

II-18 洪水時における水位～流量曲線に関するフィルター理論の適用

北海道大学工学部 正員 星 清
 北海道大学工学部 正員 山岡 勲
 北海道大学工学部 学生員 ○ 工藤 康正

1. はじめに

近年、洪水時の流量観測のデータが蓄積されつつある。その背景には次のような理由があげられる。(1) 理論的に進められてきた河床形態と流体抵抗との相互関係を実際の河川で実証する¹⁾

(2) 種々の河床形状に対する抵抗則が既知であれば、粗度係数予測法を確立することによって合理的な水位～流量曲線を設定する。従来、洪水時の流量は低水時の流量観測に基づいて作製された水位～流量曲線を補間して推定されてきたが、以上の研究動向は従来の流量推定法の改良を示唆している。

本報告では、洪水時に抵抗則が変化することを前提に、水理量と平均流速式を規定するパラメータを Kalman filter 理論を用いて同定し、流量推定が可能かどうかの基礎的検討を行なう。理論の適用にあたっては、月形橋における昭和56年8月洪水時の水位記録と流量観測データを用いる。

2. 基礎方程式

不定流の運動方程式と連続式は (1)、(2) 式で与えられる。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} - i + \frac{\partial y}{\partial x} + S_f = 0 \quad \dots (1) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial (Fv)}{\partial x} = 0 \quad \dots (2)$$

ここで、 t : 時間, x : 距離, v : 平均流速, i : 河床勾配, S_f : 摩擦勾配, y : 水深, F : 流積, g : 重力加速度。(1) 式は (2) 式の関係式を用いると次式に変形される。

$$(F \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial F}{\partial t}) + gF(-i + \frac{\partial y}{\partial x} + S_f) - v^2 \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \dots (3)$$

水理量と流路の幾何学的形状特性値との間に次式が成立することはよく知られている。

$$R = b_1 F^{c_1} \quad \dots (4) \quad y = b_2 F^{c_2} \quad \dots (5) \quad v = a_1 R^{a_2} S_f^{a_3} \quad \dots (6)$$

ここで、 R : 径深, a_i, b_i, c_i : パラメータ。洪水時には堆積と洗掘が流路内でくりかえされ、横断面形状も変化しているが、ここでは洪水前後でその変化率は無視できるものとする。すなわち、パラメータ b_1, b_2, c_1, c_2 は洪水期間中一定とし、横断測量図から決定できるものとする。

次に、パラメータ a_1, a_2, a_3, S_f は新しい観測値情報 (水位ないし流量) が入手できるまでは一定値が伝達されるものとして、(4)～(6) 式の関係式を (3) 式に代入すれば (7) 式が得られる。

$$\frac{dF}{dt} = f_1(F, a_1, a_2, a_3, S_f, dy/dx) \quad \dots (7a)$$

$$= \frac{1}{1 - c_1 a_2} \{ g a_1^{-1} b_1^{-a_2} S_f^{-a_3} F^{1-c_1 a_2} (-i + \frac{dy}{dx} + S_f) - a_1 b_2^{-1} c_2^{-1} b_1^{a_2} S_f^{a_3} F^{1-c_2+c_1 a_2} \frac{dy}{dx} \} \quad \dots (7b)$$

(7b) 式は流積 F に関する非線形方程式であるが、(7a) 式に示される F の初期値と他の5個のパラメータの値が既知の場合には、なんらかの数値解法によって (7b) 式を F について解くことができる。流積 F の推定値が得られれば、それに対応して水位 (h) と流量 (Q) はそれぞれ、(8)、(9) 式によって推定される。

$$h = y + z = b_2 F^{c_2} + z \quad \dots (8) \quad Q = vF = a_1 b_1^{a_2} F^{1+c_1 a_2} S_f^{a_3} \quad \dots (9)$$

ここで、 z :河床高

3. Kalman filter 理論²⁾

Kalman filter 理論の実問題への適用にあたっては、まずシステム方程式と観測値方程式を明確に定義する必要がある。 ついで状態変数の設定が重要となる。 流積 F の時間変動がわかれば、

(8)式により水位 h の将来予測が可能であり、 F と流速 v が推定できれば流量 Q の予測も (9)式によりできる。 したがって、次の6変数を状態変数として設定した。

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T = [F \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ S_f \ dy/dx]^T \quad \dots\dots(10)$$

ここで、 T は行列ないしベクトルの転置を表す。 $x_6 (= dy/dx)$ は必ずしも洪水時に観測できない量ではないが、その時間変化をとらえようとするは大変な労力が必要となろう。 したがって、ここでは状態変数の一つに加えた。 F を除く他の5個のパラメータの時間挙動を把握することは現実問題としてほとんど不可能である。 したがって、これらの諸量の時間変化は random walk に従っているものとする。 たとえば、 x_2 に関しては $dx_2/dt = 0$ とする。 (10)式の状態変数を (7)式に代入して (11)～(13)式を得る。 (11)式は状態変数に関するベクトル表示である。

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$f_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \quad \dots\dots(12) \quad f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 0 \quad \dots\dots(13)$$

実際の計算にあたっては (11)式を離散表示した方が便利である。 Δt を微小時間間隔として (11)式を Δt の2次の項まで Taylor 級数展開すると

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\Delta t + \mathbf{A}(\mathbf{x}_k)\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)(\Delta t)^2/2 + \mathbf{m}_k \quad \dots\dots(14)$$

ここで、

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}(t+\Delta t) \quad \dots\dots(15a) \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t) \quad \dots\dots(15b) \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}_k) = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x} |_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_k} \quad \dots\dots(16)$$

また、 $\mathbf{m}_k$ はモデリング誤差と (11)式の離散化誤差であり、 $[6 \times 1]$ 行列である。 $\mathbf{m}_k$ の要素は互いに独立な正規性ノイズとし、次の統計的性質を仮定する。

$$E(\mathbf{m}_i) = 0 \quad \dots\dots(17) \quad E(\mathbf{m}_i \mathbf{m}_j^T) = \mathbf{M}_i \delta_{ij} \quad \dots\dots(18)$$

ここで、 E :期待値演算子、 δ_{ij} :クロネッカーデルタ。 (14)式がここで採用するシステム方程式である。 水位は現在ではほぼ定時観測がなされている。 洪水期間の流量観測は数の上ではまだ少ないとはいえ、洪水予報の観点では貴重な情報源となる。 そこで、水位観測に流量観測を加味した観測値方程式の定式化を行なう。 状態変数を用いた観測値方程式のベクトル表示が (19)式であり、それぞれのベクトルの要素が (20)～(24)式に示されている。 y_k は時刻 k における水位と流量の観測値、 $\mathbf{n}_k$ はそれぞれの誤差である。 $\mathbf{n}_k$ は正規性白色ノイズとし、(25)、(26)式を仮定する。

(23)、(24)式はそれぞれ、(8)、(9)式を状態変数で表現したにすぎない。

$$y_k = g(\mathbf{x}_k) + n_k \quad \dots\dots(19)$$

$$y_k = [h_k \ Q_k]^T \quad \dots\dots(20) \quad \mathbf{n}_k = [n_1 \ n_2]^T \quad \dots\dots(21) \quad g(\mathbf{x}_k) = [g_1(\mathbf{x}_k) \ g_2(\mathbf{x}_k)]^T \quad \dots\dots(22)$$

$$g_1(\mathbf{x}_k) = b_2 x_1^2 + z \quad \dots\dots(23) \quad g_2(\mathbf{x}_k) = x_2 b_1 x_3^{1+c_1} x_4 x_5 \quad \dots\dots(24)$$

$$E(\mathbf{n}_i) = 0 \quad \dots\dots(25) \quad E(\mathbf{n}_i \mathbf{n}_j^T) = \mathbf{N}_i \delta_{ij} \quad \dots\dots(26)$$

採用システム方程式は非線形となるので非線形 Kalman filter 理論を適用して状態変数の更新を行なう。 その解法 algorithmを表-1に示した。 ここで採用した Kalman filter 理論は 2nd-order filterとして知られている。^{3,4)} その理由は関数 $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ の2次微分を利用するからである。 表中の Ψ_k と Π_k は補正関数で方程式の線形化に伴う誤差の拡大をおさえる役割をはたしている。 また、表中の $\hat{\mathbf{x}}_k(-)$ と $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$ はそれぞれ、時刻 k において観測値の情報が入る前と後の状態変数推定値を意

味する。同様に、 $P_k(-)$ と $P_k(+)$ はその時点での推定値誤差共分散である。(13)式に示されるように、関数 f のうち、 f_2 から f_6 までは零である。したがって、状態変量外挿補間式 (State Extrapolation) においては、 $x_1 (= F)$ のみが増加し、他の5個の状態変量は一定値が伝達されるので、スカラー計算となる。それに伴ない補正関数 Ψ_k はスカラーとなる。

4. 適用例

以上述べた方法論を月形橋における昭和56年8月洪水資料に適用した例を示す。洪水直後の横断測量図に基づいて低水路断面で決定した (4)、(5) 式のパラメータの値は $b_1 = 0.031$, $c_1 = 0.758$, $b_2 = 0.027$, $c_2 = 0.815$ である。これらの値は水位が上昇して高水敷に達した場合にも拡張解釈して使用した。河床勾配 i 、河床高 z はそれぞれ、 $i = 1/2500$, $z = 1.1$ m とした。

Kalman filter 理論の実際問題への適用にあたっては状態変量の初期値 $\hat{x}_0$ 、その誤差共分散行列、 P_0 、システム方程式誤差共分散行列 M_k 、および観測値誤差共分散行列 N_k の入力が必要となる。流積の初期値は初期水位 4.58 m から (5) 式を用いて $F = 396.8$ m² とした。他の状態変量の初期値は次のように設定した。すなわち、 $a_1 = 28.9$, $a_2 = 2/3$, $a_3 = 1/2$, $S_F = 1/2500$, $dy/dx = 0$ である。共分散行列のすべてを対角行列として、 P_0 と M_k に関しては状態変量初期値を 100 で割った値を、 N_k については水位観測値誤差分散を 0.01 m²、流量観測値誤差分散を 10000 m⁶/sec² として入力した。

計算にあたっては次の3ケースの数値実験を行なった。すなわち、(1) 水位観測値のみを用いて6個の状態変量の更新を行ない流量を推定する方法。このとき、水位は1時間毎に観測されるものとした。(2) 洪水後に再設定された水位～流量曲線から流量を計算して6時間毎に流量観測値の情報を入力する方法。この方法では6時間毎に水位と流量観測値の両方が状態変量の同定および水位の将来予測に活用される。(3) 月形橋ではこの洪水期間中8回の流量観測がなされた。このうち、6個の流量観測値と1時間毎の水位観測値を観測値方程式にとり入れる方法。解析結果の考察では、上述した3手法をそれぞれ、Method 1、Method 2、Method 3と便宜上呼ぶことにする。

図-1 ～ 図-3 にはそれぞれの方法による非線形 Kalman filter 理論の適用結果が示されている。図中の破線は実測水深 (河床高 $z = 1.1$ m)、実線は推定 hydrograph、一点鎖線は実測水位と1時間先水位予測値との差、×印は洪水期間中の6個の流量観測値である。実測水位と推定水位との差

Table 1

Algorithms of the second-order Kalman filter

System Model	$x_{k+1} = x_k + f(x_k)\Delta t + A(x_k)f(x_k)\frac{(\Delta t)^2}{2} + m_k$
Measurement Model	$y_{k+1} = g(x_{k+1}) + n_{k+1} \quad n_{k+1} \rightarrow N(0, N_{k+1})$
Initial Condition	$x_0 \rightarrow N(\hat{x}_0, P_0)$
State Extrapolation	$x_{k+1} = x_k + f(x_k)\Delta t + A(x_k)f(x_k)\frac{(\Delta t)^2}{2} + \Psi_k$ $t_k \leq t < t_{k+1}$ $\hat{x}_{k+1}(-) = x_{k+1} \quad \text{at } t = t_{k+1}$
Error Covariance Extrapolation	$\Psi_k = \frac{\Delta t}{2} \text{tr}[B(x_k)P_k]$ $\left. \begin{aligned} P_{k+1} &= \Phi_k P_k \Phi_k^T + M_k \\ \Phi_k &= I + A(x_k)\Delta t + A^2(x_k)\frac{(\Delta t)^2}{2} \end{aligned} \right\} t_k \leq t < t_{k+1}$ $P_{k+1}(-) = P_{k+1} \quad \text{at } t = t_{k+1}$
State Update	$\hat{x}_{k+1}(+) = \hat{x}_{k+1}(-) + K_{k+1} \{ y_{k+1} - g[\hat{x}_{k+1}(-)] - \Pi_{k+1} \}$ $\Pi_{k+1} = \frac{1}{2} \text{tr}[D_{k+1}P_{k+1}(-)]$
Gain Matrix	$K_{k+1} = P_{k+1}(-)C_{k+1}^T [C_{k+1}P_{k+1}(-)C_{k+1}^T + N_{k+1}]^{-1}$
Error Covariance Update	$P_{k+1}(+) = (I - K_{k+1}C_{k+1})P_{k+1}(-)$
Definitions	$A(x_k) = \partial f / \partial x _{x=x_k}, \quad B(x_k) = \partial^2 f / \partial x \partial x _{x=x_k}$ $C_k = \partial g / \partial x _{x=\hat{x}_k(-)}, \quad D_k = \partial^2 g / \partial x \partial x _{x=\hat{x}_k(-)}$ $\text{tr} = \text{trace}, \quad I = \text{unit matrix}$

は時間変動をみるかぎりほぼ同程度である。Method 3 においては、流量観測値がフィルター理論に組み込まれているので、当然のことながら実測流量と推定流量の適合度がとくに hydrograph 下降部で顕著である。Method 1 と Method 2 においても推定流量は実用上十分な精度で実測流量を再現している。ピーク流量推定値 (生起時刻 $t = 51 \text{ hr}$ で最高水位 $h = 16.99 \text{ m}$) を比べると、Method 1 では $7820 \text{ m}^3/\text{sec}$ 、Method 2 では $8740 \text{ m}^3/\text{sec}$ 、Method 3 では $8330 \text{ m}^3/\text{sec}$ となり、Method 2 が一番大きい推定値を与えている。ここで注目すべきことは Method 1 と Method 3 のピーク流量推定値の差、すなわち、約 $500 \text{ m}^3/\text{sec}$ である。両手法の最大の相異点は hydrograph 上昇部において、Method 3 は 33 時間目で流量観測値と水位観測値を状態変量の update に使い、他の時間では Method 1 と同様に 1 時間毎に水位観測値を filter 理論適用にとり入れていることである。Method 2 では、1 時間毎の水位観測値のほかに 6 時間毎に流量観測値 (洪水後に再計算された水位～流量曲線から算定) が入力されているためにピーク流量が大きく推定されたことになる。したがって、洪水生起時、とくに水位上昇期には少なくとも 2 回の流量観測が行なえればピーク流量推定の精度を大幅に高めることが可能となる。

Kalman filter 理論は水位・流量予測のほかに 6 個の状態変量 (ここでは、(6) 式の平均流速を規定するパラメータ a_1, a_2, a_3 , 摩擦勾配 S_f , 水深勾配 dy/dx) のオンライン同定ができる特徴をもつ。したがって、これらの状態変量がどのような時間挙動するかが興味の対象となる。6 個の状態変量の時間変動をそれらの初期値 ($a_1 = 28.9, a_2 = 2/3, a_3 = 1/2, S_f = 1/2500, dy/dx = 0$) との変化率で表示する。ただし、 dy/dx については S_f との比で計算した。Method 1 ではどの状態変量についてもその変化率は非常に小さい。すなわち、等流流速とはほぼ等しい結果であった。しかしながら、パラメータの初期値を用いて最高水位 ($h = 17 \text{ m}$) に対応する流量を

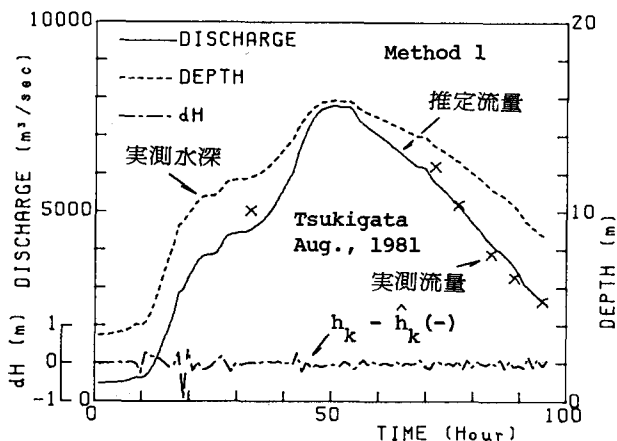


Fig. 1 Filter performance by Method 1

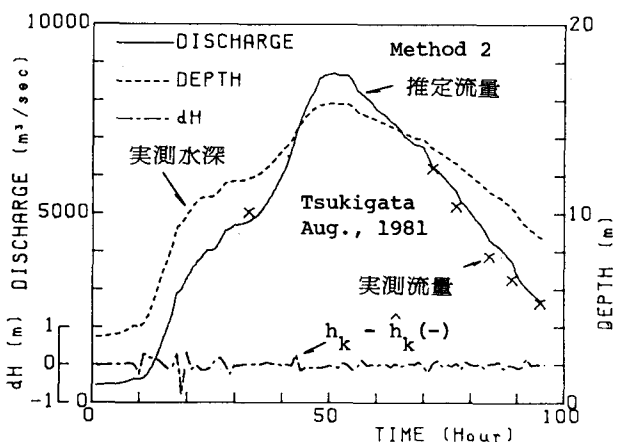


Fig. 2 Filter performance by Method 2

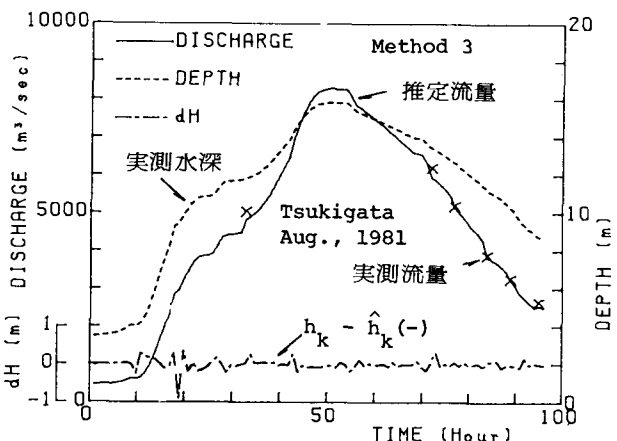


Fig. 3 Filter performance by Method 3

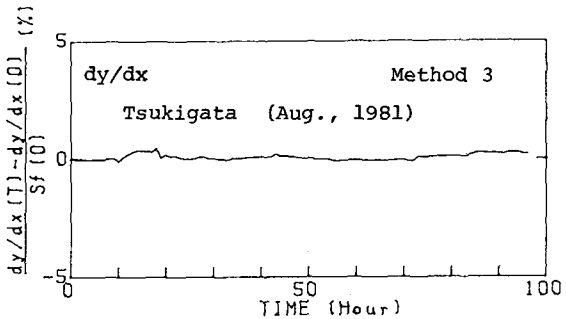
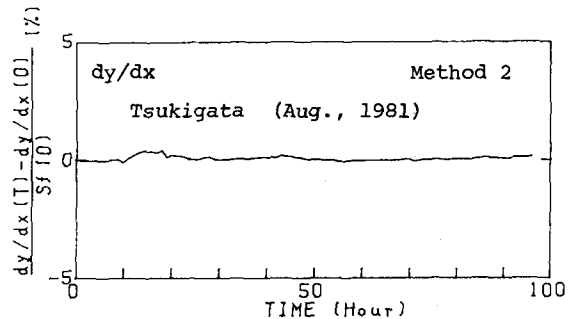
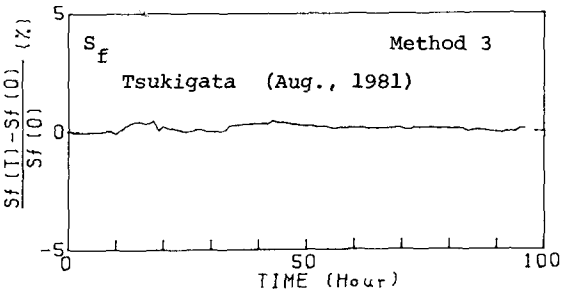
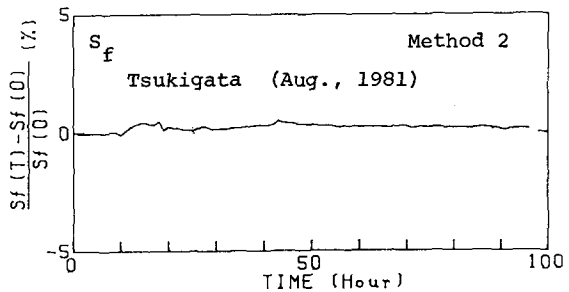
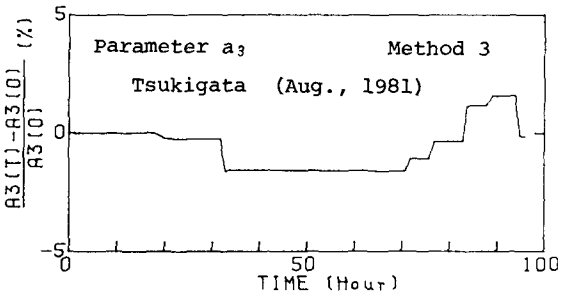
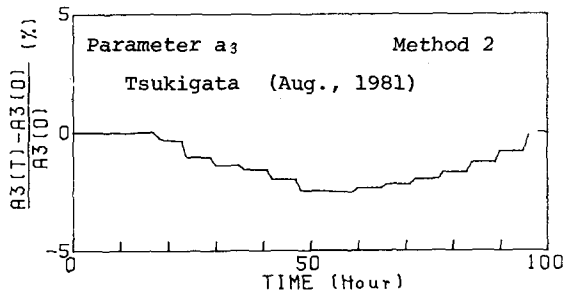
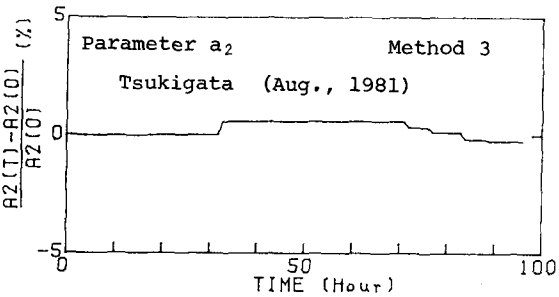
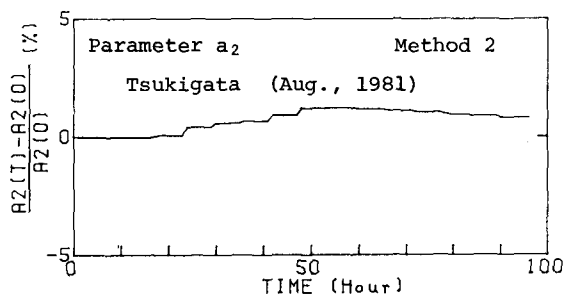
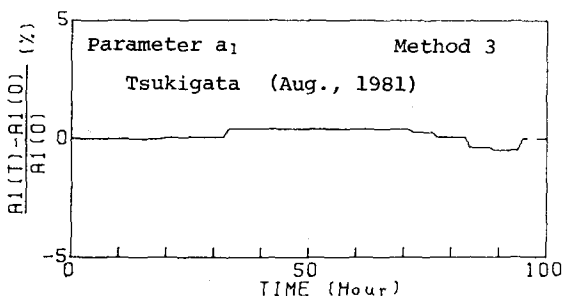
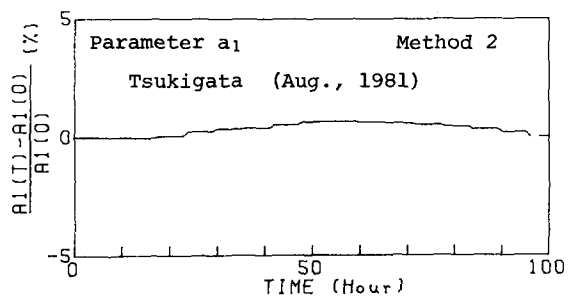


Fig. 4 Time variation of state variables by Method 2

Fig. 5 Time variation of state variables by Method 3

(5)、(9) 式から計算してみると、 $Q = 7430$

m^3/sec となり、Method 1 で推定されたピーク流量と約 $400 m^3/sec$ の差がある。したがって、状態変数推定値の変化率が小さいとはいえ、Method 1 においても Kalman filter 理論適用の効果があつたと考えられる。Method 1 においては、洪水生起開始と同時にパラメータの初期値と物理量（流積と流量）の初期値をできるだけ正確に算定してやらないと以後のピーク流量推定に大きく影響することが数値実験の結果明らかとなった。図-4 と図-5 にはそれぞれ、Method 2 と Method 3 による 6 個の状態変数の時間変動様相を初期値に対する変化率で示した。これらの図より流量観測値情報は状態変数の update に大きく寄与していることがわかる。

とくに、パラメータ a_3 の変化が顕著であり、ついでパラメータ a_2 、 a_1 の変化が大きい。 S_f と dy/dx の変化率は非常に小さい。パラメータ a_1 は増水期で増加傾向（粗度係数で言えば減少傾向）を示し、この特性はパラメータ a_2 についても同様である。しかしながら、パラメータ a_3 は逆に増水期で減少傾向を示している。これらのパラメータの時間変動がどのような水理学的意義をもつかについては今後さらに検討を要する。ここには提示しなかったが、実測水位と推定流量の間の関係は 3 方法ともほぼ 1 価関数に近い形状を示した。

図-6 には Method 1（水位のみを観測値情報とする例）による 4 時間先の水位予測値と実測水位を比較して示した。20 ~ 25 時間で推定水位曲線に大きな変動が起っている理由は、10 時間前後で実測水位が一度下がっているため、その反動が Kalman gain に影響を及ぼしたと考えられる。しかしながら、最高水位近傍での予測値には大きな変動はみられない。また、最高水位近傍で overshoot がみられないのは、水位~時間曲線の曲率特性、すなわち、2 次微分の効果が second-order Kalman filter にいかされたためである。さきに Method 1 においては状態変数の update 値の変化率が小さかったと述べたが、図-6 の結果をみると、この方法でも数時間先の水位予測が可能であることが明確となった。

最後に、本研究は文部省科学研究費、一般研究 C（課題番号：56550344）ならびに自然災害特別研究（代表者：北海道大学 岸 力教授、課題番号：56020501）の援助を受けた。また、北海道開発局より、貴重な洪水資料を提供していただいた。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 岸 力, 黒木 幹男 : 移動床流における河床形状と流体抵抗 (I), 北海道大学工学部研究報告第 67 号, 1973.
- 2) Gelb, A. (ed.) : Applied Optimal Estimation, The Analytic Sciences Corporation, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1974.
- 3) Athans, M., Wishner, R.P., and Bertolini, A. : Suboptimal State Estimation for Continuous-Time Nonlinear Systems from Discrete Noisy Measurements, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-13, No.5, 1968.
- 4) Mehra, R.K. : A Comparison of Several Nonlinear Filters for Reentry Vehicle Tracking, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-16, No.4, 1971.

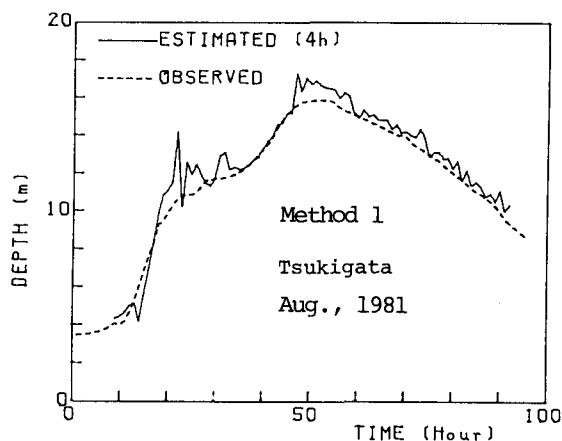


Fig. 6
4-hour ahead prediction of water level