I—20　格子桁の一解法

北見工業大学　正員　○菅原　登
北見工業大学　正員　尾中　孝美

1、まえがき

格子桁の解法には代表的なものとして Leonhardt の方法, Homberg の方法, Guyon-Massonnet の方法などがあり, それらはいずれも巧妙に解析を進めて, 不静定力や断面力を求める上で, 便利な成果表や図表をまとめた。しかし, 実際に利用する場合には、格子桁に関する理論やそれぞれの特色を理解しなければ十分な目的を達成することはできない。

本研究では, 格子桁において主桁と横桁はI形断面で曲げ剛性のみを有し, かつ主桁と横桁は hinge で連結されている構造形式のものについて解析を試みたものである。すなわち、主桁及び横桁のそれぞれの撓みの基礎微分方程式を, 集中荷重PとPによって誘発される格点力で表し, 格点において主桁の撓みと横桁の撓みは等しいという条件を適合させて格点力を求めた。

2、撓みの方程式

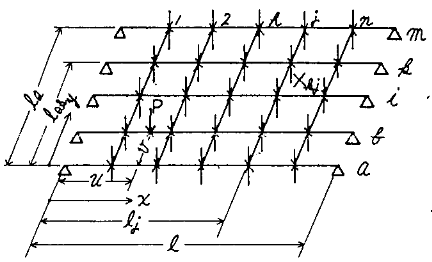
図-1

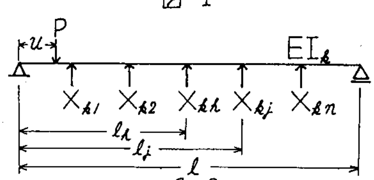

図-2

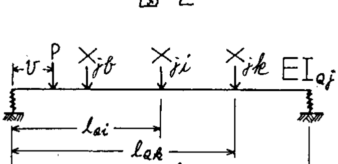

図-3

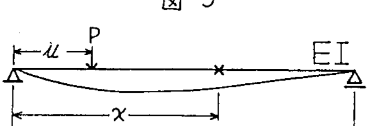

図-4

図-1のように主桁m本, 横桁n本よりなる格子桁において, 主桁と横桁は曲げ剛性のみを有し, かつ主桁と横桁は hinge で連結されている場合, これは内的に(m-2)n次の不静定構造である。

この格子桁の任意点上にPが載荷すれば格点力が誘発され, その状態で主桁と横桁を開放すれば, 主桁は図-2のようにP（載荷点によってPがない場合もある）と格点力が作用した両端剛支承の梁に置換できる。同様に横桁は図-3のようにP（載荷点によってPがない場合もある）と格点力が作用した両端弾性支承の梁に置換できる。

したがって、主桁の基礎微分方程式は次のように与えられる。

$$EI_k\frac{d^4w_k}{dx^4}=P\delta(x-u)-\sum_{h=1}^{n}X_{kh}\delta(x-l_h) \qquad (1)$$

式(1)の両辺をラプラス変換及びラプラス逆変換すれば、4箇の未知数を含む撓みの式が得られるが、両支点における境界条件 $w_k(0)=w_k''(0)=w_k(l)=w_k''(l)=0$ を適用して撓みの式が求まる。

同様に, 横桁の基礎微分方程式は次のように与えられる。

$$EI_{aj}\frac{d^4w_j}{dy^4}=P\delta(y-v)-\sum_{i=b}^{m-1}X_{ji}\delta(y-l_{ai}) \qquad (2)$$

この場合には、両支点における境界条件 $w_j(0)=w_a(l_j)$, $w_j(l_a)=w_m(l_j)$, $w_j''(0)=w_j''(l_a)=0$ を適用して撓みの式が求まる。

いま, 図-4のようにスパン l の梁において, 点 u に P が載荷したときの点 x の撓みを, u 及び x を含む次の関数で表す。

$$w(x)=\left[\frac{x(l-u)}{6EIl}\{-x^2+l^2-(l-u)^2\}+\frac{1}{6EI}\langle(x-u)^3\rangle_u^l\right]P=F(x,u)P \qquad (3)$$

同様に，スパンl_aの梁において，点vにPが載荷したときの点yの撓みを，v及びyを含む次の関数で表す。

$$w(y)=\left[\frac{y(l_a-v)}{6EI_a l_a}\{-y^2+l_a^2-(l_a-v)^2\}+\frac{1}{6EI_a}\langle (y-v)^3\rangle_{v}^{l_a}\right]P=G(y,v)P \tag{4}$$

次に，主桁及び横桁の撓みをPの載荷点によって分類し，それぞれの場合における撓みの式を求めて，その結果を示すと次のようになる。

主桁kの撓みの式

1)Pが主桁kに載荷

$$w_k(x)=-\sum_{h=1}^{n}F(x,l_h)X_{kh}+F(x,u)P \tag{5}$$

2)Pが主桁k以外に載荷

$$w_k(x)=-\sum_{h=1}^{n}F(x,l_h)X_{kh} \tag{6}$$

横桁jの撓みの式

1)Pが主桁aに載荷

$$w_j(y)=-\left(1-\frac{y}{l_a}\right)\sum_{h=1}^{n}F(l_j,l_h)X_{ah}-\frac{y}{l_a}\sum_{h=1}^{n}F(l_j,l_h)X_{mh}+\sum_{i=b}^{m-1}G(y,l_{ai})X_{ji}+\left(1-\frac{y}{l_a}\right)F(l_j,u)P \tag{7}$$

2)Pが主桁mに載荷

$$w_j(y)=-\left(1-\frac{y}{l_a}\right)\sum_{h=1}^{n}F(l_j,l_h)X_{ah}-\frac{y}{l_a}\sum_{h=1}^{n}F(l_j,l_h)X_{mh}+\sum_{i=b}^{m-1}G(y,l_{ai})X_{ji}+\frac{y}{l_a}F(l_j,u)P \tag{8}$$

3)Pが横桁jに載荷

$$w_j(y)=-\left(1-\frac{y}{l_a}\right)\sum_{h=1}^{n}F(l_j,l_h)X_{ah}-\frac{y}{l_a}\sum_{h=1}^{n}F(l_j,l_h)X_{mh}+\sum_{i=b}^{m-1}G(y,l_{ai})X_{ji}+G(y,v)P \tag{9}$$

4)Pが横桁j以外に載荷

$$w_j(y)=-\left(1-\frac{y}{l_a}\right)\sum_{h=1}^{n}F(l_j,l_h)X_{ah}-\frac{y}{l_a}\sum_{h=1}^{n}F(l_j,l_h)X_{mh}+\sum_{i=b}^{m-1}G(y,l_{ai})X_{ji} \tag{10}$$

ここで，式(7)及び(8)は横桁jに直接Pが載荷されていない状態ではあるが，横桁jの両端弾性支承部の撓みはPによる影響をも受けるので，当然Pの項が加わることになる。

このようにして撓みの式が求められるので，一例として曲げモーメントの式は，それぞれの撓みの式を微分して得られ，その結果を示すと次のようになる。

主桁kの曲げモーメントの式

1)Pが主桁kに載荷

$$M_k(x)=\sum_{h=1}^{n}\left\{-\frac{x}{l}(l-l_h)+\langle(x-l_h)\rangle_{l_h}^{l}\right\}X_{kh}+\left\{\frac{x}{l}(l-u)-\langle(x-u)\rangle_{u}^{l}\right\}P \tag{11}$$

2)Pが主桁k以外に載荷

$$M_k(x)=\sum_{h=1}^{n}\left\{-\frac{x}{l}(l-l_h)+\langle(x-l_h)\rangle_{l_h}^{l}\right\}X_{kh} \tag{12}$$

横桁jの曲げモーメントの式

1)Pが横桁jに載荷

$$M_j(y)=\sum_{i=b}^{m-1}\left\{\frac{y}{l_a}(l_a-l_{ai})-\langle(y-l_{ai})\rangle_{l_{ai}}^{l_a}\right\}X_{ji}+\left\{\frac{y}{l_a}(l_a-v)-\langle(y-v)\rangle_{v}^{l_a}\right\}P \tag{13}$$

2) P が横桁 j 以外に載荷

$$M_j(y)=\sum_{i=b}^{m-1}\left\{\frac{y}{l_a}(l_a-l_{ai})-\left\langle (y-l_{ai})\right\rangle_{l_{ai}}^{l_a}\right\}X_{ji} \tag{14}$$

ここで，式(14)からPが縦主桁に載荷しても，横桁の両端は hinge で連結されているから，横桁 j には P の項が加わらないことが分る。

3. 格点力

さきに求めた撓みの式には，未知数である格点力が入っているから，これを計算しなければ撓みは得られない。縦主桁 a 及び m と横桁との格点力を P の載荷点によって分類し，横桁の両端において $\sum M=0$ の釣合条件を適用して，それぞれの場合における格点力を求めれば次のようになる。

1) P が主桁及び横桁 j 以外に載荷

$$X_{ha}=-\sum_{i=b}^{m-1}\frac{l_a-l_{ai}}{l_a}X_{hi},\qquad X_{hm}=-\sum_{i=b}^{m-1}\frac{l_{ai}}{l_a}X_{hi} \tag{15}$$

2) P が横桁 j に載荷

$$X_{ha}=-\sum_{i=b}^{m-1}\frac{l_a-l_{ai}}{l_a}X_{hi}-\frac{l_a-v}{l_a}P,\qquad X_{hm}=-\sum_{i=b}^{m-1}\frac{l_{ai}}{l_a}X_{hi}-\frac{v}{l_a}P \tag{16}$$

また，中主桁と横桁との格点力については，さきに求めた主桁及び横桁の撓みの式に $(m-2)n$ 箇のそれぞれの格点において，主桁の撓みと横桁の撓みは等しいという条件を適用して整理すれば，$(m-2)n$ 箇の格点力を含む $(m-2)n$ 箇の方程式が得られるから，これを次のように表す。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{bb} & \mathbb{A}_{bc} & & \mathbb{A}_{b\,m-1} \\ \mathbb{A}_{cb} & \mathbb{A}_{cc} & & \mathbb{A}_{c\,m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{A}_{m-1\,b} & \mathbb{A}_{m-1\,c} & & \mathbb{A}_{m-1\,m-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{X}_b \\ \mathbb{X}_c \\ \vdots \\ \mathbb{X}_{m-1} \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} \mathbb{B}_b \\ \mathbb{B}_c \\ \vdots \\ \mathbb{B}_{m-1} \end{bmatrix} \tag{17}$$

ここで，

$$\mathbb{A}_{\alpha\beta}=\left[a_{\xi\eta}\right]\qquad \xi,\eta=1,2,\ldots\ldots n \tag{18}$$

$\xi=\eta$ のとき　$a_{\xi\eta}=\left(1+\dfrac{l_{ai}}{l_a}\right)F(l_a,l_j)-G(l_{ai},l_{ai})$

$\xi\neq\eta$ のとき　$a_{\xi\eta}=\left(1+\dfrac{l_{ai}}{l_a}\right)F(l_a,l_j)$

$$\mathbb{X}_b=\begin{bmatrix} X_{b1} \\ \vdots \\ X_{bn} \end{bmatrix},\quad \mathbb{X}_c=\begin{bmatrix} X_{c1} \\ \vdots \\ X_{cn} \end{bmatrix},\quad \cdots\cdots\quad \mathbb{X}_{m-1}=\begin{bmatrix} X_{m-1\,1} \\ \vdots \\ X_{m-1\,n} \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\mathbb{B}_\alpha=\left[b_\xi\right] \tag{20}$$

P が主桁 a に載荷　$b=\left(1+\dfrac{l_{ai}}{l_a}\right)F(l_a,u)$

P が主桁 m に載荷　$b=\dfrac{l_{ai}}{l_a}F(l_a,u)$

Pが中主桁に載荷　　$f=-F(l_h, u)$

Pが横桁jに載荷　　$f=\left(1-\frac{l_{ai}}{l_a}\right)\left(1-\frac{v}{l_a}\right)F(l_h, l_j)+\frac{l_{ai}}{l_a}\frac{v}{l_a}F(l_h, l_j)+G(l_{ai}, v)$

Pが横桁j以外の横桁に載荷　　$f=\left(1-\frac{l_{ai}}{l_a}\right)\left(1-\frac{v}{l_a}\right)F(l_h, l_j)+\frac{l_{ai}}{l_a}\frac{v}{l_a}F(l_h, l_j)$

とする。なお式(17)の左辺第1項は，Pの載荷点に無関係に格子桁の構造形式から決まる定数である。この式を解いて$(m-2)n$箇の格点力が求まるから，これを式(15)及び(16)に代入して縁主桁の格点力も求まる。以上のようにしてすべての格点力が求まるから，これを撓みの式に代入すれば撓みが計算される。

4. 計算例

一例として主桁3本，横桁3本よりなる格子桁について，$l_1=7m$，$l_2=14m$，$l_3=21m$，$l=28m$，$l_{ab}=3m$，$l_a=6m$，$I=1.619\times10^6 cm^4$，$I_Q=I\cdot 1/10=1.619\times10^5 cm^4$，$E=2.1\times10^6 kg/cm^2$であるとき，主桁は8分割，横桁は4分割した場合の各点における撓み及び曲げモーメントの影響線を求めた。その一部を図示すれば図-5及び図-6のようになる。

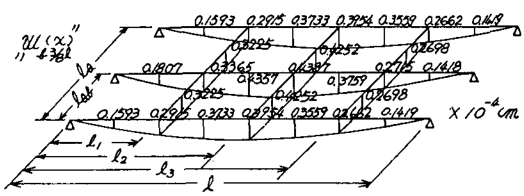

図-5

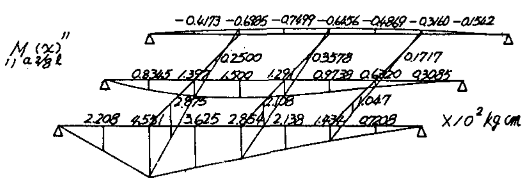

図-6

5. あとがき

この解法とは別に，基本系として中主桁を開放したものを選び，代わりに格点に不静定力を挿入して弾性方程式を導く応力法による数値計算も行ったが両者の数値は一致した。数値計算に当たっては，北見工業大学における電子計算機ACOS-4を使用したが，プログラムカードの枚数及び計算時間は，ともに1/2程度ですんだ。

この解法は，不静定力を格点における主桁の撓みと横桁の撓みは等しいという条件を適用して求めるので，計算手法が簡単である。また撓みの式が求まれば，その微分式から容易に断面力が得られる利点を有している。

なお，この理論を拡張して，主桁は箱形断面で曲げ剛性とねじり剛性を有し，かつ主桁と横桁は剛結されている構造形式の格子桁についての解析は，機会を改めて発表の予定である。

参考文献

1) 渡辺　昇：　格子桁の理論と計算，技報堂，1965
2) 野邑　雄吉：　応用数学，内田老鶴圃，1966
3) 近藤　次郎：　演算子法，培風館，1968
4) 猪瀬，竹下：　梁の理論，森北出版，1965
5) 菅原，尾中：　ランガー桁橋の一解法，土木学会北海道支部論文報告集第37号，1981