

II-17 流出予測における適応制御理論の応用に関する研究

北海道大学工学部 正員 星 清

北海道大学工学部 正員 山岡 勲

北海道大学工学部 学生員 ○ 茂木 映治

1. はじめに

流出の逐次予測 (operational forecast) は洪水時の貯水池操作上、あるいはまた洪水防災対策上重要な問題である。流出予測の手法がかね備えなければならない要件は、(1) 高精度の流出予測ができること、(2) 降雨流出系モデルのパラメータ同定がオンラインで行なえること、(3) 計算が迅速であることである。Kalman 予測理論では最新の観測値情報をもとに状態変数が update されるため、長い過去のデータを必要としないこと、またモデル構成も複雑ではないので実際の運用にあたってもさほど困難は生じない。Kalman filter 理論は実際の洪水予測にあたって必要と考えられる上記の3要件をかね備えていると考えられる。一方、Kalman filter 理論の実践問題への適用にあたってはいくつかの先験的情報を入力してやる必要がある。その情報とは、状態変数 x_k の初期値、状態変数推定誤差共分散 P_k の初期値、システム方程式の誤差共分散 M_k 、および観測値誤差共分散 N_k である。 x_k の初期値設定には過去の実績洪水資料から同定された平均のパラメータ値を用いることができる。 P_k の初期値は x_k の値のオーダーから概略値を知ることができる。 M_k と N_k に関しては通常一定値が組み込まれる。この方法は一般には nonadaptive filter として知られている。

本報告では、 M_k と N_k の adaptive 推定の近似解法を開発してその流量予測精度に及ぼす影響を検討する。流出モデルとして貯留関数法を採用し、second-order Kalman filter理論を適用する。

2. 降雨流出系のモデル設定

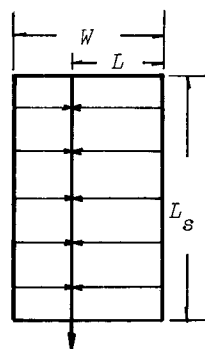
流出の逐次予測を迅速に行なうためには分布定数系流出モデルよりも集中定数系モデルの方が有利である。ここでは、流出系の非線形性を比較的単純な構造式で表現できる貯留関数法を流出モデルとして選定した。流出の逐次予測問題では、どのような予測理論を採用するかという重要な要素に加えて、貯留関数法のモデル構造の決定が比較的長い lead time における流量予測精度に大きく影響を及ぼす。したがって、hydrograph の形状特性、すなわち、上昇部・下降部の流量予測において支配要素となる gradient およびピーク近傍での curvature の効果を的確に表現できるモデル構造式の決定が流出逐次予測のために不可欠となる。

著者らは洪水時にみられる貯留量 ~ 流量曲線の2価性を重視して、この特性を表現するにはどのような構造式が適当であるかを Kinematic wave 理論解から明らかにし、(1) 式の貯留方程式を提案した^{1,2)} (2) 式は連続式である。

$$S = K_1 Q^{p_1} + K_2 \frac{d}{dt} (Q^{p_2}) \quad \dots\dots (1) \quad \frac{dS}{dt} = R - Q \quad \dots\dots (2)$$

ここで、 t : 時間 (hr), S : 貯留高 (mm), Q : 流出高 (mm/hr), R : 雨量強度 (mm/hr), K_1, K_2 , p_1, p_2 : モデルパラメータ。(1) 式の貯留方程式は $p_2 = 1$ のとき Prasad の貯留関数モデルに一致する。³⁾ しかしながら、多くの解析例を検討した結果、 $p_2 = 1$ となる例はきわめてまれであり、Prasad モデルでは Kinematic wave 法と当価なモデルに集中化することが困難であることがわかった。今、対象流域を図-1に示すような2つの矩形斜面からなるものとし、Manning 型の表面流を斜面流出に想定して河道効果を見捨てると、矩形降雨波形に対しては (1) 式のモデルパラメータは次式で与えられる。

$$K_1 = 2.82(n/\sqrt{i})^{0.6} A^{0.24} \quad \dots\dots (3) \quad K_2 = 0.282 K_1^2 \bar{R}^{-0.265} \quad \dots\dots (4)$$

Fig. 1
Basin Model

$$p_1 = 0.6 \quad \dots\dots(5) \quad p_2 = 0.465 \quad \dots\dots(6)$$

ここで、 n : 等価粗度 ($\text{sec}/\text{m}^{1/3}$), i : 斜面勾配, $\bar{R}$: 平均雨量強度 (mm/hr)。 (3) 式の誘導には図-1 に示される W と L の間に $L/W = 0.6$ を仮定し、さらに主河道長 $L_g (\text{km})$ と流域面積 $A (\text{km}^2)$ の間に Hack の法則 $L_g = 1.35 A^{0.6}$ を用いた。 (3)、(4) 式より明らかなように、パラメータ K_1 は流域特性にのみ依存し、パラメータ K_2 は流域特性と降雨特性の双方に依存する。factor $(n/\sqrt{i})^{0.6}$ の推定問題が残るが、この値の order は 1 ~ 2 と考えられる。⁴⁾ したがって、(3)~(6) 式の関係式は以後の流出逐次予測に Kalman filter 理論を適用する際の状態変量初期値として予測モデルに組込むことができる点で有効となろう。

3. Kalman filter 理論⁵⁾

Kalman filter 理論は流出予測と同時にモデルパラメータの on-line 同定が行なえる特徴をもつ。しかしながら、パラメータ K_1, K_2, p_1, p_2 がどのように時間変動するかの先験的情報はなんら得られないので、これらのパラメータは random walk に従って時間変動するものとする。本報告では、次に示す6変量を状態変量として選定した。

$$x_1 = Q^{P^2} \quad \dots\dots(7a) \quad x_2 = d(Q^{P^2})/dt \quad \dots\dots(7b) \quad x_3 = K_1 \quad \dots\dots(7c)$$

$$x_4 = 1/K_2 \quad \dots\dots(7d) \quad x_5 = p_1 \quad \dots\dots(7e) \quad x_6 = 1/p_2 \quad \dots\dots(7f)$$

(1)、(2) 式の貯留関数モデルを (7) 式の状態変量を用いて表わし、さらに $x_3 \sim x_6$ の状態変量は random walk に従って時間変化するものと仮定したので、状態変量ベクトル方程式は次式で定義される。

$$dx/dt = f[x(t)] \quad \dots\dots(8) \quad x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T \quad (T : \text{transpose}) \quad \dots\dots(9)$$

ここで、

$$f_1 = x_2 \quad \dots\dots(10a) \quad f_2 = -x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_1^{x_5 x_6 - 1} + x_4 (R - x_1^{x_6}) \quad \dots\dots(10b)$$

$$f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 0 \quad \dots\dots(10c)$$

実際の計算にあたっては、(8) 式の微分方程式を離散化表示した方が便利である。今、 Δt を計算時間間隔として、 $x_{k+1} = x(t+\Delta t)$ および $x_k = x(t)$ と定義する。このとき、(8) 式を Δt の2次の order まで Taylor 級数展開すると次式が得られる。

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k) \Delta t + A(x_k) f(x_k) (\Delta t)^2 / 2 + m_k \quad \dots\dots(11)$$

ここで、 m_k は時刻 t_k におけるモデリング誤差と (8) 式の離散化誤差からなり $[6 \times 1]$ 行列である。また、 $A(x_k)$ は $[6 \times 6]$ の Jacobian 行列であり、その要素は $a_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) で与えられる。(10c) 式からも明らかなように、行列 $A(x_k)$ の第3行目から第6行目までの要素はすべて 0 である。(11) 式をここでは、Kalman filter 理論適用の際のシステム方程式とする。システム誤差ベクトル m_k は平均値 0 の正規性白色ノイズとすると、その共分散行列は $E(m_k m_k^T) = M_k \delta_{kj} \quad \dots\dots(12)$ ここで、 E : 期待値演算子、 δ_{kj} : クロネッカーデルタ。 $x_1 \sim x_6$ のうち、我々が観測可能な量は流出高 Q だけであるから、(7a) 式より Kalman filter 理論適用のための観測値方程式は次式となる。

$$y_k = g(x_k) + n_k \quad \dots\dots(13) \quad g(x_k) = x_1^{x_6} \quad \dots\dots(14)$$

ここで、 y_k は時刻 t_k における流出高 Q の観測値である。また、 n_k は観測値誤差で、平均値 0 の正規性白色ノイズとすると、その分散は (15) 式で与えられる。 $E(n_k^2) = N_k \quad \dots\dots(15)$

(11) 式のシステム方程式と (13) 式の観測値方程式に対して 2nd-order^{6,7)}

Kalman filter 理論を適用する。その algorithm を要約して表-1 に示す。表中の $\hat{x}_k(-)$ と $\hat{x}_k(+)$ はそれぞれ、時刻 t_k における観測値情報が入手される直前と直後の状態変数推定値を、また、 $P_k(-)$ と $P_k(+)$ はその時点での推定値誤差共分散を意味する。表中の Ψ_k と Π_k は線形化 Kalman (Extended Kalman filter) に伴う bias error の拡大をおさえる補正関数である。これらの関数は表-1 内の「Definition」の項に示されるように関数 f と g の状態変数に関する 2 次導関数行列 (Hessian 行列) から成立っている。したがって、これらの補正関数は流出逐次予測問題におけるハイドログラフのピーク近傍での曲率特性を流量推定値に強く反映させることができる効果をもつ。なお、Hessian 行列 $B(x_k)$ は (10) 式より明らかなように、 $\partial^2 f_2 / \partial x_i \partial x_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) のみであり、したがって、 Ψ_k は状態変数 x_2 にのみ作用する。同様に、 Π_k は関数 g がスカラーであるから、スカラー補正関数となる。

Table 1
Algorithms of the second-order Kalman filter

System Model	$x_{k+1} = x_k + f(x_k)\Delta t + A(x_k)f(x_k)\frac{(\Delta t)^2}{2} + m_k$ $m_k \sim N(0, M_k)$
Measurement Model	$y_{k+1} = g(x_{k+1}) + n_{k+1}$ $n_{k+1} \sim N(0, N_{k+1})$
Initial Condition	$x_0 \sim N(\hat{x}_0, P_0)$
State Extrapolation	$x_{k+1} = x_k + f(x_k)\Delta t + A(x_k)f(x_k)\frac{(\Delta t)^2}{2} + \Psi_k$ $t_k \leq t < t_{k+1}$ $\hat{x}_{k+1}(-) = x_{k+1}$ at $t = t_{k+1}$
Error Covariance Extrapolation	$\Psi_k = \frac{\Delta t}{2} \text{tr}[B(x_k)P_k]$ $P_{k+1} = \Phi_k P_k \Phi_k^T + M_k$ $\Phi_k = I + A(x_k)\Delta t + A^2(x_k)\frac{(\Delta t)^2}{2}$ } $t_k \leq t < t_{k+1}$ $P_{k+1}(-) = P_{k+1}$ at $t = t_{k+1}$
State Update	$\hat{x}_{k+1}(+) = \hat{x}_{k+1}(-) + K_{k+1}\{y_{k+1} - g[\hat{x}_{k+1}(-)] - \Pi_{k+1}\}$ $\Pi_{k+1} = \frac{1}{2} \text{tr}[D_{k+1}P_{k+1}(-)]$
Gain Matrix	$K_{k+1} = P_{k+1}(-)C_{k+1}^T[C_{k+1}P_{k+1}(-)C_{k+1}^T + N_{k+1}]^{-1}$
Error Covariance Update	$P_{k+1}(+) = (I - K_{k+1}C_{k+1})P_{k+1}(-)$
Definitions	$A(x_k) = \partial f / \partial x _{x=x_k}$, $B(x_k) = \partial^2 f / \partial x \partial x _{x=x_k}$ $C_k = \partial g / \partial x _{x=\hat{x}_k(-)}$, $D_k = \partial^2 g / \partial x \partial x _{x=\hat{x}_k(-)}$ tr = trace, I = unit matrix

Kalman filter の実際問題への適用にあたっては、通常システム方程式の誤差共分散 M_k と観測値誤差共分散 N_k は一定値が組込まれている。ここでは、これらの共分散を時間的に変化させる adaptive filter の近似 algorithm を開発して、流出予測精度におよぼすその影響度を検討してみる。また、線形システム方程式に対する adaptive filter 理論の結果⁸⁾ を非線形方程式系に拡張した。以下の理論展開においても表-1 の notation をそのまま準用する。まず、観測値誤差 n_k は次式で近似されよう。

$$n_j = \delta y_j - C_j e_j(-) \dots (16) \quad \delta y_j = y_j - g[\hat{x}_j(-)] - \Pi_j \dots (17)$$

$$e_j(-) = \Phi_{j-1} e_{j-1}(+) + \Psi_{j-1}^1 \dots (18) \quad \Phi_{j-1} = I + A[\hat{x}_{j-1}(+)]\Delta t + A^2[\hat{x}_{j-1}(+)]\frac{(\Delta t)^2}{2} \dots (19)$$

$$\Psi_{j-1}^1 = \frac{\Delta t}{2} \text{tr}\{B[\hat{x}_{j-1}(+)] [P_{j-1}(+) + e_{j-1}(+)e_{j-1}^T(+)]\} \dots (20)$$

ここで、 $e_j(-)$ と $e_j(+)$ は bias error⁷⁾ であり、(21)、(22) 式で定義される。また、bias error $e_j(+)$ は (23) 式で update される。

$$e_j(-) = E[x_j - \hat{x}_j(-)] \dots (21)$$

$$e_j(+) = E[x_j - \hat{x}_j(+)] \dots (22) \quad e_j(+) = [I - K_j C_j] e_j(-) - K_j \Pi_j^1 \dots (23)$$

$$\Pi_j^1 = \frac{1}{2} \text{tr}\{D_j [P_j(-) + e_j(-)e_j^T(-)]\} \dots (24)$$

観測値誤差系列 n_j ($j = 1, 2, \dots, n$) よりその平均値は (25) 式で計算され、その共分散は (26) 式で推定される。なお、この時 n_j の最新値が得られるたびに最も古い標本値は discard してゆく。

$$\hat{n}_k = \sum_{j=k+1-n}^k n_j/n \quad \dots (25) \quad N_k = \frac{1}{n-1} \sum_{j=k+1-n}^k \left\{ (n_j - \hat{n}_k) (n_j - \hat{n}_k)^T - \frac{n-1}{n} C_j P_j (-) C_j^T \right\} \dots (26)$$

($k \geq n$) (n : sample size)

次に、システム方程式の誤差共分散 M_k の adaptive 推定法について述べる。(11)式と表-1に示される State Extrapolation 式からシステム方程式の誤差ベクトルを(27)式で近似する。したがって、誤差標本値 m_j ($j=1, 2, \dots, m$) が得られれば、その平均値は(29)式により、また、その共分散は(30)式により推定される。なお、この時(29)、(30)式の計算にあたっては(25)、(26)式の計算過程と同様に、 m_j の最新値が process される毎に古い標本値を discard してゆく。

$$m_j = \hat{x}_{j+1}(+) - \left\{ \hat{x}_j(+) + f[\hat{x}_j(+)]\Delta t + A[\hat{x}_j(+)]f[\hat{x}_j(+)]\frac{(\Delta t)^2}{2} + \Psi_j \right\} \dots (27)$$

$$\Psi_j = \frac{\Delta t}{2} \text{tr} \left\{ B[\hat{x}_j(+)]P_j(+) \right\} \dots (28) \quad \hat{m}_k = \sum_{j=k+1-m}^k m_j/m \quad (k \geq m) \quad (m: \text{sample size}) \dots (29)$$

$$M_k = \frac{1}{m-1} \sum_{j=k+1-m}^k \left\{ (m_j - \hat{m}_k) (m_j - \hat{m}_k)^T - \frac{m-1}{m} [\Phi_{j-1} P_{j-1}(+) \Phi_{j-1}^T - P_j(+)] \right\} \dots (30)$$

(26)、(30)式によって計算される adaptive 推定値を表-1に示した観測値誤差共分散 N_k とシステム誤差共分散 M_k にそれぞれ用いられればよいことになる。

4. 適用例

前節までは、(1)、(2)式の貯留関数モデルを 2nd-order Kalman filter 理論と coupling して流出逐次予測を行なう方法論について述べた。ここでは、その適用例を示す。解析対象として、岩尾内ダム(流域面積 331 km²) 地点における 1975年 8月洪水例をとりあげる。Kalman filter 理論の流出逐次予測への適用にあたっては種々の不確定要因が存在する。たとえば、降雨の将来予測が可能か、あるいはまた、洪水生起中に流出成分分離と有効雨量の算定が可能かといった問題がある。本報告では、とくに adaptive filter 法の流出逐次予測に及ぼす効果の検討が主題であるので、直接流出高と有効雨量を解析資料としている。また、降雨予測についても実績降雨波形を入力している。

実際の計算にあたっては、流量観測値が 1時間毎に得られるとして、状態変量の update を行なっている。また、表-1に示される時間間隔と adaptive filter の時間間隔をすべて $\Delta t = 1 \text{ hr}$ とした。パラメータ K_1, K_2, p_1, p_2 (状態変量 $x_3 \sim x_6$) の初期値は(3)~(6)式により推定した。この時、 $(n/\sqrt{i})^{0.6} = 1.5$, $\bar{R}$ (平均有効雨量強度) $= 3.0 \text{ mm/hr}$ を用いた。状態変量推定誤差共分散の初期値 P_0 として、状態変量初期値 x_0 の $1/100$ を入力した。また、システム方程式の誤差共分散行列 M_k (対角行列)および流量観測値誤差共分散 N_k の初期値をそれぞれ、 $M_0 = x_0/1000$, $N_0 = 0.001$ とした。adaptive filter 開始時刻を 13時間目とし、それまでは M_0, N_0 の一定値を伝達させる。また、誤差系列 m_j, n_j の標本数を $m=n=12$ と固定した。

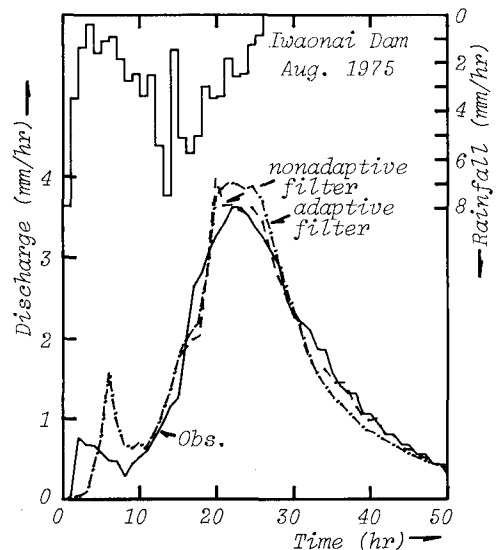


図-2 には実測降雨波形を入力したときの3時間 Fig. 2 3-hour ahead runoff prediction

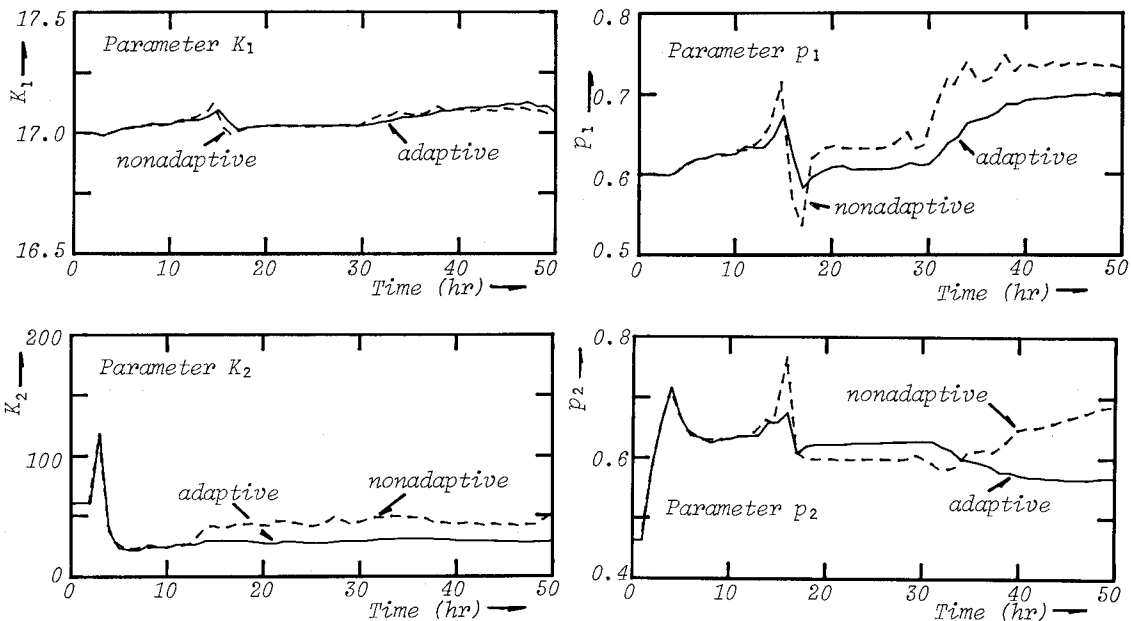


Fig. 3 Time variation of model parameters

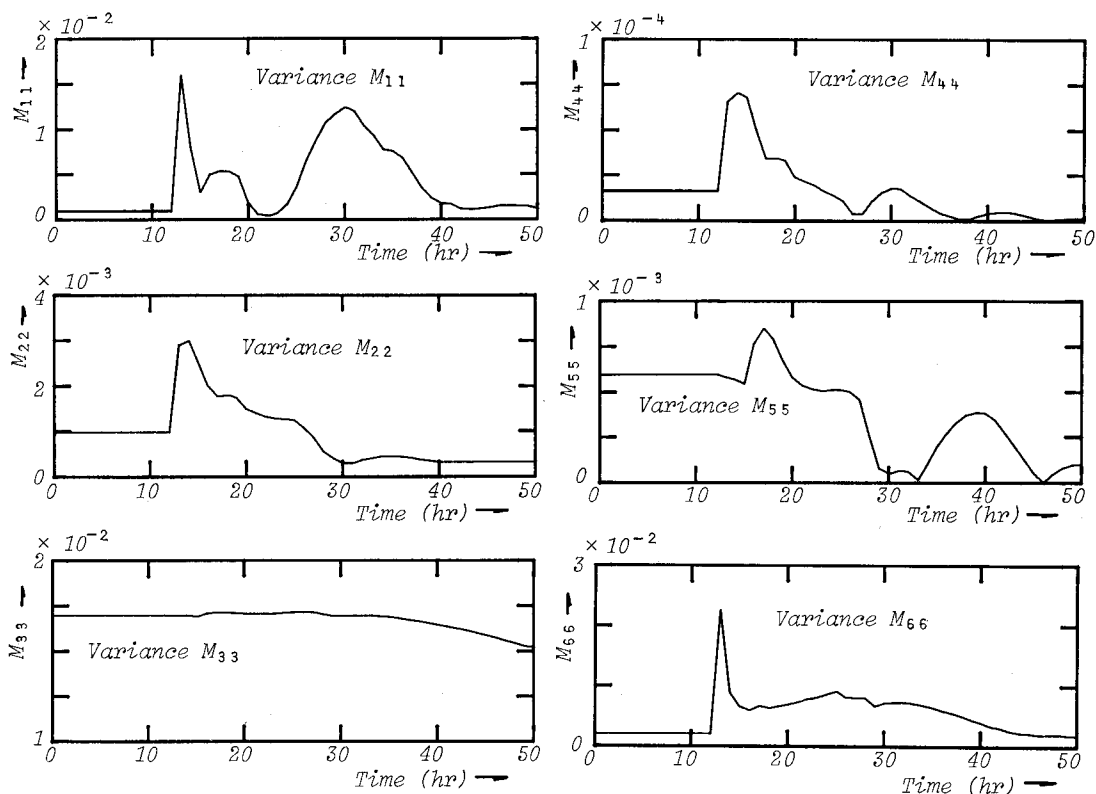


Fig. 4 Time variation of system-error variances, M_k

先での nonadaptive filter と adaptive filter による流量予測値を実測 hydrograph と対比して示した。hydrograph のピーク近傍の形状特性をみると、nonadaptive filter は鋭利な形状を呈しているのに反し、adaptive filter はなめらかな形状を示している。adaptive filter によるピーク

流量生起時刻は実測のそれに近い。図-3には貯留関数モデルパラメータ K_1 , K_2 , p_1 , p_2 の時間変動が示されている。パラメータ K_1 については両 filter 法で顕著な差異がみられない。しかしながら、他の3個のパラメータの時間挙動についていえば、adaptive filterの方が nonadaptive filter よりその変動が小さくなっている。

本報告での最大の関心事はシステム方程式の誤差共分散 M_k と流量観測値誤差分散 N_k がどのような時間変動を呈しているかを知ることである。図-4と図-5には、それぞれ、 M_k の分散値 M_{ii} と N_k の時間変化様相が示されている。図-4の M_{ii} は (11) 式の誤差ベクトル m_k の要素 m_i ($i=1, 2, \dots, 6$) に対応する分散である。前述したように adaptive filter の開始時刻が 13時間目であるので、それ以前までは初期に設定した一定値が伝達さ

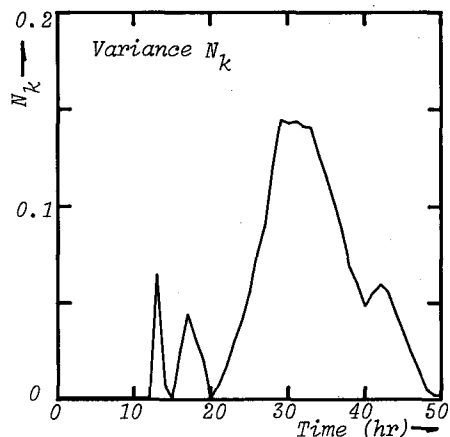


Fig. 5 Time variation of observation error variance, N_k

れている。このため、 M_{33} を除く他の分散値は 13時間目で一度増加している。しかしながら、ピーク流量生起時刻近傍ではほぼ一定値をとっていることは注目に値する。 M_{33} の変動が小さいことは図-3に示されるパラメータ K_1 の変動が小さかったことと符合している。 N_k の時間変動は M_{11} の変動特性によく類似している。その理由は、

(11) 式からも類推されるように M_{11} が状態変量 x_1 ($= Q^{p2}$) に関するシステム方程式誤差 m_1 の分散であるからである。adaptive filter 適用の際の現実問題として、どの時点で adaptive 推定法を開始したらよいか、また、誤差標本数 m と n をいくらにとればよいかといった問題がある。もちろん、ピーク流量推定の精度を高めるためにはその生起以前に adaptive 推定を行なう必要がある。流域面積およびピーク流量生起時刻にも依存するが、本報告での数値実験から $m = n = 10 \sim 15$ が適当であることがわかった。今後は多くの資料を用いて本報告での方法論の有効性を検証してゆきたい。

最後に、本研究は文部省科学研究補助費、一般研究 C (課題番号: 56550344) の援助を受けた。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 星 清, 野田 徹: 一般化貯留関数法のパラメータ同定, 土木学会北海道支部論文報告集, 第37号, 1981.
- 2) 星 清, 山岡 勲: 雨水流法と貯留関数法との相互関係, 第26回水理講演会論文集, 1982.
- 3) Prasad, R. : A Nonlinear Hydrologic System Response Model, Jour. of Hydraul. Div., Proc. of the ASCE, Vol.93, No. HY4, 1967.
- 4) 角屋 睦, 福島 晟: 中小河川の洪水到達時間, 京都大学防災研究所年報, 第19号, 1976.
- 5) Gelb, A. (ed.) : Applied Optimal Estimation, The Analytic Sciences Corporation, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1974.
- 6) Athans, M., Wishner, R.P., and Bertolini, A. : Suboptimal State Estimation for Continuous-Time Nonlinear Systems from Discrete Noisy Measurements, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-13, No.5, 1968.
- 7) Mehra, R.K. : A Comparison of Several Nonlinear Filters for Reentry Vehicle Tracking, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-16, No.4, 1971.
- 8) Myers, K.A. and Tapley, B.D. : Adaptive Sequential Estimation with Unknown Noise Statistics, IEEE Trans. on Automatic Control, Short Paper, 1976.