

I-15 セン断変形と回転慣性を考慮した吊橋の固有振動解析

北海道大学工学部 正員 林 川 俊 郎

1. まえがき

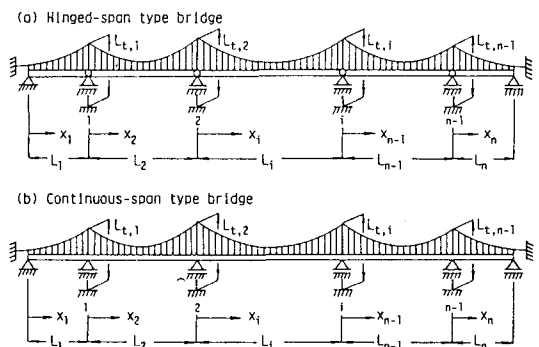
吊橋はその建設された時代とその国の土木技術水準を表わすといわれている。吊橋の静的解析理論は古く / 9 世紀初期から始められ、解析理論として最初にまとめられたものはNavierによる弾性理論である。その後、吊橋特有の理論である撓度理論の考え方はRitter、Melanによって示された。さらに、その解析方法はSteinman、Timoshenkoによって一般化撓度理論に発展し、吊橋の長大化が急に促進された。吊橋の支間長が長大化するにつれて、活荷重と死荷重との比が次第に小さくなり、活荷重によるケーブルの水平張力の増分による荷重軽減が相対的に小さくなる傾向がある。このことから、撓度理論の非線形項を省略し、より簡明な線形化撓度理論がGodardにより提案された。この近似的解法が示されてから吊橋の実用計算法に関する研究は多くの研究者によって扱われてきている。また、電子計算機の発達に伴って、吊橋を骨組構造物と考え変形法による解析が試みられている。その中でも特に、倉西の行列法、後藤の有限変形理論、Saafanの接線剛性マトリックスを用いた一連の研究がある。現在、吊橋の有限変形理論と撓度理論との対応づけがなされつつあり、その内容は文献¹⁾に詳しく説明されている。

吊橋の固有振動解析は静的問題の場合と同様に、簡便性のある線形化撓度理論に基づく計算方法が用いられ、吊橋の動的設計に広く使用されている。Bleichら²⁾は境界条件を満足する近似波形および座屈波形を用いたエネルギー法を示している。前田ら³⁾は線形化撓度理論に基づく振動の基礎微分方程式の厳密解(すでにBleichらにより誘導されていた)を用いて、単純支持および連続支持された吊橋の固有振動解析を示した。最近、Abdel-Ghaffar⁴⁾は有限要素法による定式化を行ない、剛性マトリックスおよび質量マトリックスを求め、計算値と実測値との比較によりその妥当性を示している。一般的に、構造物の固有振動解析はその力学的モデル化により、Discrete系による解法とDistributed系による解法に大別することができる⁵⁾。この両者の差異は質量マトリックスの取り扱い方にあるため、Lumped mass method、Consistent mass methodおよびContinuous mass methodと分類して呼ばれることが多い。筆者は後者の手法により、連続桁⁶⁾、連続板⁷⁾および吊橋^{8,9)}についてそれぞれ報告してきた。

本研究の目的は、補剛桁のせん断変形および回転慣性を考慮した吊橋の鉛直たわみ固有振動解析を示すことである。筆者の知る限りにおいて、この問題に関する論文は西村、小松¹⁰⁾のものがあるだけである。その中で、せん断変形の影響は / Hzを越える高次振動モードに現われ、吊橋の地震応答解析にはこの影響を考慮する必要性を示唆している。本研究においてはHamilton原理により吊橋の補剛桁に関する支配方程式を誘導する。さらに、数値計算例により補剛桁の支持条件(図一 / 参照)およびケーブルと塔頂との結合条件による差異について検討する。また、従来のBernoulli-Euler桁理論^{8,9)}およびTimoshenko桁理論により求められた固有円振動数を比較することにより、吊橋のせん断変形と回転慣性の影響について明らかにする。

2. 固有振動解析の概要

2-1. 補剛桁の支配方程式の誘導 動力学的問題には、変分原理としてHamiltonの原理が成り立つことはよく知られている。これは静力学における仮想仕事の原理に対応するものと考えられる。いま、鉛直変位を v 、曲げによる回転角を ϕ とおくと、鉛直たわみ振動による吊橋の運動エネルギー $T(t)$ 、補剛桁とケーブルのポテンシャルエネルギー $V_g(t)$ 、 $V_c(t)$ はそれぞれ以下になる。



図一 / 多径間吊橋の寸法と座標系

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{L_i} \frac{w_i}{g} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} \frac{w_i}{g} r_i^2 \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)^2 dx_i \right\}, \quad V_g(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{L_i} EI_i \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i \right. \\ \left. + \int_0^{L_i} k_i A_i G_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \phi_i \right)^2 dx_i \right\}, \quad V_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ H_w \int_0^{L_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i \right\} + \frac{1}{2} \frac{L_c}{E_c A_c} \{ H_p(t) \}^2 \quad (/)$$

ここで、 $\beta_i = \partial v_i / \partial x_i - \phi_i$ 、 $r_i^2 = I_i / A_i$ であり、他の記号の説明は紙面の都合上ここでは省略する。上式をHamilton原理の教えるところにより、 $\int_{t_1}^{t_2} \delta \{ T(t) - V_g(t) - V_c(t) \} dt = 0$ に代入し部分積分を行なうと、仮想変位 δv_i と $\delta \phi_i$ に対応して次の2式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ k_i A_i G_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \phi_i \right) \right\} - \frac{w_i}{g} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + \{ H_w + H_p(t) \} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} - \frac{w_i}{H_w} H_p(t) = 0 \quad \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(EI_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \right) + k_i A_i G_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \phi_i \right) - \frac{w_i}{g} r_i^2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} = 0 \quad \dots \dots (3)$$

吊橋の断面諸元は支間を通して一定であるという仮定を設け、上式(2)、(3)より ϕ_i の項を消去すると

$$EI_i \frac{\partial^4 v_i}{\partial x_i^4} - \frac{w_i}{g} r_i^2 \left(1 + \frac{EI_i}{k_i A_i G_i r_i^2} \right) \frac{\partial^4 v_i}{\partial x_i^2 \partial t^2} + \frac{w_i^2 r_i^2}{g^2 k_i A_i G_i} \frac{\partial^4 v_i}{\partial t^4} - \{ H_w + H_p(t) \} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} + \frac{w_i}{H_w} H_p(t) + \frac{w_i}{g} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

である。同様に、上式(2)、(3)より v_i の項を消去すると、式(4)と類似の ϕ_i に関する4階の偏微分方程式が得られる。従来のBernoulli-Euler桁理論による基礎微分方程式^{8,9)}と比較すると、せん断変形および回転慣性による影響は式(4)の第2、3項に鉛直たわみ v_i の付加項として表されている。

2-2. ケーブルの方程式

図-2に示すようなケーブルと塔頂との支持条件がローラー結合とヒンジ結合の場合について考える。そのケーブルの方程式は文献^{8,9)}で詳細に報告した。

2-3. 固有関数

式(4)において、 $v_i = V_i(x_i) \exp(j\omega t)$ 、 $\phi_i = \Psi_i(x_i) \exp(j\omega t)$ 、 $H_p(t) = \bar{H}_p \exp(j\omega t)$ を代入すると $V_i(x_i)$ に関する4階の常微分方程式が得られる。ただし、 ω = 吊橋の固有円振動数。さらに、 $V_i(x_i) = \exp(\lambda_i x_i / L_i)$ 、 $\Psi_i(x_i) = \exp(\lambda_i x_i / L_i)$ とおくと、 λ_i に関する4次の特性方程式が得られる。

$$\lambda_i^4 + \{ b^2(r^2 + s^2) \} \lambda_i^2 - b^2(1 - b^2 r^2 s^2) = 0 \quad \dots \dots (5)$$

$$\text{ここで、} a^2 = \frac{w_i L_i}{g EI_i}, \quad b^2 = a^2 \omega^2, \quad c^2 = \frac{H_w L_i}{EI_i}, \quad r^2 = \frac{I_i}{A_i L_i^2}, \quad s^2 = \frac{EI_i}{k_i A_i G_i L_i^2} \quad \dots \dots (6)$$

固有関数(固有振動モード) $V_i(x_i)$ は根 λ_i の符号に注意しながら求めると、次のように3通り得る。

1) $0 < \omega \leq \sqrt{c^2 / \{ a^2(r^2 + s^2) \}}$ のとき、 $\mu_i = \sqrt{W_i(Z_i - 1)}$ 、 $\nu_i = \sqrt{W_i(Z_i + 1)}$ とおくと、

$$V_i(x_i) = A_i \cos \mu_i x_i / L_i + B_i \sin \mu_i x_i / L_i + C_i \cosh \nu_i x_i / L_i + D_i \sinh \nu_i x_i / L_i + g / (\omega^2 H_w) \bar{H}_{pi} \quad (7)$$

2) $\sqrt{c^2 / \{ a^2(r^2 + s^2) \}} < \omega \leq 1 / \sqrt{a^2 r^2 s^2}$ のとき、 $\mu_i = \sqrt{(-W_i)(Z_i + 1)}$ 、 $\nu_i = \sqrt{(-W_i)(Z_i - 1)}$ とおくと、固有関数 $V_i(x_i)$ は結果的に上式(7)と同様の解となる。

3) $\omega > 1 / \sqrt{a^2 r^2 s^2}$ のとき、 $\mu_i = \sqrt{(-W_i)(1 - Z_i)}$ 、 $\nu_i = \sqrt{(-W_i)(1 + Z_i)}$ とおくと、

$$V_i(x_i) = A_i \cos \mu_i x_i / L_i + B_i \sin \mu_i x_i / L_i + C_i \cosh \nu_i x_i / L_i + D_i \sinh \nu_i x_i / L_i + g / (\omega^2 H_w) \bar{H}_{pi} \quad (8)$$

ただし、 $W_i = \{ c^2 - b^2(r^2 + s^2) \} / 2$ 、 $Z_i = \sqrt{1 + 4b^2(1 - b^2 r^2 s^2) / \{ c^2 - b^2(r^2 + s^2) \}^2}$ (9)

また、残る固有関数 $\Psi_i(x_i)$ は $V_i(x_i)$ と従属関係にあり、式(7)、(8)を式(2)または(3)に代入することにより求められ、三角関数と双曲線関数により表現される。

2-4. 振動数方程式

固有関数に含まれる積分定数 A_i, B_i, C_i, D_i は図-1に示すような多径間吊橋の補剛桁の境界条件によって決定される。また、残るもう一個の未知量 $\bar{H}_{pi}$ はケーブルの方程式に固有関数を代入することにより関係づけられる。最終的に、吊橋の振動数方程式は文献⁸⁾と同様の形で

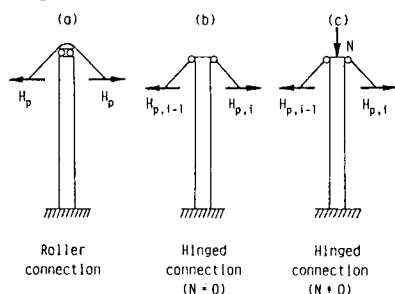


図-2 ケーブルと塔頂の支持条件

$\det | \mathbf{A} - \mathbf{H} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{G} | = 0$ と求められる。この式は固有円振動数 ω に関する超越方程式となり、その行列式の大きさは $4n \times 4n$ である。根 ω はRegula-Falsi法により求められ、個々の固有値に対して吊橋の固有振動モードが相対量として決定される。

2-5. 固有関数の直交性 固有関数 $V_i(x_i), \Psi_i(x_i)$ の直交性はRayleigh法¹¹⁾によって証明できる。その結果のみ示すと、

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \{ V_{ni}(x_i) V_{mi}(x_i) + r_i^2 \Psi_{ni}(x_i) \Psi_{mi}(x_i) \} dx_i = 0, \text{ただし、} n \neq m \quad (/0)$$

3. 数値計算例

数値計算例として、表一 / に示すような主径間の支間長が315m、770m、1100mと異なる3種類の3径間吊橋について考える。

図-3、4はTimoshenko析理論により求められた固有円振動数 ω^* とBernoulli-Euler析理論により求められた固有円振動数 ω との比の値を / 次から / 0 次まで順に示している。また、図中の r は式(6)で与えられるものであり、細長比の逆数である。一般的に高次の固有振動モードになればなるほど、せん断変形の影響が大きく現われていることがわかる。各吊橋の固有円振動数の計算結果において、ケーブルと塔頂との結合条件による差異はほとんどない。次に、補剛析の支持条件による差異についてみると、低次固有振動モードにおいて、せん断変形の影響は2ヒンジ吊橋に比較して連続支持された吊橋の方が大きく現われている。

図-5、6、7は ω^* / ω の値とパラメーター r との関係を示している。これらの図より、パラメーター r の値が大きいほどせん断変形の影響が大きく現われている。吊橋の固有振動モードについて調べてみると、せん断変形の影響は逆対称モードも対称モードもパラメーター r に対してほぼ同程度に現われている。以上の図は $\pi = kG / E = 0.2$ と一定の場合について示したが、せん断変形の影響は π の値(形状係数 k)が大きくなるにつれて、小さくなる傾向がある。

4. あとがき

本研究はHamilton原理に基づき、せん断変形と回転慣性を考慮した吊橋の鉛直たわみ振動に対する基礎微分方程式を誘導した。さらに、その一般解は3通りあることを示した。せん断変形の影響を支配するのはパラメーター r と π である。数値計

Characteristic values		A bridge	B bridge	C bridge
Stiffening girder	L_2 (m)	315	770	1100
	L_1 (m)	85	250	260
	w_2 (t/m)	8.12	10.155	10.485
	w_1 (t/m)	8.12	10.545	10.785
	I_2 (m ⁴)	0.6	2.452	5.591
	I_1 (m ⁴)	0.6	2.108	5.877
	E_s (t/m ²)	2.1×10^7	2.1×10^7	2.1×10^7
Cable	F_2 (m)	35	76	100
	A_c (m ²)	0.0901	0.2280	0.3853
	E_c (t/m ²)	1.6×10^7	2.0×10^7	2.0×10^7
Tower	L_t (m)	60.000	138.850	180.257
	I_t (m ⁴)	1.000	3.320	10.466
	E_t (t/m ²)	2.1×10^7	2.1×10^7	2.1×10^7

表一 / 数値計算に用いた3種類の吊橋の断面諸元

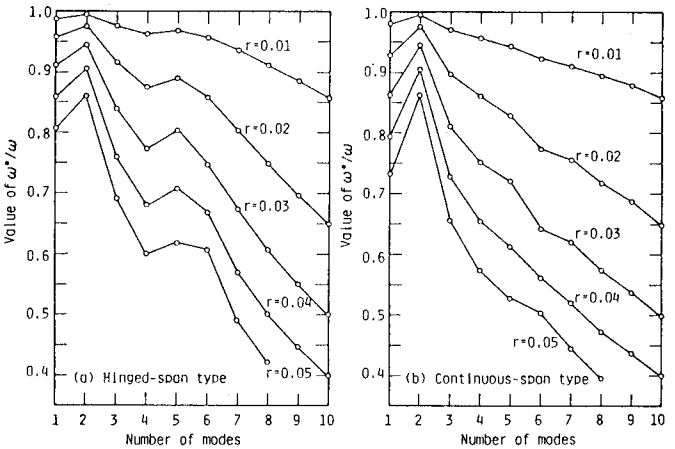


図-3 A橋の固有円振動数の比較

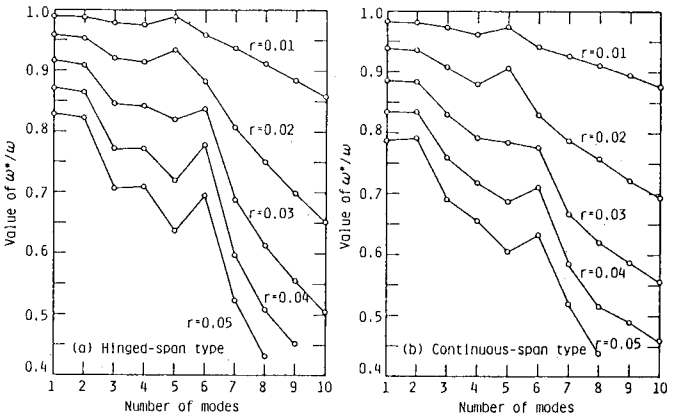


図-4 B橋の固有円振動数の比較

算結果より、せん断変形の影響は r の値が大きいほど、また π の値が小さいほど大きく現われる。しかし、 r の値が特に大きくない限り、その影響は無視できるほど小さい。低次の固有振動モードにおいて、せん断変形の影響は2ヒンジ吊橋に比較して連続吊橋の方が大きく現われる。

最後に、本研究に関し多くの助言を賜りました北海道大学渡辺昇教授に深甚の謝意を表します。また、吊橋の貴重なる資料を提供していただきました本州四国連絡橋公団大島久局長に謝意を表します。なお、本研究は一部文部省科学研究費奨励研究Aの補助を受けたことを付記する。膨大な数値計算には北海道大学大型計算機センターのHITAC M-200Hを利用した。

(参考文献)

- 1) 小西一郎：鋼橋，設計編II，1976.
- 2) Bleich, F. et al.: The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges, Bureau of Public Roads, U.S.Giv, 1950.
- 3) 前田・林・前田：吊橋の固有振動計算法，土木学会論文報告集，第262号，1957.
- 4) Abdel-Ghaffar, A.M.: Vertical Vibration Analysis of Suspension Bridges, Proc. of ASCE, Vol.106, No. ST10, 1980.
- 5) Hurty, W.C. and Rubinstein, M.F.: Dynamics of Structures, 1964.
- 6) Hayashikawa and Watanabe: Dynamic Behavior of Continuous Beams with Moving Loads, Proc. of ASCE, Vol.107, EMI, 1981.
- 7) Hayashikawa and Watanabe: Dynamic Response Analysis of Continuous Plate-Girder Bridges under a Moving Loads, Theoretical and Applied Mechanics, 29, 1981.
- 8) 渡辺・林川：吊橋の固有振動解析に関する研究，土木学会北海道支部，第36号，1979.
- 9) Hayashikawa, et al.: Natural Vibration Analysis of Multispan Suspension Bridges, Civil Engineering for Practicing and Design Engineers, 1982 (掲載予定).
- 10) 西村・小松：せん断変形を考慮した吊橋の固有振動のパラメーター解析，土木学会第35回年次学術講演会，I-171, 1980.
- 11) Rayleigh, L.: Theory of Sound, 1945.

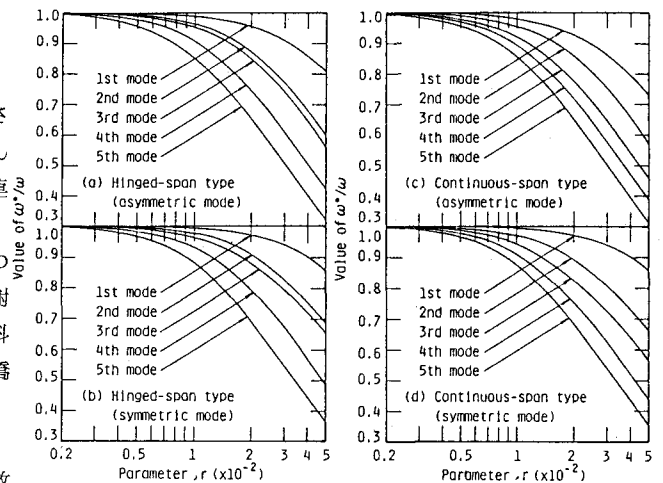


図-5 A橋の固有円振動数の比較

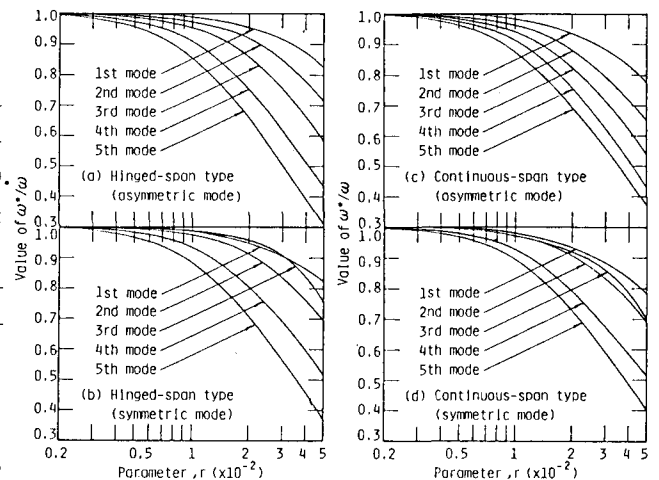


図-6 B橋の固有円振動数の比較

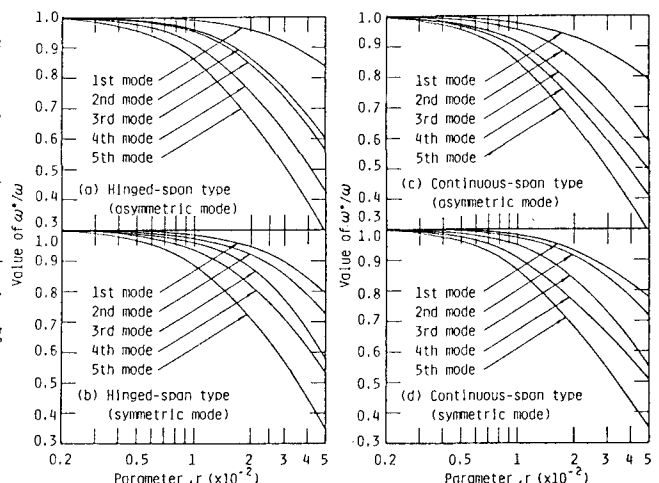


図-7 C橋の固有円振動数の比較