{ \{ (n+1)\zeta_n - n\delta_n \} (\rho^{2n+4} \\ &\quad - \rho^{n+3}) - \zeta_n(2n+1)(\rho^{n+1} - \rho^{n+3}) \} \} \cdot \dots \dots (17b) \end{aligned}$$

式(16)は、 $0 \leq \theta < \theta_0$ の区間における任意の θ に関して満足すべきものであるが、近似的に、 $0 + \varepsilon \leq \theta_k \leq \theta_0$ ($k=1, 2, \dots, L$) の区間の θ_k の各点において満足するものとし、 $2L$ 連立 1 次方程式を解いて L 個の $\bar{p}_k$ 及び $\bar{g}_k$ を数値的に定め、それらを式(6)から式(11c)に代入して、変位成分及び応力成分を数値的に求めることになる。

5. 数値計算例

数値計算例として、 $\rho = R_1/R_2 = 0.6$ 、 $\nu = 0.25$ 及び $\theta_0 = \pi/16$ を持った厚肉球殻を取り扱った。また、 $\varepsilon = 0.005$ 、 $L = 80$ 、 $n = 2, 4, \dots, 200$ を用いた。数値計算結果を図-4から図-8に示した。

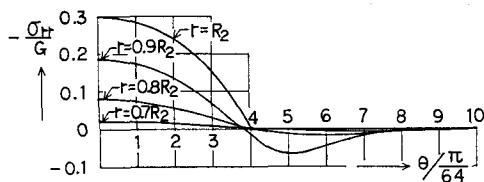


図-4 σ_{rr} の分布

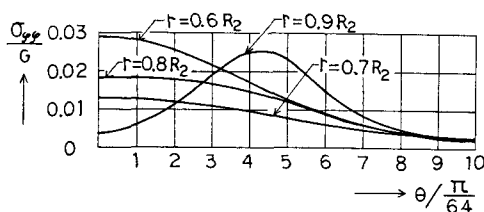


図-6 $\sigma_{\varphi\varphi}$ の分布

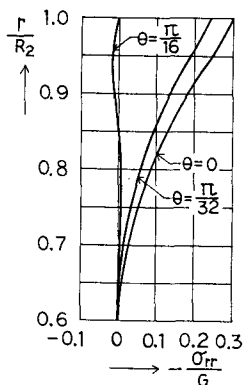


図-7 σ_{rr} の r 方向の分布

6. あとがき

厳密な解析が困難とされている厚肉球殻のスタンプの解析を、変位成分に関する境界条件のみが近似的に満たされる 1 つの半解析法により行った。厚肉球殻の外表面近く*

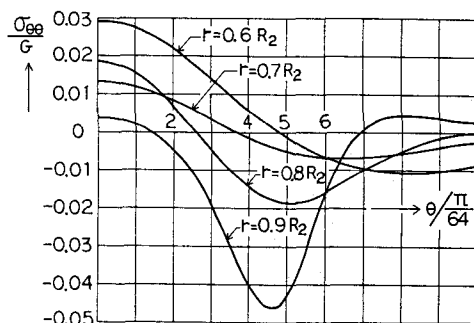


図-5 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布

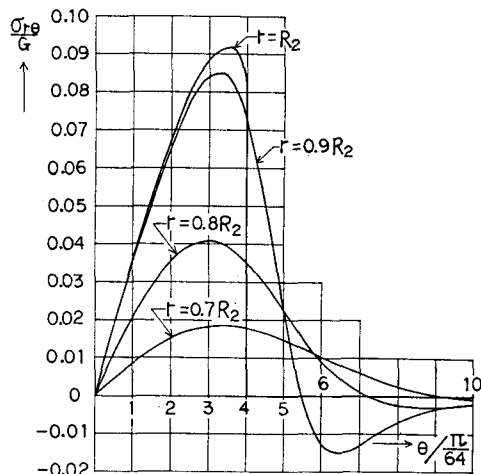


図-8 $\sigma_{r\theta}$ の分布

* の応力の値は、前回報告した中実球のスタンプの表面近くの応力の値とほぼ同じ傾向を示しており、数値計算結果は、妥当なものと考えられる。図-8に示した $\sigma_{r\theta}$ のスタンプの境界 ($r=R_2$, $\theta=\theta_0=\pi/16$) における値は、相當に精密な計算を行ったがやはり、不連続性を示すようである。