

I-21 変断面連続桁の曲げ振特性に関する研究

函館工業高等専門学校 正員 三浦 登

1. まえがき

最近、 π 形断面の2主桁鋼床板連続桁橋が多用されてきている。この形式の橋については、曲げ荷重に対してすでに十分研究し盡くされているが、ねじり荷重に対しては、まだ十分とはいえず、特に主桁断面が変断面の場合の研究は殆んどないと言ってよい。本研究では、変断面連続桁にねじり荷重を与えたときのねじり角、捩り率、そりモーメント、ねじりモーメントの性状の変化を解析的に追求してみた。

2. 曲げねじりを考慮したねじりをうける桁の剛性マトリックスの誘導

梁は図-1のように右手座標系をとる。梁の要素の中間には分布トルクはないから、 $m_D(x) = 0$ として次の微分方程式を得る。

$$EC_w \varphi'''' - GJ_T \varphi'' = m_D(x) = 0$$

または

$$\varphi'''' - \frac{GJ_T}{EC_w} \varphi'' = 0$$

ここで $\lambda^2 = [GJ_T]/[EC_w]$ とおけば

$$\varphi'''' - \lambda^2 \varphi'' = 0 \quad (1)$$

α を未定係数として求める解を $\varphi = e^{\alpha x}$ とおき式(1)に代入して

$$\alpha^4 e^{\alpha x} - \lambda^2 \alpha^2 e^{\alpha x} = 0 \quad \text{から} \quad \alpha^2 (\alpha^2 - \lambda^2) = 0$$

したがって式(1)の一般解は

$$\varphi = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-\lambda x} + C_4 e^{\lambda x}$$

ここで $e^{-\lambda x} = \cosh \lambda x - \sinh \lambda x$, $e^{\lambda x} = \cosh \lambda x + \sinh \lambda x$ の関係から

$$\varphi = C_1 + C_2 x + C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x \quad (2)$$

$$\varphi' = C_2 + C_3 \lambda \sinh \lambda x + C_4 \lambda \cosh \lambda x \quad (3)$$

$$\varphi'' = \lambda^2 (C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x) \quad (4)$$

$$\varphi''' = \lambda^3 (C_3 \sinh \lambda x + C_4 \cosh \lambda x) \quad (5)$$

ねじり角 φ と そりモーメント $M_w(x)$ および 全ねじりモーメント $T(x)$ の関係は

$$\begin{aligned} M_w(x) &= -EC_w \varphi''(x) \\ &= -GJ_T (C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x) \quad (6) \end{aligned}$$

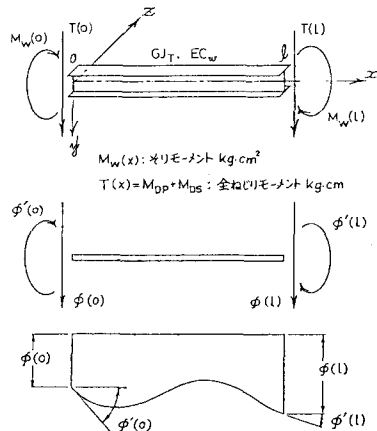


図-1

[記号]

$\varphi(x)$	: ねじり角	(radian)
G	: せん断弾性係数	(kg/cm ²)
E	: ヤング係数	(kg/cm ²)
J_T	: 純ねじり定数	(cm ⁴)
C_w	: そりねじり定数	(cm ⁶)
$M_w(x)$	: そりモーメント	(kg-cm ²)
$T(x)$	: 全ねじりモーメント	(kg-cm)
M_{DP}	: 純ねじりモーメント	(kg-cm)
M_{DS}	: そりねじりモーメント	(kg-cm)

$$T(x) = M_{DP}(x) + M_{DS}(x) = GJ_T \varphi'(x) - EC_w \varphi'''(x) = GJ_T C_2 \quad (7)$$

この断面に対して $x=0$ において 式(2), (3), (6), (7) から任意常数 C_1, C_2, C_3, C_4 を Anfang Parameter $\varphi(0), \varphi'(0), M_w(0), T(0)$ で表す。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= C_1 + C_3, & \varphi'(0) &= C_2 + C_4 \lambda \\ M_w(0) &= -C_3 \cdot GJ_T, & T(0) &= C_2 \cdot GJ_T \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

任意常数について解いて

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \varphi(0) + \frac{M_w(0)}{GJ_T}, & C_2 &= \frac{T(0)}{GJ_T} \\ C_3 &= -\frac{M_w(0)}{GJ_T}, & C_4 &= \frac{1}{\lambda} \left[\varphi'(0) - \frac{T(0)}{GJ_T} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(9)を式(2), (3), (6), (7) に代入して $\varphi(x), \varphi'(x), M_w(x), T(x)$ の一般式を得る。

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0) \frac{\sinh \lambda x}{\lambda} + \frac{M_w(0)}{GJ_T} (1 - \cosh \lambda x) + \frac{T(0)}{GJ_T} \left(x - \frac{\sinh \lambda x}{\lambda} \right) \quad (10.1)$$

$$\varphi'(x) = \varphi'(0) \cosh \lambda x - \frac{M_w(0)}{GJ_T} \cdot \lambda \sinh \lambda x + \frac{T(0)}{GJ_T} (1 - \cosh \lambda x) \quad (10.2)$$

$$M_w(x) = -\varphi'(0) \cdot GJ_T \frac{\sinh \lambda x}{\lambda} + M_w(0) \cdot \cosh \lambda x + T(0) \cdot \frac{\sinh \lambda x}{\lambda} \quad (10.3)$$

$$T(x) = GJ_T \cdot C_2 = GJ_T \times \frac{T(0)}{GJ_T} = T(0) \quad (10.4)$$

式(10.1~4)は $x=0$ における曲げねじり量 $\varphi(0), \varphi'(0), M_w(0)$ および $T(0)$ を x 断面の曲げねじり量 $\varphi(x), \varphi'(x), M_w(x)$ および $T(x)$ に変換したもので 表-1 の Anfang Parameter 行列でその係数を示す。式(10.1~4)で $x=l$ とおく。即ち 表-1 で $x=l$ において表-2 を得る。表-2 を表-3 のように置き換える。即ち

$$u(l) = \begin{Bmatrix} \varphi(l) \\ \varphi'(l) \end{Bmatrix}, \quad u(0) = \begin{Bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi'(0) \end{Bmatrix}, \quad X(l) = \begin{Bmatrix} M_w(l) \\ T(l) \end{Bmatrix}, \quad X(0) = \begin{Bmatrix} M_w(0) \\ T(0) \end{Bmatrix}$$

$$u(l) = K_{11} u(0) + K_{12} X(0), \quad X(l) = K_{21} u(0) + K_{22} X(0) \quad (11)$$

式(11) から $X(0)$ と $X(l)$ について解くと

表-1: Anfang Parameter 行列

	$\varphi(0)$	$\varphi'(0)$	$M_w(0)$	$T(0)$
$\varphi(x)$	1	$\frac{\sinh \lambda x}{\lambda}$	$\frac{1}{GJ_T} (1 - \cosh \lambda x)$	$\frac{1}{GJ_T} (x - \frac{\sinh \lambda x}{\lambda})$
$\varphi'(x)$	0	$\cosh \lambda x$	$-\frac{1}{GJ_T} \lambda \sinh \lambda x$	$\frac{1}{GJ_T} (1 - \cosh \lambda x)$
$M_w(x)$	0	$-GJ_T \frac{\sinh \lambda x}{\lambda}$	$\cosh \lambda x$	$\frac{\sinh \lambda x}{\lambda}$
$T(x)$	0	0	0	1

表-2

	$\varphi(0)$	$\varphi'(0)$	$M_w(0)$	$T(0)$
$\varphi(l)$	1	$\frac{\sinh \lambda l}{\lambda}$	$\frac{1}{GJ_T} (1 - \cosh \lambda l)$	$\frac{1}{GJ_T} (l - \frac{\sinh \lambda l}{\lambda})$
$\varphi'(l)$	0	$\cosh \lambda l$	$-\frac{1}{GJ_T} \lambda \sinh \lambda l$	$\frac{1}{GJ_T} (1 - \cosh \lambda l)$
$M_w(l)$	0	$-GJ_T \frac{\sinh \lambda l}{\lambda}$	$\cosh \lambda l$	$\frac{\sinh \lambda l}{\lambda}$
$T(l)$	0	0	0	1

$$\left. \begin{aligned} X(0) &= -K_{12}^{-1} \cdot K_{11} \cdot u(0) + K_{12}^{-1} \cdot u(l) \\ X(l) &= \{K_{21} - K_{22} \cdot K_{12}^{-1} \cdot K_{11}\} u(0) + K_{22} \cdot K_{12}^{-1} u(l) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式(12)を表-4にまとめる。

表-3

	$u(0)$	$X(0)$
$u(l)$	K_{11}	K_{12}
$X(l)$	K_{21}	K_{22}

表-4

		$\varphi(0)$	$\varphi'(0)$	$\varphi(l)$	$\varphi'(l)$
		$u(0)$		$u(l)$	
$M_w(0)$	$X(0)$	$-K_{12}^{-1} \cdot K_{11}$		K_{12}^{-1}	
$T(0)$					
$M_w(l)$	$X(l)$	$K_{21} - K_{22} \cdot K_{12}^{-1} \cdot K_{11}$		$K_{22} \cdot K_{12}^{-1}$	
$T(l)$					

表-5 $\{a_{ij}\} \times l/(GJ_T)$

	$\varphi(0)$	$\varphi'(0)$	$\varphi(l)$	$\varphi'(l)$
$M_w(0)$	$\cosh \lambda l - 1$	$l \cosh \lambda l - \frac{\sinh \lambda l}{\lambda}$	$-(\cosh \lambda l - 1)$	$\frac{\sinh \lambda l}{\lambda} - l$
$T(0)$	$-\lambda \sinh \lambda l$	$-(\cosh \lambda l - 1)$	$\lambda \sinh \lambda l$	$-(\cosh \lambda l - 1)$
$M_w(l)$	$-(\cosh \lambda l - 1)$	$-(\frac{\sinh \lambda l}{\lambda} - l)$	$\cosh \lambda l - 1$	$-(l \cosh \lambda l - \frac{\sinh \lambda l}{\lambda})$
$T(l)$	$-\lambda \sinh \lambda l$	$-(\cosh \lambda l - 1)$	$\lambda \sinh \lambda l$	$-(\cosh \lambda l - 1)$

表-6 $\{b_{ij}\} \times l/(GJ_T)$

変位	$\varphi(0)$	$\varphi'(0)$	$\varphi(l)$	$\varphi'(l)$
$T(0)$	$\lambda \sinh \lambda l$	$\cosh \lambda l - 1$	$-\lambda \sinh \lambda l$	$\cosh \lambda l - 1$
$M_w(0)$	$\cosh \lambda l - 1$	$l \cosh \lambda l - \frac{\sinh \lambda l}{\lambda}$	$-(\cosh \lambda l - 1)$	$\frac{\sinh \lambda l}{\lambda} - l$
$T(l)$	$-\lambda \sinh \lambda l$	$-(\cosh \lambda l - 1)$	$\lambda \sinh \lambda l$	$-(\cosh \lambda l - 1)$
$M_w(l)$	$\cosh \lambda l - 1$	$\frac{\sinh \lambda l}{\lambda} - l$	$-(\cosh \lambda l - 1)$	$l \cosh \lambda l - \frac{\sinh \lambda l}{\lambda}$

ここで、表-4の係数は $|K_{12}|$ を式(13)のように $1/l$ とおくと式(14)~(17)となる。

$$|K_{12}| = (2 - 2 \cosh \lambda l + \lambda \sinh \lambda l) / (GJ_T)^2 \equiv \frac{1}{l} \quad (13)$$

$$K_{12}^{-1} = \frac{\text{adj } K_{12}}{|K_{12}|} = \frac{l}{GJ_T} \begin{bmatrix} 1 - \cosh \lambda l & \frac{\sinh \lambda l}{\lambda} - l \\ \lambda \sinh \lambda l & 1 - \cosh \lambda l \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$-K_{12}^{-1} \cdot K_{11} = \frac{l}{GJ_T} \begin{bmatrix} \cosh \lambda l - 1 & l \cosh \lambda l - \frac{\sinh \lambda l}{\lambda} \\ -\lambda \sinh \lambda l & 1 - \cosh \lambda l \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$K_{21} - K_{22} \cdot K_{12}^{-1} \cdot K_{11} = \frac{l}{GJ_T} \begin{bmatrix} 1 - \cosh \lambda l & l - \frac{\sinh \lambda l}{\lambda} \\ -\lambda \sinh \lambda l & 1 - \cosh \lambda l \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$K_{22} \cdot K_{12}^{-1} = \frac{l}{GJ_T} \begin{bmatrix} \cosh \lambda l - 1 & \frac{\sinh \lambda l}{\lambda} - l \cosh \lambda l \\ \lambda \sinh \lambda l & 1 - \cosh \lambda l \end{bmatrix} \quad (17)$$

式(13)~(17)を表-4に代入して表-5を得る。表-5で $T(0)$ と $M_w(0)$ を入れ換之符号を吟味して表-6の剛性マトリックスを得る。

表-7 断面値

			開き断面	閉き断面
断面積	m^2	F	7.680×10^2	7.680×10^2
断面二次 モメント	m^4	I	2.208×10^2	2.208×10^2
純ねじ定数	m^4	J_T	0.0003×10^2	2.6075×10^{-2}
ねじり定数	m^6	C_w	1.7591×10^2	0.0826×10^2
剛比	m^{-1}	λ	0.008	3.481

3. 変断面連続桁の曲げねじり特性

3.1 断面諸元

曲げねじり特性を考察するために、ここで扱う変断面の形状は断面積 $F=7.680 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ と断面2次モーメント $I=2.208 \times 10^{-2} \text{ m}^4$ の等しい開き断面と閉じ断面各1種とし、それぞれの断面形状、重心位置、せん断中心位置単位ソリ図(図2)、ねじり定数 J_T 、ソリねじり定数 C_w を図-2から図-5および表-7のとおりとする。

3.2 開き断面と閉じ断面の混合変断面連続桁の一般図

開き断面部と閉じ断面部をもつ混合変断面連続桁を示すと図-6のとおりである。ここで白地部分は開き断面部(図-2)、影線部分は閉じ断面部(図-3)である。

3.3 ねじり角 φ 図、ねじり率 φ' 図、ソリモーメント M_w 図、ねじりモーメント T 図

図-6に示すように A, B, C, D 型各3ケース合計12ケースについて、 φ , φ' , M_w , T の計算結果を図示すると図-7より図-14までのとおりである。ここで荷重としては中央径間中央点に集中トルク $T=1 \text{ tm}$ を作用させた場合(図-7~図-10)と、中央径間に等分布トルク $t=1 \text{ tm/m}$ を作用させた場合(図-11~図-14)を計算した。

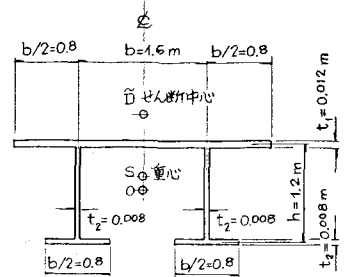


図-2

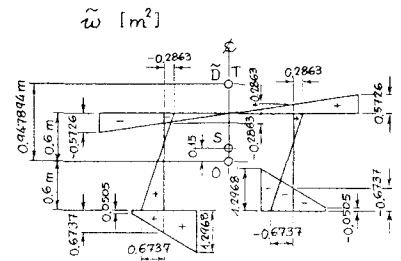


図-3

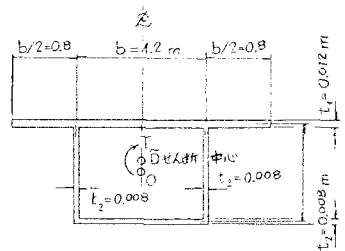


図-4

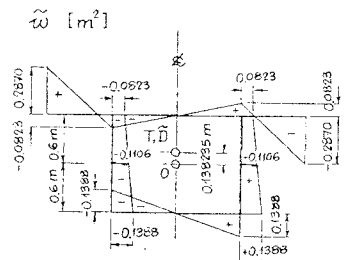


図-5

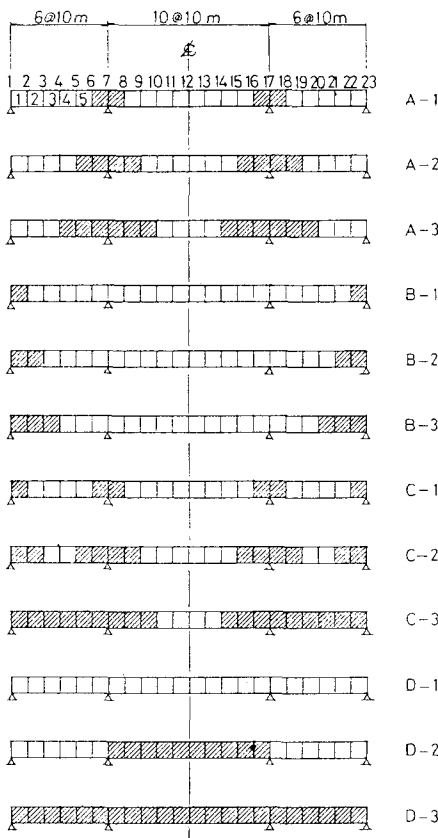


図-6

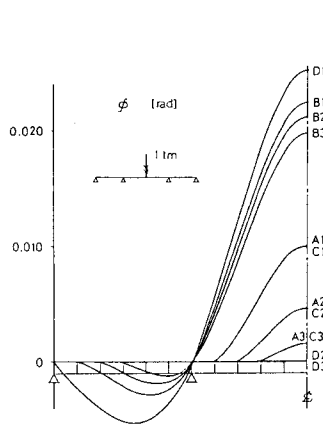


图-7

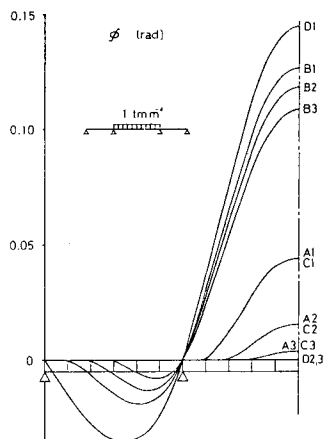


图-8

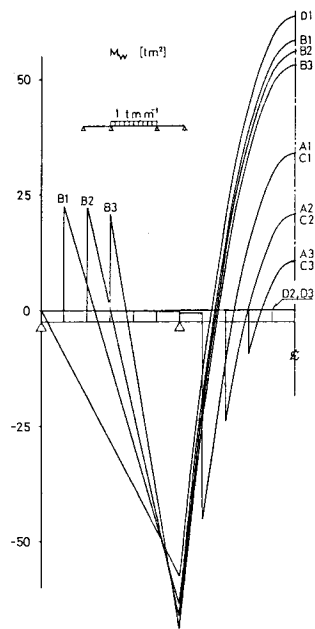


图-13

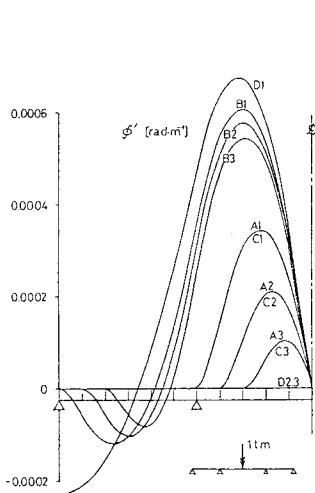


图-9

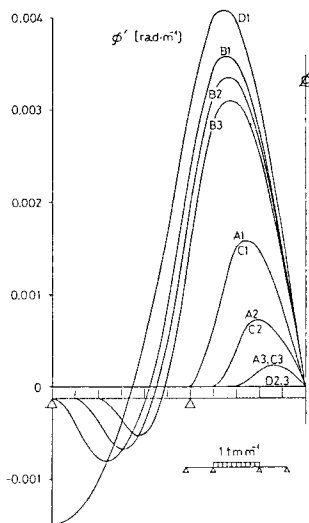


图-10

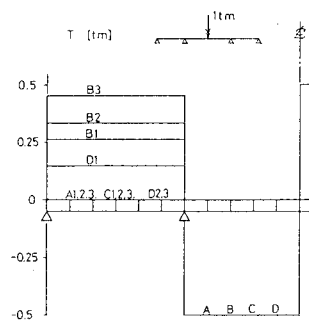


图-11

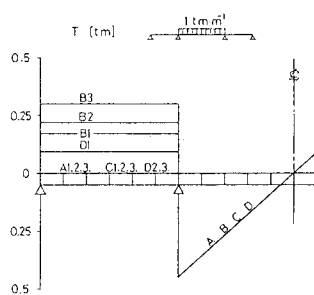


图-12

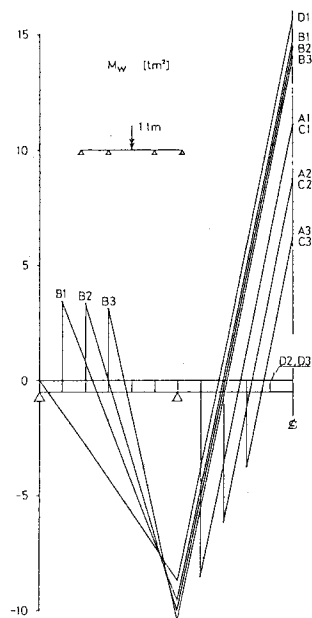


图-14

3.4 構造特性

曲げねじりに対する強さの特性について、次のような結果が得られた。

- (1) 全径間にわたって開き断面のみの D-1 型は最も弱い。
- (2) 中央径間が開き断面、橋台部附近が閉じ断面の B 型は D-1 型よりやや強くなるが、その強さの増大はそれほど大きくない。
- (3) 橋脚部附近のみが閉じ断面の A 型は A-1, A-2, A-3 になるにつれて顕著に強くなる。
- (4) 橋台・橋脚部附近ともに閉じ断面の C-1, C-2, C-3 型は A-1, A-2, A-3 型と大差ない。
- (5) D-2, D-3 型は最も強く、D-2, D-3 は大差ない。

4. あとがき

図-15 の略図が示すように π 型開き断面の 3 径間連続桁において、中間支台附近の影線部のように、 $a \approx l/10$ 程度のみを閉じ断面とすることによって、3 径間連続桁全体の曲げねじりに対する剛性を顕著に増大させることがわかった。したがって、このような設計の採用が得策と考えられる。

本研究をすすめるうえで北海道大学 渡辺 昇教授には理論面の指導をいただき、また 林川 俊郎 助手には数値計算上の助力をいただいた。ここに深謝の意を表します。

なお本計算には、北海道大学大型計算機センターの HITAC-M200 を使用した。

[参考文献]

渡辺 昇：「開き断面連続桁と閉じ断面連続桁の曲げおよび拘束振れによる応力の計算」

工学研究 Vol. 11, No. 10, 12, Vol. 12, No. 1.

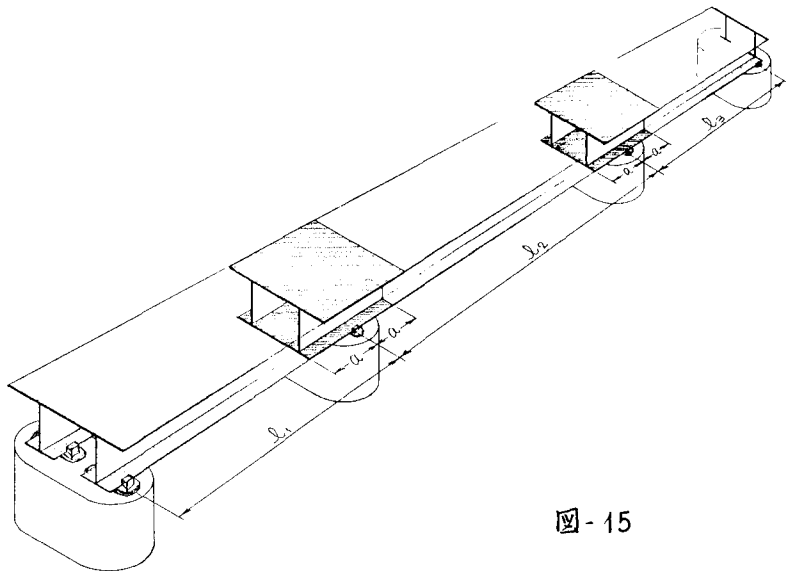


図-15