II—7 微小振幅波の浅水変形について

北海道大学　正会員　○浜中建一郎
北海道大学　学生会員　加藤　一之

1、まえがき

水深の変化に伴う波の変形は、海岸工学上の問題としても又、流体力学上の問題としても古くからある問題であり、これまでも数多くの研究がなされてきている。これらの研究は、波長と水深との関係から、大きく二つに分類される。一つは水平底であればストークス波が適用される中間波の領域に関するものであり、もう一つは、クノイド波の適用される浅水波の領域に関するものである。又、研究手法に関してもいくつかに分類される。主なものをあげると、解析的な取り扱いによるもの、実験的な取り扱いによるもの、及び、数値実験によるもの等である。

これらのうちの解析的手法として古くから用いられているものに、エネルギーフラックスの保存則を用いたものがある。これは、各位置での波動運動は、その位置での水深に対する水平底の波動解で現わされるとし、その波動解から得られるエネルギーフラックスが保存されるとして波高や波長の変化を求めたものである。この方法は、水平底での波動解が、種々の領域で数多く得られているため、適用範囲も広く、又、取り扱いも易しいため多くの場面で実用に供している。しかし局所水平底の仮定からの当然の結果として、波動運動内の水粒子速度や水面波形に対する水底勾配の影響を表現することは不可能となっている。このことから、より厳密な取り扱いとして、水深の変化を基礎方程式の中に取り入れた上で解くことが古くから試みられてきている。しかし、従来なされてきたこの試みは、少なくともその第一近似が長波近似となる様な浅水波の領域のものが大部分である。一方中間波の領域での解析は少なく、特に任意の水深変化に対する解析としては、古くKeller[1]によるものに限られる様に思われる。このKellerによる解は、水面での境界条件は微小振幅として線形化し、水底勾配に対応するパラメータで摂動展開することによって、常微分方程式の漸化式として表現される。原理的には、任意の近似次数まで解くことが出来る様に表わされているが、Kellerが解いているのはその第一近似解だけである。実際、Kellerと同じ手法を用いて、さらに高次の近似解を得るには、数値積分を用いるのではない限り不可能の様である。

著者らの研究は、Kellerと同様、中間波の領域で、水底勾配を考慮してたてた基礎方程式を　Kellerより自然な摂動展開を用いることにより、より高次の近似解まで無理なく解けることを示したものである。

今回は、最初の段階として、微小振幅の仮定のもとでの第二近似まで示すことにする。

2、摂動展開

有次元の変数を記号へを付して、運動方程式及び境界条件を記すと

$$
(1)\quad
\begin{cases}
\hat{\Delta}\hat{\phi} + \hat{\phi}_{\hat{z}\hat{z}} = 0 & \\
\hat{\eta}_{\hat{t}} + \hat{\nabla}\hat{\phi}\cdot\hat{\nabla}\hat{\eta} = \hat{\phi}_{\hat{z}} & ,\ \hat{z} = \hat{\eta} \\
\hat{\phi}_{\hat{t}} + \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2}(\hat{\phi}_{\hat{z}})^2 + \hat{g}\hat{\eta} = \hat{Q} & ,\ \hat{z} = \hat{\eta} \\
\hat{\phi}_{\hat{z}} + \hat{\nabla}\hat{h}\cdot\hat{\nabla}\hat{\phi} = 0 & ,\ \hat{z} = -\hat{h}
\end{cases}
\qquad 但し\quad \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),\ \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)
$$

次の無次元化を行う。但し、$\hat{g}$は重力加速度，$\hat{\omega}$は波動の周波数

$$
(x, y, z) = (\delta\hat{x}, \delta\hat{y}, \hat{z})(\hat{\omega}^2/\hat{g}) \quad , \quad t = \hat{\omega}\hat{t}
$$

$$
\phi = (\hat{\omega}^3/\hat{g}^2)\hat{\phi} \quad , \quad (\eta, h) = (\hat{\eta}, \hat{h})(\hat{\omega}^2/\hat{g}) \quad , \quad Q = (\hat{\omega}^2/\hat{g})\hat{Q}
$$

$$
(2)\begin{cases}
\delta^2\Delta\phi+\phi_{zz}=0 & \\
\eta_t+\delta^2\nabla\phi\cdot\nabla\eta=\phi_z & ,\ z=\eta\\
\phi_t+\frac{\delta^2}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{1}{2}(\phi_z)^2+\eta=Q & ,\ z=\eta\\
\phi_z+\delta^2\nabla h\cdot\nabla\phi=0 & ,\ z=-h
\end{cases}
$$

表面での境界条件の非線形項を無視すると、

$$
(3)\begin{cases}
\delta^2\Delta\phi+\phi_{zz}=0 & \\
\phi_{tt}+\phi_z=0 & ,\ z=0\\
\phi_z+\delta^2\nabla h\cdot\nabla\phi=0 & ,\ z=-h
\end{cases}
$$

但し $\eta=-\phi_t\rfloor_{z=0}$

今、我々は波動解を得ようとしているのであるから、解を

$$
(4)\begin{cases}
\phi=A(x,z)\,e^{i(\delta^{-1}S-t)}\\
\eta=Y(x)\,e^{i(\delta^{-1}S-t)}
\end{cases}
$$

と仮定して、(3)式に代入すると

$$
(5)\begin{cases}
A_{zz}-(\nabla S)^2A+i\delta(2\nabla A\cdot\nabla S+A\Delta S)+\delta^2\Delta A=0 & \\
A_z-A=0 & ,\ z=0\\
A_z+\nabla h\cdot(\delta^2\nabla A+i\delta A\nabla S)=0 & ,\ z=-h\\
Y=iA\rfloor_{z=0}
\end{cases}
$$

ここで、AとYは、微小パラメータ δ について摂動展開されるとして

$$A=A^{(0)}+\delta A^{(1)}+\delta^2A^{(2)}+\cdots\cdots$$
$$Y=Y^{(0)}+\delta Y^{(1)}+\delta^2Y^{(2)}+\cdots\cdots$$

を(5)式に代入して、

δ^0 のオーダーでまとめると

$$
(6)\begin{cases}
A^{(0)}_{zz}-(\nabla S)^2A^{(0)}=0 & \\
A^{(0)}_z-A^{(0)}=0 & ,\ z=0\\
A^{(0)}_z=0 & ,\ z=-h\\
Y^{(0)}=iA^{(0)}\rfloor_{z=0}
\end{cases}
$$

δ^1 のオーダーでまとめると

$$
(7)\begin{cases}
A^{(1)}_{zz}-(\nabla S)^2A^{(1)}=-i(2\nabla A^{(0)}\cdot\nabla S+A^{(0)}\Delta S) & \\
A^{(1)}_z-A^{(1)}=0 & ,\ z=0\\
A^{(1)}_z=-iA^{(0)}\nabla h\cdot\nabla S & ,\ z=-h\\
Y^{(1)}=iA^{(1)}\rfloor_{z=0}
\end{cases}
$$

δ^0 のオーダーの方程式(6)は水平底の微小振幅波と同様に解けて、

$$
(8)\begin{cases}
A^{(0)}=-i\,a(x,y)\cosh\alpha & ,\ \text{但し}\ \alpha=k(z+h)\\
k^2=(\nabla S)^2\\
k\tanh kh=1\\
Y^{(0)}=a\cosh kh
\end{cases}
$$

又は、

$$
(9)\begin{cases}
\phi^{(0)}=a\cosh\alpha\sin(\delta^{-1}S-t)\\
\eta^{(0)}=a\cosh kh\cos(\delta^{-1}S-t)
\end{cases}
$$

δ^1 のオーダーの方程式(7)式に(8)式を代入すると、(7)式は、線形非斉次な常微分方程式だから解ける。

$$A_z=kA_\alpha\qquad,\ \alpha=k(z+h)$$
$$A_{zz}=k^2A_{\alpha\alpha}$$

等を利用して、(7、1)式は、

$$(10)\qquad A_{\alpha\alpha}-A=P\alpha\sinh\alpha+Q\cosh\alpha+R\sinh\alpha$$

$$
\begin{cases}
P=-2k^{-3}a\nabla S\cdot\nabla k\\
Q=-k^{-2}(2\nabla a\cdot\nabla S+a\Delta S)\\
R=-2k^{-1}a\nabla S\cdot\nabla h
\end{cases}
$$

(10)式の特解を

$$(11)\qquad A=C_1\alpha^2\cosh\alpha+C_2\alpha\sinh\alpha+C_3\alpha\cosh\alpha$$

とすると、

$$A_{\alpha\alpha}-A=4C_1\alpha\sinh\alpha+2(C_1+C_2)\cosh\alpha+2C_3\sinh\alpha$$

であるから

$$
(12)\begin{cases}
C_1=-\frac{1}{2}k^{-3}a\nabla S\cdot\nabla k\\
C_2=\frac{1}{2}k^{-3}a\nabla S\cdot\nabla k-\frac{1}{2}k^{-2}(2\nabla a\nabla S+a\Delta S)\\
C_3=-k^{-1}a\nabla S\nabla h
\end{cases}
$$

一方、(10)式の斉次方程式の一般解は $\cosh\alpha$ と $\sinh\alpha$ であるが $\cosh\alpha$ は δ^0 のオーダーの解であり、自由波として δ^0 のオーダーの解に含めて考えるから(10)式の解としては、

$$A=C_1\alpha^2\cosh\alpha+C_2\alpha\sinh\alpha+C_3\alpha\cosh\alpha+C_4\sinh\alpha$$

C_4を決めるために、(7、3)式に代入すると

$$A_z\rfloor_{z=-h}=k(C_3+C_4)=-a\nabla h\nabla S$$

これより、

$$C_4 = 0$$

これで（7）式の解が求まった。すなわち、

$$(13)\quad \begin{cases} A^{(1)} = C_1\alpha^2\cosh\alpha + C_2\alpha\sinh\alpha + C_3\alpha\cosh\alpha \\ Y^{(1)} = i\{C_1(kh)^2\cosh kh + C_2 kh\sinh kh + C_3 kh\cosh kh\} \end{cases}$$

さて、(13)式を求めるにあたって、境界条件（7.2）式は使われていない。この（7.2）式に得られた解を代入すると、a の場所的な変化に関する式が得られる。実際、少々長い変形のあとに、波の進行方向に沿って、

$$a^2(\sinh^2 kh + h)k\,d\sigma = \mathrm{const.}$$

但し、$d\sigma$：波向線の間隔

が得られ、これは、Kellerによる結果と同様、水平底の解によるエネルギーフラックスが保存されることを表わしている。

しかし、エネルギーフラックスの保存則は、（7）式を解いて得られるというより、摂動展開の中で、どう表現されるかを考察する方がより自然であるから、以下次節で述べる。

3、エネルギーフラックス

自由表面を持ったポテンシャル流のエネルギーフラックスは、有次元表示で

$$\hat{F} = \rho\int_{-\hat{h}}^{\hat{\eta}} -\hat{u}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\hat{t}}\,d\hat{z}$$

2節で行なったのと同じ無次元化をすると

$$(15)\qquad F = \hat{F}\Big/\rho\frac{\hat{g}^4}{\hat{\omega}^5} = \int_{-h}^{\eta} -\delta u\frac{\partial\phi}{\partial t}\,dz$$

ここで、我々が得た波動解から

$$\begin{cases} u = \phi_x = \delta^{-1}u^{(0)} + u^{(1)} + \delta u^{(2)} + \cdots \\ \phi_t = \phi_t^{(0)} + \delta\phi_t^{(1)} + \delta^2\phi_t^{(2)} + \cdots \end{cases}$$

を代入すると、F は一般に

$$F = F^{(0)} + \delta F^{(1)} + \delta^2 F^{(2)} + \cdots$$

と表わされる。今、他の独立変量を固定して、δ だけ変化させる状況を設定すると、それは、水深は変化せず水底勾配だけ変化することに対応し、その時その点を通過するエネルギーフラックスは、沖波深水波のエネルギーフラックスが変化しない限り一定に保たれるはずである。すなわち、Fはδに依存せず、$F^{(0)}$だけで表わされる。一方$F^{(0)}$は明らかに、δ^0のオーダーの解（8）式で構成されているから、エネルギーフラックスの保存則は、この摂動展開では、δ^0のオーダーの波だけで成立する。従って、前節では、境界条件を用いて(14)式を得たのだが、ここでの考察から明らかな様に、直接(8)式にエネルギーフラックスの保存則を適用し、a の場所的変化を表わす(14)式を求めても良いことが分る。すると、（7.2）式は条件過剰になる様に感じられるが、そうではない。つまり、この展開では、波数（あるいは波速）が水深だけで決まりδに依存しないとの暗黙の仮定のもとになされたが、より厳密には、δに依存するはずで、それを決めるのに（7、2）式は使われることになる。（詳細は別の機会に報告する。）

4．波高、波速の変化、及び水粒子速度分布、軌道

2節で得られた解をδ^1のオーダーまででまとめると

$$
(16)\quad
\begin{cases}
\phi = A^{(0)}\sin(\delta^{-1}S - t) + \delta A^{(1)}\cos(\delta^{-1}S - t) \\
\qquad A^{(0)} = a\cosh\alpha \quad , \quad A^{(1)} = c_1\alpha^2\cosh\alpha + c_2\alpha\sinh\alpha + c_3\alpha\cosh\alpha \\
\eta = Y^{(0)}\cos(\delta^{-1}S - t) + \delta Y^{(1)}\sin(\delta^{-1}S - t) \\
\qquad Y^{(0)} = a\cosh kh \quad , \quad Y^{(1)} = -c_1(kh)^2\cosh kh - c_2 kh\sinh kh - c_3 kh\cosh kh
\end{cases}
$$

以下、種々の量を具体的に計算するのに、次の状況を設定する。すなわち、等深線はすべて平行な直線となっている海域を、波はそれに直角に進むとする。この場合、各係数はより簡単になって

$$
(17)\quad
\begin{cases}
c_1 = -a k_x/2k^2 \quad , \quad c_2 = -a_x/k \quad , \quad c_3 = -a h_x \\
\nabla S = S_x = k \quad , \quad S = \int k\,dx
\end{cases}
$$

又、(8.3)式、及び(14)式より

$$
(18)\qquad k_x = -\frac{k h_x}{\sinh^2 kh + h} \quad , \quad a_x = -\frac{a}{4}\left(\frac{\sinh 2kh}{\sinh^2 kh + h}\right)^2
$$

さて、これまでは、水平方向の座標はδに圧縮して扱ってきた。以下、正規の座標に戻して考える。すなわち、正規の座標に対して、記号～を付けて表わすと、

$$
x = \delta\tilde{x} \quad , \quad \text{一般に、} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \delta^{-1}\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}
$$

であるから、例へば

$$
\delta c_1 = -\delta a k_x/2k^2 = -a k_{\tilde{x}}/2k^2 \equiv \tilde{c}_1
$$

の様にパラメータδが陽には表われなくなる。以下全てのx，及びx方向の微係数を正規の座標で考え、さらに簡単のため記号～を消略して表わせば、

$$
\phi = A^{(0)}\sin\theta + A^{(1)}\cos\theta
$$

$$
\eta = Y^{(0)}\cos\theta + Y^{(1)}\sin\theta \qquad \text{但し、} \theta = \int k\,dx - t
$$

ここで　$c = 1/k$なる量を考え、あるxで　$t = \int \frac{1}{c}dx + const.$　なるtを考えると、これは、xまでcなる速さで進んだときにかかる時間を表わす。各xにこのtを与えると、θは一定数に保たれ、$\sin\theta$, $\cos\theta$ の値も保存される。このことから、cがこの場合の波速、kが波数を表わしていることが理解される。

次に沖波深水波の波高を設定する。

$$
\left.\begin{aligned}
a^2(\sinh^2 kh + h)k &= C \\
\frac{H^{(0)}}{2} &= a\cosh kh
\end{aligned}\right\} \text{より} \quad \left(\frac{H^{(0)}}{2}\right)^2\left(\tanh kh + \frac{2h}{\sinh 2kh}\right) = C \quad , \quad \left(\frac{H_\infty}{2}\right)^2 = \lim_{h\to\infty}\left(\frac{H^{(0)}}{2}\right)^2 = C
$$

よって

$$
\left(\frac{H_\infty}{2}\right)^2 = a^2(\sinh^2 kh + h)k
$$

表面波形を

$$
\eta = \frac{H}{2}\cos(\theta + \gamma) \quad , \quad \frac{H}{2} = \sqrt{\{Y^{(0)}\}^2 + \{Y^{(1)}\}^2}
$$

とし、各場所でのHの値変化を見るためH/H_∞をh/L_0で最小$0.1/2\pi$まで、h_xで最大$1/5$まで計算してみると、$H^{(0)}/H_\infty$との有意な差は全く見られなかった。これは微小振幅の取り扱いであることから、妥当なことであろう。

流速分布は、

$$u = \phi_x = kA^{(0)}\cos\theta + A_x^{(0)}\sin\theta - kA^{(1)}\sin\theta$$
$$w = \phi_z = A_z^{(0)}\sin\theta + A_z^{(1)}\cos\theta$$

内部での速度場が、水平底仮定の波動解に比較して、どの程度改良されているかを見るため、水粒子の運動軌道を求めてみる。静止位置（x, z）からの変位を（X, Z）で表わすと

$$X - x = -kA^{(0)}\sin\theta + \{A_x^{(0)} - kA^{(1)}\}\cos\theta$$
$$Z - z = A_z^{(0)}\cos\theta - A_z^{(1)}\sin\theta$$

以下、種々の水底勾配、及び水深に対し、水粒子の運動軌道を図1〜図12で示す。図は水深が浅くなると、各軌道楕円が重なって見ずらくなるため適当に離して描いてある。又、静水面に描かれた水平線分は、波長、水底部に描かれた斜め破線は水底勾配 h_x を表わす。この図から、水底近くで水粒子の運動がより現実に近いものに改良されている様子が分かる。又、水底勾配が急な場合、水深が浅くなると近似度が悪くなっていることも分かる。

5、あとがき

以上、中間波の領域で、水深の変化を考慮した微小振幅波の摂動解を示した。この解は、前節で述べた様に、水底勾配が急になるに従って、近似度は悪くなっている。ここで示したのは、δに関する第2近似解であるが、δに関する摂動展開をさらに進めて行くことにより、近似度は改善されていくことが期待される。実際それは、著者等により確かめられている。しかし、3節で述べた様に、この解析では、波数あるいは波速は水深だけで定まり、δには依存しないと仮定されているが、さらに展開を進めたとき、この仮定が成立しているという保障はない。この点を確かめるには、波数もδで摂動展開した別の解析が必要となる。詳しくは別の機会に報告するが、結論だけ述べると、確かに、第2近似解までは波数は水深だけで定まるが、第3近似解まで求めると、波数は、さらに水底勾配にも依存していることがわかる。

又、今回の解析では、微小振幅の仮定のもとに行ったが、さらに有限振幅を考慮した振幅展開を同時に行うことも可能であり、その様な展開では、水面波形に対する水底勾配の影響も推定することが可能となる。この解析は現在進めており、これも別の機会に報告したい。

参考文献

(1) Keller, J. B. ; Surface waves on water of non-uniform depth, Jour. Fluid Mech., Vol.4, 1958

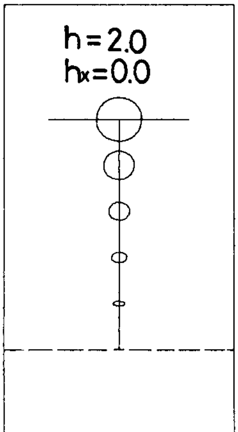

図 1

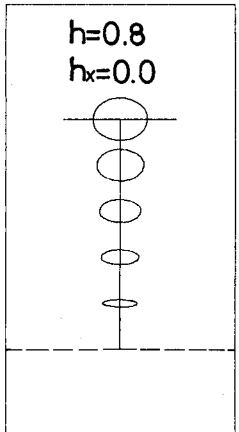

図 2

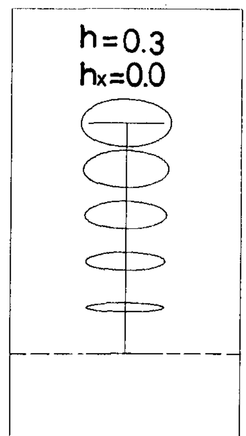

図 3

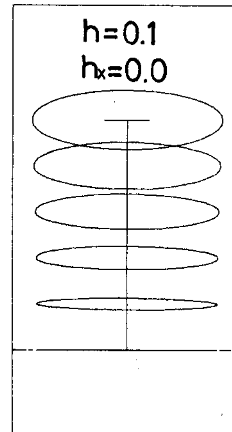

図 4

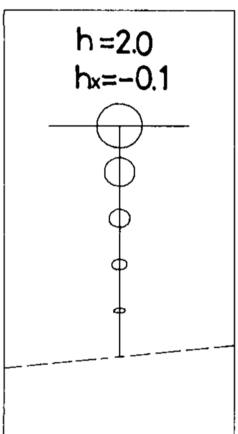

図 5

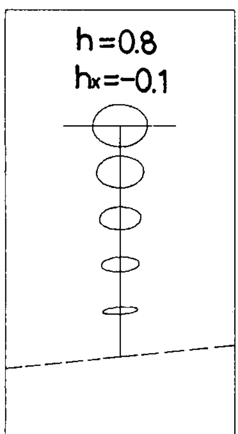

図 6

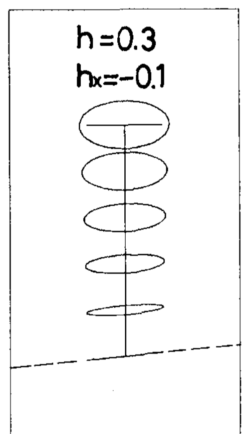

図 7

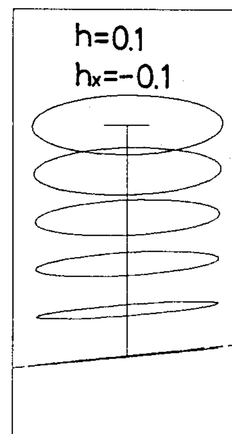

図 8

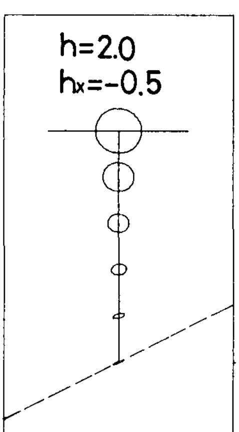

図 9

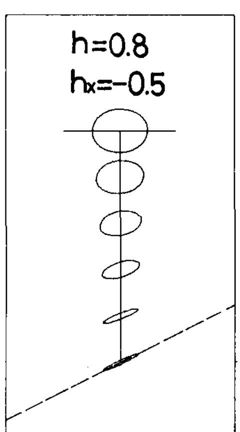

図 10

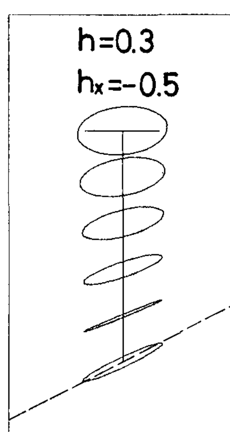

図 11

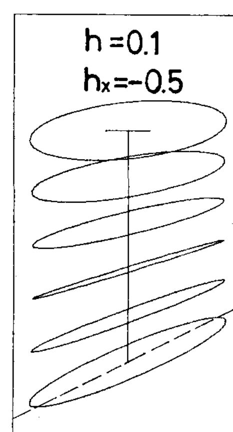

図 12