

II-13 流出解析における実斜面のモデル化に関する研究

北海道大学工学部 正 員 藤田 睦博

北海道大学工学部 正 員 山岡 勲

北海道大学工学部 学生員 ○ 白川 信之

1. はじめに

流出現象の解析を行なう時に、分布定数系のモデルよりも集中定数系のモデルの方が、計算が容易で、その取り扱いも簡単であることは、良く知られている。

しかし、その集中定数系のモデルも、モデル内に含まれるパラメーターの値と流域特性量(斜面長、勾配、粗度)との関係がわかりにくいという欠点を持っている。

本論文は、流域が雨量を流量に変換する場である斜面と、斜面からの流出量を合成、運搬する場である河道とにより構成されているという基本の上で、斜面上の流れが *kinematic wave* モデルで近似出来るものとして、これより集中定数系の流出モデルである貯留型の流出モデルを理論的に誘導し、パラメーターの値の物理的解釈を容易にした藤田¹⁾の論文に基づいて、研究を進めたものである。

先ず最初に、縦断形状について、次いで、複雑な形状をした実斜面を矩形のような理想化した斜面に置換して考えるだけでなく、三角形斜面の合成で考えたり、斜面長の変動を考えたりするなど、平面形状について考察し、それらが貯留方程式に及ぼす影響について、実測資料に基づいて、吟味したものである。

2. 基礎理論

(1) 変勾配斜面の場合

図-1に示す変勾配斜面上の流出モデルの基礎式として、式(1)、(2)を考える。

式(2)において、加速度項を無視すると式(3)を得る。さらに、式(3)の係数を一般化して式(4)を得る。これを式(1)、(2)に代入し、微小項も簡略すると式(5)、(6)になる。

次に、以後の取扱いを容易にするため、式(7)に示す量を定義して、式(5)、(6)を無次元化する。尚、無次元化規準量として、式(8)を採用する。

従って、基礎式の無次元化式は、式(9)、(10)となる。この時、初期条件、及び、境界条件として、式(11)を与えるものとする。

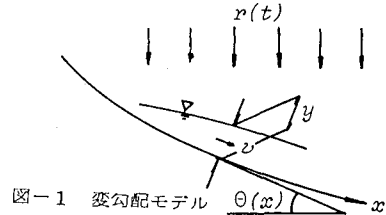


図-1 変勾配モデル

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial yv}{\partial x} = r(t) \cos \theta(x) \quad (1)$$

$$v = \frac{1}{n} y^{2/3} \left\{ -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sin \theta(x) - \frac{\partial (y \cos \theta(x))}{\partial x} \right\}^{1/2} \quad (2)$$

y : 水深, t : 時間, v : 流速, x : 斜面上流端からの距離,

$r(t)$: 有効雨量, $\theta(x)$: x の位置における斜面の傾斜角,

n : Manningの粗度係数, g : 重力の加速度,

$$q = yv = \frac{1}{n} y^{5/3} \left\{ \sin \theta(x) - \frac{\partial (y \cos \theta(x))}{\partial x} \right\}^{1/2} \quad (3)$$

q : 単位幅流量

$$q = \beta y^m \left\{ \sin \theta(x) - \frac{\partial (y \cos \theta(x))}{\partial x} \right\}^{1/2} \quad (4)$$

β, m : 流域定数

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r(t) \cos \theta(x) \quad (0 \leq x \leq L) \quad (5)$$

$$q = \beta y^m \sin^c \theta(x) \quad (6)$$

L : 斜面長, c : 流域定数

$$y = y_* Y, t = t_* T, q = q_* Q, x = x_* X, r = r_* R \quad (7)$$

*のついた量は無次元化規準量で、大文字は小文字の量の無次元量。

$$x_* = L \text{ (斜面長)}, r_* = \bar{r} \text{ (平均雨量強度)}, \quad (8)$$

$$t_* = \left(\frac{x_* r_*^{1-m}}{\beta} \right)^{1/m}, y_* = r_* t_*, q_* = x_* r_* \quad (8)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial T} + \frac{\partial Q}{\partial X} = R(T) \cos \theta(X) \quad (0 \leq X \leq 1) \quad (9)$$

$$Q = Y^m \sin^c \theta(X) \quad (10)$$

$$Y(X, 0) = 0, Y(0, T) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial Y^m \sin^c \theta(X)}{\partial X} = R \cos \theta(X) \quad (12)$$

$$\sin \theta(X) = A \exp(-BX), \cos \theta(X) = \sqrt{1 - A^2 \exp(-2BX)} \quad (13)$$

A, B : 係数

$$Y = \exp\left(\frac{BX}{2m}\right) \left(\frac{R}{2B\sqrt{A}}\right)^{1/m} \left\{ 2\left(\sqrt{1-A^2} - \sqrt{1-A^2 \exp(-2BX)}\right) + \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-A^2}}{1+\sqrt{1-A^2}}\right) - \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-A^2 \exp(-2BX)}}{1+\sqrt{1-A^2 \exp(-2BX)}}\right) \right\} \quad (14)$$

$$Q = \frac{R}{2B} \left\{ 2\left(\sqrt{1-A^2} - \sqrt{1-A^2 \exp(-2BX)}\right) + \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-A^2}}{1+\sqrt{1-A^2}}\right) - \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-A^2 \exp(-2BX)}}{1+\sqrt{1-A^2 \exp(-2BX)}}\right) \right\} \quad (15)$$

$$S = \int_0^L Y dx \quad (16)$$

$$S = \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^{1/m} (1.429 B m^{-1.179}) \quad (17)$$

図-2 複合斜面モデル

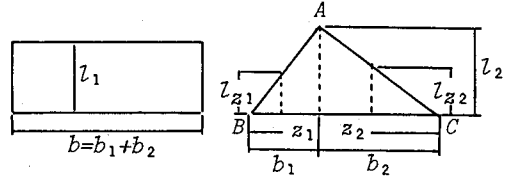
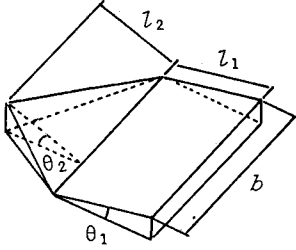


図-3 斜面モデルの諸元

十分に継続時間の長い、一定強度の降雨 R を考えると、定常状態における解は式 (12) で与えられる。

一方、斜面勾配が x に沿って指数関数的に減少することを考慮して、式 (13) を仮定し、 $c = 0.5$ として、式 (12) を解くと、式 (14) が得られる。この時の斜面末端の流量 Q は、式 (15) となる。又、単位幅斜面の無次元貯留量は式 (16) で与えられることより、式 (14) ~ (16) を用いると定常状態における貯留方程式を誘導出来る。数値計算の結果、式 (17) を得た。

(2) 複合斜面モデルの場合

図-2 に示す三角形斜面と矩形斜面の複合斜面モデルについて考える。図-3 は、この複合斜面を左右岸の斜面に分離して表示したもので、図に示したように三角形斜面に関しては三角形 ABD 、三角形 ACD の二つの斜面を考える。

従って、kinematic wave モデルの基礎式は、式 (18) ~ (23) のようになる。

又、 l_{z1} 、 l_{z2} は式 (24) となる。

次に、斜面長、及び、斜面定数に関して、式 (25) を仮定する。

河道効果を見捨ると矩形、三角形両斜面からの流出量 $q_t (m^3/sec)$ は、式 (26) に、又、斜面上の貯留量 $s_t (m^3)$ は、式 (27) になる。

解析を容易にするために、式 (28) に示す量を定義して基礎式を無次元化する。無次元化規準量として、式 (29) を採用する。

従って、基礎式の無次元化式は、式 (30) ~ (35) のようになる。

又、式 (26)、(27) の q_t 、 s_t に関する無次元化規準量として q_* 、 s_* を用いると、式 (36) のようになり、無次元式として式 (38)、(39) が得られる。尚、無次元化規準量として、式 (37) を採用する。

式中で、 ϵ_3 、 ϵ_4 は、式 (40) のような量である。

今、式 (41) を仮定して、一定強度の降雨が長時間継続する場合を考えると、式 (42) が得られる。又、式 (39) は、式 (43) のようになる。

矩形斜面

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} = r(t) \cos \theta_1 \quad (0 \leq x \leq l_1) \quad (18)$$

$$q_1 = \alpha_1 y_1^m \quad (19)$$

y_1 : 矩形斜面上の水深、 q_1 : 単位幅流量、

θ_1 : 傾斜角、 α_1 : 斜面定数。

三角形斜面 ($\triangle ABD$)

$$\frac{\partial y_{z1}}{\partial t} + \frac{\partial q_{z1}}{\partial x} = r(t) \cos \theta_2 \quad (0 \leq x \leq l_{z1}) \quad (20)$$

$$q_{z1} = \alpha_2 y_{z1}^m \quad (21)$$

三角形斜面 ($\triangle ACD$)

$$\frac{\partial y_{z2}}{\partial t} + \frac{\partial q_{z2}}{\partial x} = r(t) \cos \theta_2 \quad (0 \leq x \leq l_{z2}) \quad (22)$$

$$q_{z2} = \alpha_2 y_{z2}^m \quad (23)$$

y_{z1} 、 y_{z2} : それぞれ B 、 C 点から z_1 、 z_2 の距離における水深、

q_{z1} 、 q_{z2} : z_1 、 z_2 の位置における単位幅流量、

θ_2 : 傾斜角、 α_2 : 斜面定数。

$$l_{z1} = \frac{l_2 z_1}{b_1}, \quad l_{z2} = \frac{l_2 z_2}{b_2} \quad (24)$$

$$l_2 = \epsilon_1 l_1, \quad \alpha_2 = \epsilon_2 \alpha_1 \quad (25)$$

$$q_t = b q_1(l_1, t) + \int_0^{b_1} q_{z1}(l_{z1}, t) dz_1 + \int_0^{b_2} q_{z2}(l_{z2}, t) dz_2 \quad (26)$$

$$s_t = b \int_0^{l_1} y_1(x, t) dx + \int_0^{b_1} \int_0^{l_{z1}} y_{z1}(x, t) dx dz_1 + \int_0^{b_2} \int_0^{l_{z2}} y_{z2}(x, t) dx dz_2 \quad (27)$$

$$y_1 = y_* y_{*1}, \quad y_{z1} = y_* y_{*z1}, \quad y_{z2} = y_* y_{*z2}, \quad t = t_* T, \quad (28)$$

$$q_1 = q_* q_{*1}, \quad q_{z1} = q_* q_{*z1}, \quad q_{z2} = q_* q_{*z2}, \quad x = x_* X, \quad r = r_* R$$

$*$ のついた量は無次元化規準値で、大文字は小文字の量の無次元量。

$$x_* = l_1, \quad r_* = r \cos \theta_1, \quad (29)$$

$$t_* = \left(\frac{x_* r_*}{\alpha_1} \right)^{1/m}, \quad y_* = r_* t_*, \quad q_* = x_* r_*$$

矩形斜面

$$\frac{\partial Y_1}{\partial T} + \frac{\partial Q_1}{\partial X} = R \quad (0 \leq X \leq 1) \quad (30)$$

$$Q_1 = Y_1^m \quad (31)$$

三角形斜面 ($\triangle ABD$)

$$\frac{\partial Y_{z1}}{\partial T} + \frac{\partial Q_{z1}}{\partial X} = \frac{R \cos \theta_2}{\cos \theta_1} \quad (0 \leq X \leq \frac{\epsilon_1 z_1}{b_1}) \quad (32)$$

$$Q_{z1} = \epsilon_2 Y_{z1}^m \quad (33)$$

三角形斜面 ($\triangle ACD$)

$$\frac{\partial Y_{z2}}{\partial T} + \frac{\partial Q_{z2}}{\partial X} = \frac{R \cos \theta_2}{\cos \theta_1} \quad (0 \leq X \leq \frac{\epsilon_1 z_2}{b_2}) \quad (34)$$

$$Q_{z2} = \epsilon_2 Y_{z2}^m \quad (35)$$

従って、定常状態における貯留方程式として、式 (42)、(43) より、式 (44)を得る。

同じような考え方で、複合矩形斜面の場合の式と複合三角形斜面の場合の式も求まり、それぞれ、式 (45)、(46) のようになる。

(3) 斜面長が変動する場合

この場合の貯留方程式の誘導に関しては、藤田¹⁾の論文に詳しく載っているのので、ここでは、その誘導された結果の式を、式 (47)として示すにとどめることとする。

3. 実測資料による計算例

本論文では、胆振幌別川流域における流出の解析と地形量の測定を詳細に行なった。

この流域は、図-4に示すような形状で、その流域面積は、68.8968 (km²)である。そして、その流域内河川を用いて、その縦断形状を示したのが、図-5である。これを見ると、河川の上流においては、河道の勾配が急変していることが良くわかる。

$$q_t = q'_t Q_t, s_t = s'_t S_t \quad (36)$$

$$q'_t = q'_t z_t, s'_t = y_t z_t z_t, z_t = b \quad (37)$$

* のついた量は無次元化観値で、大文字は小文字の位の無次元量。

$$Q_t = Q_1(1, T) + \int_0^{\epsilon_3} Q_{z1} \left(\frac{\epsilon_1 z}{\epsilon_3}, T \right) dz + \int_0^{\epsilon_4} Q_{z2} \left(\frac{\epsilon_1 z}{\epsilon_4}, T \right) dz \quad (38)$$

$$S_t = \int_0^1 Y_1(X, T) dX + \int_0^{\epsilon_3} Y_{z1} \left(X, T \right) dX dz + \int_0^{\epsilon_4} Y_{z2} \left(X, T \right) dX dz \quad (39)$$

$$\epsilon_3 = \frac{b_1}{b}, \epsilon_4 = \frac{b_2}{b} \quad (40)$$

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2 \quad (41)$$

$$Q_t = R + \int_0^{\epsilon_3} \frac{R \epsilon_1}{\epsilon_3} z dz + \int_0^{\epsilon_4} \frac{R \epsilon_1}{\epsilon_4} z dz = R \left(1 + \frac{\epsilon_1}{2} \right) \quad (42)$$

$$S_t = \frac{m}{m+1} R^{1/m} + \int_0^{\epsilon_3} \epsilon_1^{2/m} \epsilon_3 \left(\frac{R X}{\epsilon_2} \right)^{1/m} dX dz + \int_0^{\epsilon_4} \epsilon_1^{2/m} \epsilon_4 \left(\frac{R X}{\epsilon_2} \right)^{1/m} dX dz$$

$$= \frac{m R^{1/m}}{m+1} \left\{ 1 + \frac{m}{2m+1} \epsilon_1^{(m+1)/m} \left(\frac{1}{\epsilon_2} \right)^{1/m} \right\} \quad (43)$$

$$S_t = \frac{m}{m+1} \left(\frac{2}{2+\epsilon_1} \right)^{1/m} \left\{ 1 + \frac{m}{2m+1} \epsilon_1^{(m+1)/m} \left(\frac{1}{\epsilon_2} \right)^{1/m} \right\} Q_t^{1/m} \quad (44)$$

$$S_t = \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{1+\epsilon_1} \right)^{1/m} \left\{ 1 + \epsilon_1^{(m+1)/m} \left(\frac{1}{\epsilon_2} \right)^{1/m} \right\} Q_t^{1/m} \quad (45)$$

$$S_t = \frac{m^2}{(m+1)(2m+1)} \left(\frac{2}{1+\epsilon_1} \right)^{1/m} \left\{ 1 + \epsilon_1^{(m+1)/m} \left(\frac{1}{\epsilon_2} \right)^{1/m} \right\} Q_t^{1/m} \quad (46)$$

$$S_t = \frac{m}{m+1} \exp \left(\frac{m+1}{2m^2} \ln \left\{ \left(\frac{\sigma_1}{L} \right)^2 + 1 \right\} \right) Q_t^{1/m} \quad (47)$$

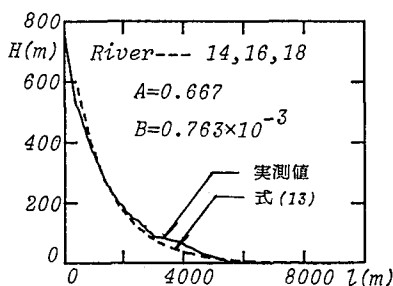


図-5 河道縦断形状

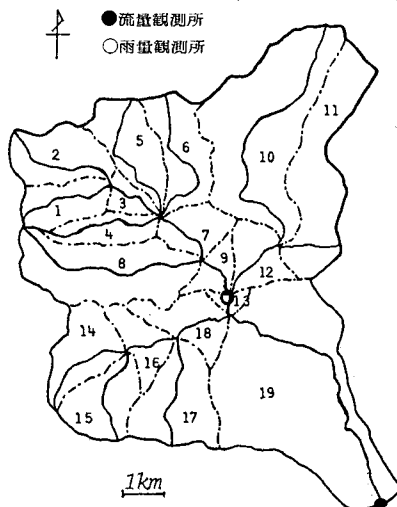
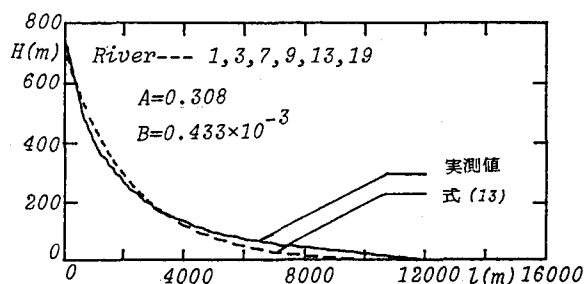
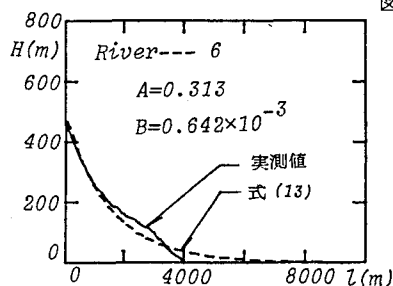


図-4 幌別ダム流域

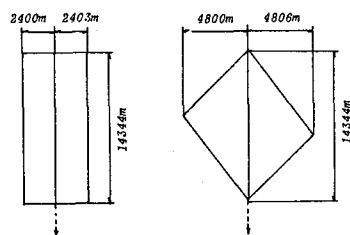


図-6 矩形流域と三角形流域

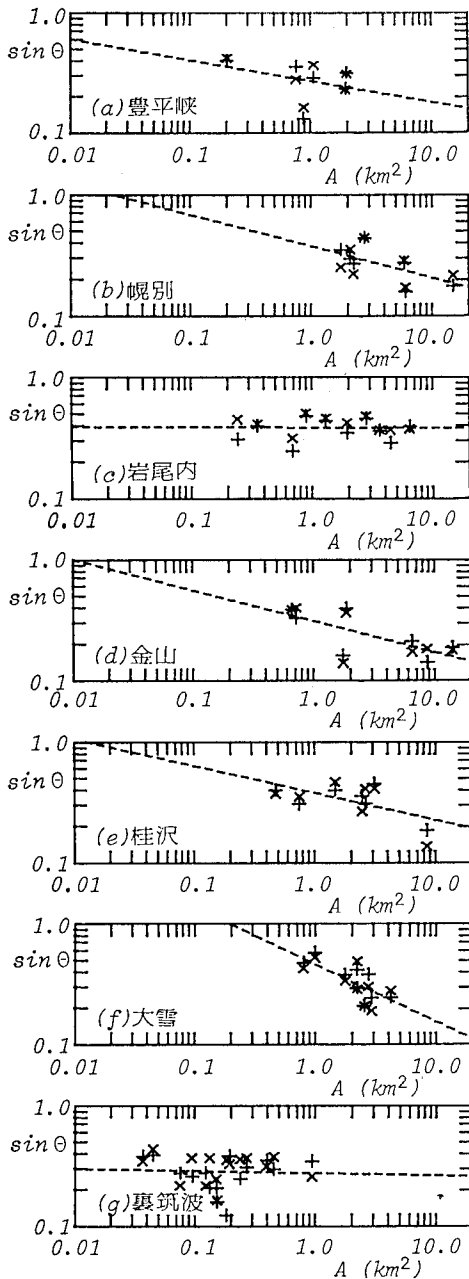


図-7 斜面勾配の平均と面積

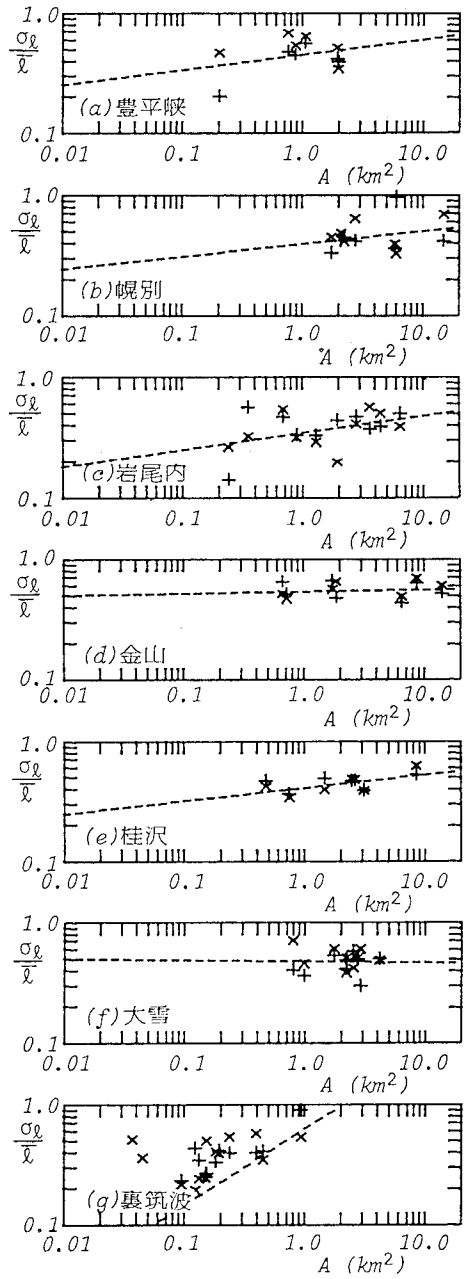


図-8 斜面長の変動係数と面積

又、図-6は、流域を矩形流域に単純化した場合と三角形流域に単純化した場合の図である。尚、この流域は、主流によって、ほとんど面積の等しい右岸部と左岸部に分けられる。

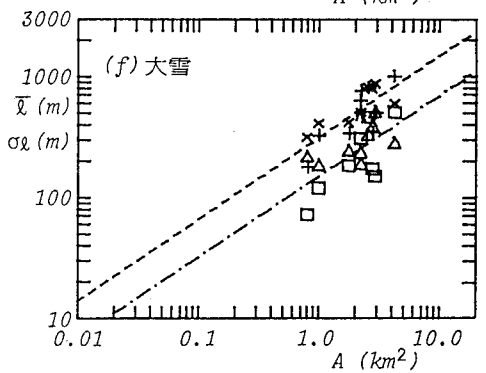
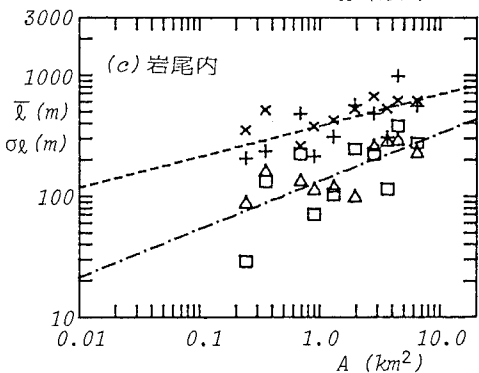
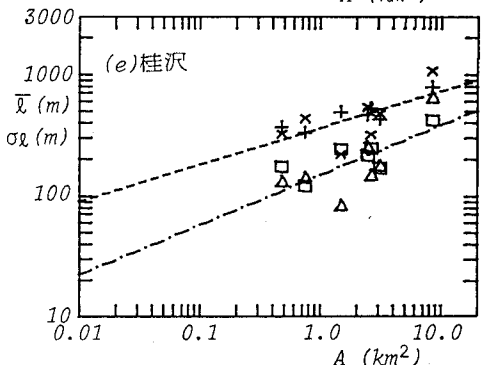
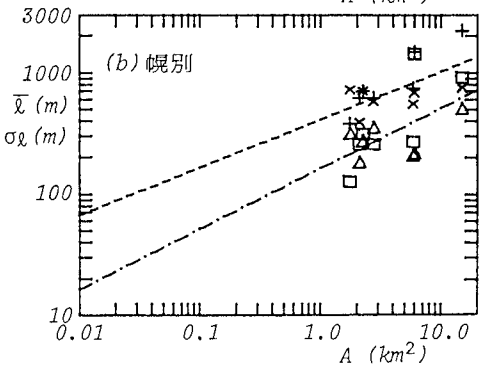
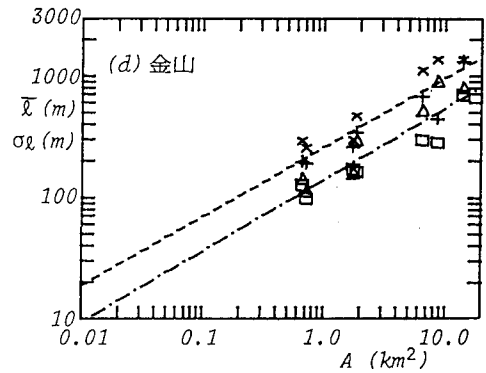
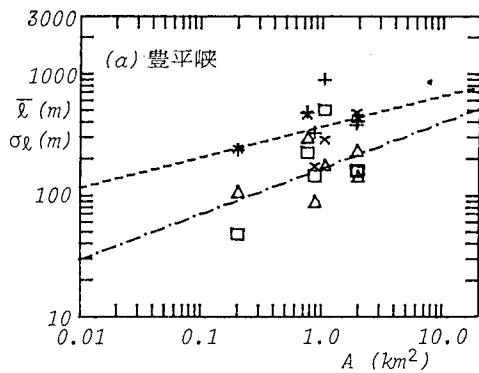
さて、式(17)、(45)、(46)、(47)は、無次元表示になっているので、流出高 $q_h(mm/hr)$ 、貯留高 $s_h(mm)$ を用いて書きなおすと、式(48)～(51)の方程式を得る。

$$s_h = \frac{m}{m+1} (1.429 B m^{-1.179}) \left(\frac{1000^{m-2} n L}{3.6 \sqrt{A}} \right)^{1/m} q_h^{1/m} \quad (48)$$

$$s_h = \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{1+\epsilon_1} \right)^{1/m} \{ 1 + \epsilon_1^{(m+1)/m} \left(\frac{1}{\epsilon_2} \right)^{1/m} \} \times \left(\frac{1000^{m-2} n L}{3.6 \sqrt{A}} \right)^{1/m} q_h^{1/m} \quad (49)$$

$$s_h = \frac{m^2}{(m+1)(2m+1)} \left(\frac{2}{1+\epsilon_1} \right)^{1/m} \{ 1 + \epsilon_1^{(m+1)/m} \left(\frac{1}{\epsilon_2} \right)^{1/m} \} \times \left(\frac{1000^{m-2} n L}{3.6 \sqrt{A}} \right)^{1/m} q_h^{1/m} \quad (50)$$

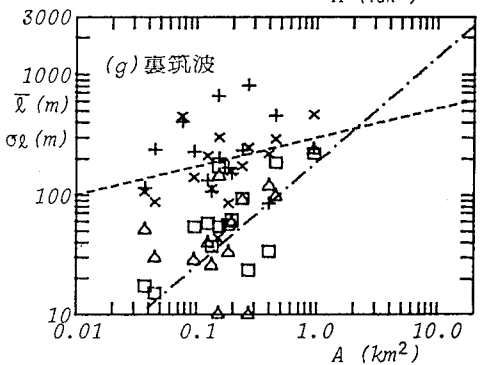
$$s_h = \frac{m}{m+1} \exp \left[\frac{(m+1)}{2m^2} \ln \left\{ \left(\frac{\sigma_L}{L} \right)^2 + 1 \right\} \right] \left(\frac{1000^{m-2} n L}{3.6 \sqrt{A}} \right)^{1/m} q_h^{1/m} \quad (51)$$



図一 九 斜面長の平均、標準偏差と面積

以上の式を用いて、変勾配斜面の場合の貯留関数法、複合矩形斜面の場合と複合三角形斜面の場合の貯留関数法、及び、斜面長が変動する場合の貯留関数法による解析を比較検討してみた。但し、斜面勾配については、その変化が直線的であったため、一定勾配として取扱った。

又、勾配や斜面長、変動係数は、図一 七～九を描くことによって得られた式である、式 (52)～(55)、及び、表一を用いて求めた。図一 七～九には、幌別以外の流域の流域特性についても、まとめて示してある。



$$\sin \theta = k_1 \text{Area}^{-k_2} \quad (52)$$

$$\frac{\sigma_l}{\bar{l}} = k_3 \text{Area}^{k_4} \quad (53)$$

$$\bar{l} = k_5 \text{Area}^{k_6} \quad (54)$$

$$\sigma_l = k_7 \text{Area}^{k_8} \quad (55)$$

	k_1	k_2	k_3	k_4
壺平堰	0.269	0.175	0.456	0.126
磯別	0.374	0.259	0.396	0.104
岩尾内	0.384	0.003	0.348	0.140
金山	0.310	0.253	0.542	0.016
桂沢	0.377	0.223	0.411	0.108
大雪	0.459	0.473	0.479	-0.010
藪筑波	0.275	0.018	0.626	0.628

	k_5	k_6	k_7	k_8
壺平堰	371.2	0.252	169.2	0.378
磯別	414.6	0.395	164.1	0.499
岩尾内	384.3	0.256	133.9	0.396
金山	260.8	0.570	141.3	0.587
桂沢	367.1	0.303	150.9	0.411
大雪	315.2	0.676	151.0	0.666
藪筑波	302.7	0.239	189.4	0.867

表-1

尚、図中で、+と口は、右岸の特性を、×と△は左岸の特性を示す。又、図-9においては、+と×、及び、破線は、平均斜面長を、口と△、及び、一点鎖線は、標準偏差を示す。

さて、それぞれの貯留関数を用いて描いたハイドログラフが図-10である。

ここで、粗度係数の値は、試行錯誤的に決めた値である1を用いた。

図をみると、斜面長の変動を小流域で考慮したものと、流域全体で考慮したものとの適合が良好であることが、又、複合三角形モデルで考慮した場合も適合が良好であることがわかる。

4. まとめ

小流域において得られた値を合成して考えた時と、流域全体で考えた時とで、実測値との適合が良好なことについて確めたが、もっと複雑で、大きな流域ではどうなるのかということについても研究していきたいと思っています。

最後に、本研究は、文部省科学研究費、一般研究C(課題番号:56550344)の援助を受けた。又、実測資料に関して、室蘭工業大学の協力を得た。記して謝意を表する。

参考文献 1) 藤田睦博: 斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第314号, 1981

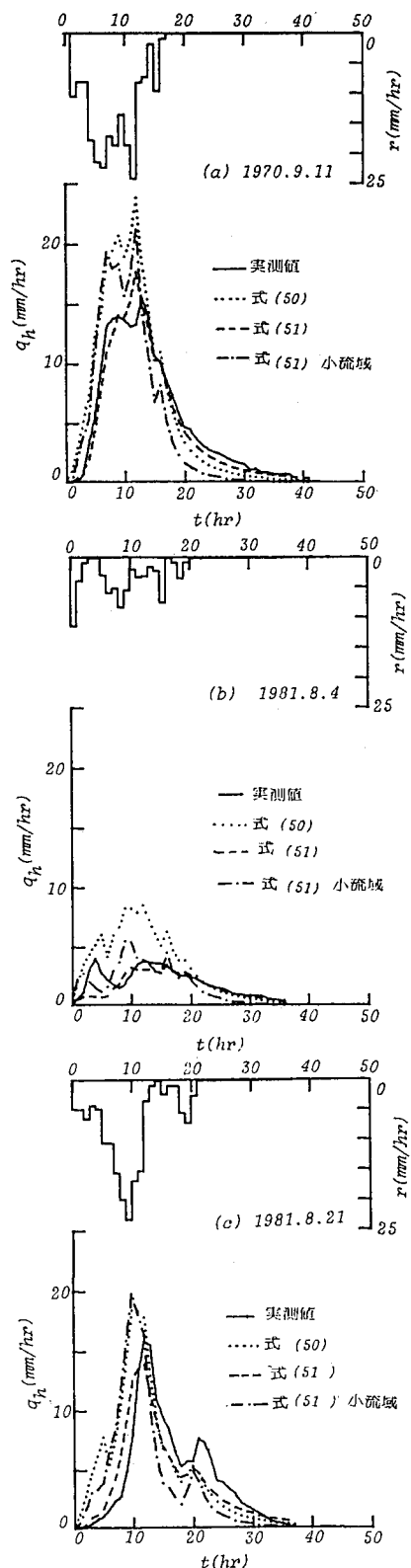


図-10 流量～時間曲線