

I-14 セン断変形と回転慣性を考慮した連続桁の固有振動解析

北海道大学工学部 正員 渡辺 昇
 北海道大学工学部 正員 林川 俊郎
 北海道大学工学部 学生員 ○神谷 章

1 まえがき

筆者らは Bernoulli-Euler Beam理論による多径間連続桁の固有振動解析を報告してきた¹⁾。本研究はせん断変形および回転慣性を考慮した Timoshenko Beam理論による自由振動問題を取り扱う。この種の問題に関しては数多くの論文が発表されている。中でも、ChengとTsengは「動的剛性マトリックス法」による解析方法を示している²⁾。しかし、解析方法に用いる動的剛性マトリックスの各要素は複雑であり、しかも、分母には特異点を含んでいる。また、PestelとLeckieは「伝達マトリックス法」による解析方法を示している³⁾。本研究では基礎微分方程式の一般解(固有関数)を求め、連続桁の境界条件を満足するように連立方程式をたてることによって固有値を求める。この解析方法は単純に固有関数の積分定数の係数比較によって求められるので、電子計算機を使用する計算には有効である。

2 固有振動解析の概要

2・1 基礎微分方程式と一般解(固有関数) 軸力(引張力とする)を受ける、せん断変形と回転慣性を考慮した桁の偏微分方程式は次のように与えられる²⁾。

$$EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + GAK \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right) - \frac{I\gamma}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - H \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (/)$$

$$\frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - GAK \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0 \quad (2)$$

上式(/), (2)をそれぞれ桁の鉛直たわみ y と曲げによるたわみ角 ϕ について書き直すと、

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left(\frac{EI}{Gk} \frac{\gamma}{g} + \frac{I\gamma}{g} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{I\gamma}{g} \frac{\gamma}{Gkg} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + \frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

$$EI \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \left(\frac{EI}{Gk} \frac{\gamma}{g} + \frac{I\gamma}{g} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{I\gamma}{g} \frac{\gamma}{Gkg} \frac{\partial^4 \phi}{\partial t^4} + \frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - H \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

ただし、 E =桁のヤング係数、 I =桁の断面2次モーメント、 G =せん断弾性係数、 γ =単位体積重量、 g =重力加速度、 k =形状係数、 $y=y(x, t)$ 、 $\phi=\phi(x, t)$ 、 H =桁に作用する軸力、 L =径間長。

ここで、 $y=Y(x) \cdot \exp(j\omega t)$ 、 $\phi=\Phi(x) \cdot \exp(j\omega t)$ とし、さらに $Y(x)=\exp(\lambda x/L)$ 、 $\Phi(x)=\exp(\lambda x/L)$ と置き、式(3)、(4)に代入すると λ に関する4次の特性方程式が得られる。そこで

$$b^2 = \frac{1}{EI} \frac{\gamma A}{g} L^4 p^2, \quad r^2 = \frac{1}{AL^2}, \quad s^2 = \frac{EI}{kAGL^2}, \quad c^2 = \frac{HL^2}{EI}$$

$$W = \frac{1}{2} \{ c^2 - b^2 (r^2 + s^2) \}, \quad Z = \sqrt{1 - \frac{4b^2 (b^2 r^2 s^2 - 1)}{b^2 (r^2 + s^2) - c^2}}$$

とすれば、式(3)、(4)の一般解(m 次固有モードに対する第 i 径間の固有関数)は固有円振動数 p を含む係数 b^2 と含まない係数 r^2 、 s^2 、 c^2 との関係によって次のように求められる。(添字 m 、 i は省略する。)

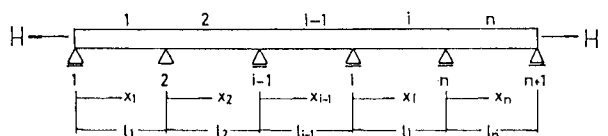


図 - /

$$b^2 < \frac{c^2}{r^2 + s^2} \quad \text{かつ} \quad b^2 < \frac{1}{r^2 s^2} \quad \text{の時} \quad \mu = \sqrt{W(Z-1)}, \quad \nu = \sqrt{W(Z+1)}$$

$$b^2 > \frac{c^2}{r^2 + s^2} \quad \text{かつ} \quad b^2 < \frac{1}{r^2 s^2} \quad \text{の時} \quad \mu = \sqrt{(-W)(Z+1)}, \quad \nu = \sqrt{(-W)(Z-1)}$$

$$Y(x) = A \cos \mu \frac{x}{L} + B \sin \mu \frac{x}{L} + C \cosh \nu \frac{x}{L} + D \sinh \nu \frac{x}{L} \quad (5 \cdot a)$$

$$\Phi(x) = A' \sin \mu \frac{x}{L} + B' \cos \mu \frac{x}{L} + C' \sinh \nu \frac{x}{L} + D' \cosh \nu \frac{x}{L} \quad (5 \cdot b)$$

また、

$$b^2 > \frac{c^2}{r^2 + s^2} \quad \text{かつ} \quad b^2 > \frac{1}{r^2 s^2} \quad \text{の時} \quad \mu = \sqrt{(-W)(1-Z)}, \quad \nu = \sqrt{(-W)(Z+1)}$$

$$Y(x) = A \cos \mu \frac{x}{L} + B \sin \mu \frac{x}{L} + C \cos \nu \frac{x}{L} + D \sin \nu \frac{x}{L} \quad (6 \cdot a)$$

$$\Psi(x) = A' \sin \mu \frac{x}{L} + B' \cos \mu \frac{x}{L} + C' \sin \nu \frac{x}{L} + D' \cos \nu \frac{x}{L} \quad (6 \cdot b)$$

なお、一般解 $Y(x)$ 、 $\Psi(x)$ に含まれる積分定数 $A \sim D$ と $A' \sim D'$ は互いに従属関係にあり一般解を式(1)または(2)に代入することによって、式(5)および(6)ではそれぞれ次のような関係にあることが得られる。

$$A' = R_\mu A, \quad B' = -R_\mu B, \quad C' = R_\nu C, \quad D' = R_\nu D \quad (7 \cdot a)$$

$$A' = R_\mu A, \quad B' = -R_\mu B, \quad C' = R_\nu C, \quad D' = -R_\nu D \quad (7 \cdot b)$$

ただし、 $R_\mu = (b^2 s^2 - \mu^2) / \mu L$, $R_\nu = (b^2 s^2 - \nu^2) / \nu L$ である。

2・2 振動数方程式 式(5)または(6)と(7)より与えられる m 次固有モードに対する第 i 径間の固有関数 $Y(x)$ と $\Psi(x)$ を図-1に示すような連続桁の各径間ごとに適用し、各支持点における境界条件式に代入すると次に示すようなマトリックスの関係式が得られる。

$$A \cdot a = 0 \quad (8)$$

ただし、 $a = \{ A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n, C_n, D_n \}^T$

式(8)は Cramer の法則により、次の場合のみ有効である。

$$\det |A| = 0 \quad (9)$$

この式(9)が連続桁の振動数方程式となる。この式は連続桁の固有円振動数 p についての超越方程式となるが、Regula-Falsi 法によって比較的容易に求めることができる。したがって、 $\det |A| = 0$ となる固有円振動数 p が決定されると式(8)より各径間の固有関数の積分定数を表わすベクトル a の相対値が求まり、式(5)と(6)に示す連続桁の各径間に対する固有関数の固有振動モードが決定される。

3 数値計算例

せん断変形と回転慣性が連続桁の自由振動にどのような影響を及ぼすかを調べてみる。連続桁は最も架設例の多い3径間連続桁とし各径間とも等しい断面諸元を持つものを例とした。結果は、パラメーターとして $r = \sqrt{I / A L^2}$, $\pi = k G / E$ を用いて、Timoshenko Beam 理論によって得られる固有円振動数 p^* と Bernoulli-Euler Beam 理論によって得られる固有円振動数 p との比で示した。なお、パラメーター r では A を変化させ、 I / L^2 を一定とした。

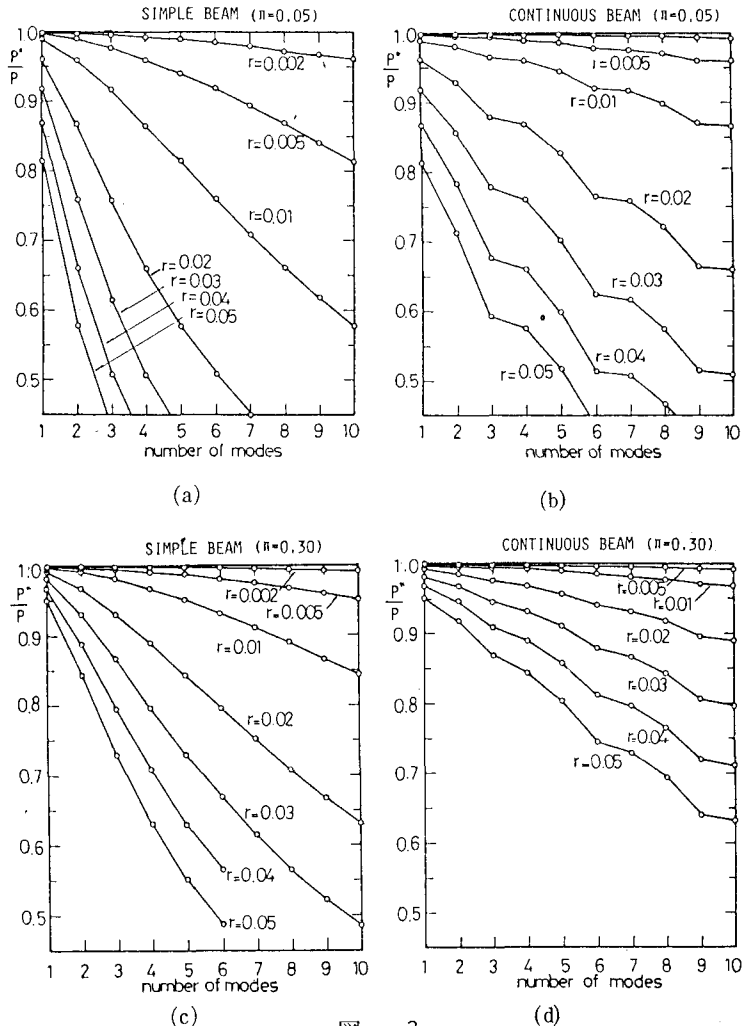


図-2

図-2 (a), (b)と(c), (d)は同じ断面諸元を持つ単径間桁と連続桁の結果を示したもので、(a), (b)は $\pi = 0.05$ 、(c), (d)は $\pi = 0.30$ である。せん断変形と回転慣性の影響は、単径間桁に比較して、連続桁の方が小さいことがわかる。また、単径間桁、連続桁ともに高次の固有振動モードほど影響が大きいことを示している。なお、連続桁の1, 4, 7, 10次固有振動モードは単径間桁の1, 2, 3, 4次固有振動モードに対応している。

図-3 (a)～(e)は形状係数 k を含むパラメーター π につき、それぞれパラメーター r を用いて連続桁の振動性状を振動数の比で示したものであり、対称・逆対称モードともに5次まで示している。 π に関らず、 r が大きくなるほど、高次の固有振動モードになるほどせん断変形と回転慣性の影響が大きくなる傾向にある。また、その度合は π が小さくなるほど大きい。 r はせん断変形と回転慣性の影響を表わすもので、 π はせん断変形の影響だけを表わすもので、 r を小さくするほど、また π を大きくするほど、Bernoulli-Euler Beam理論で得られる固有円振動数に近づく。

図-4は各固有振動モードに対する振動数の比を示したものであり、高次の固有振動モードほどせん断変形と回転慣性の影響が大きくなることを示している。なお、ここで用いているパラメーター r は図-2, 3で用いた、断面積 A を変化させた

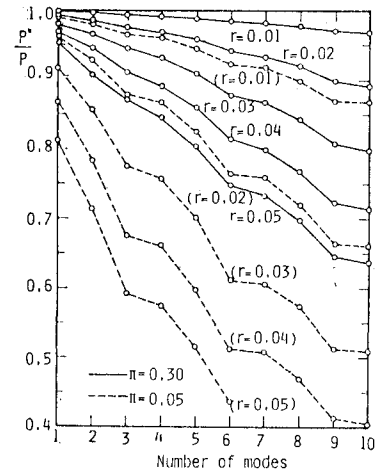


図-4

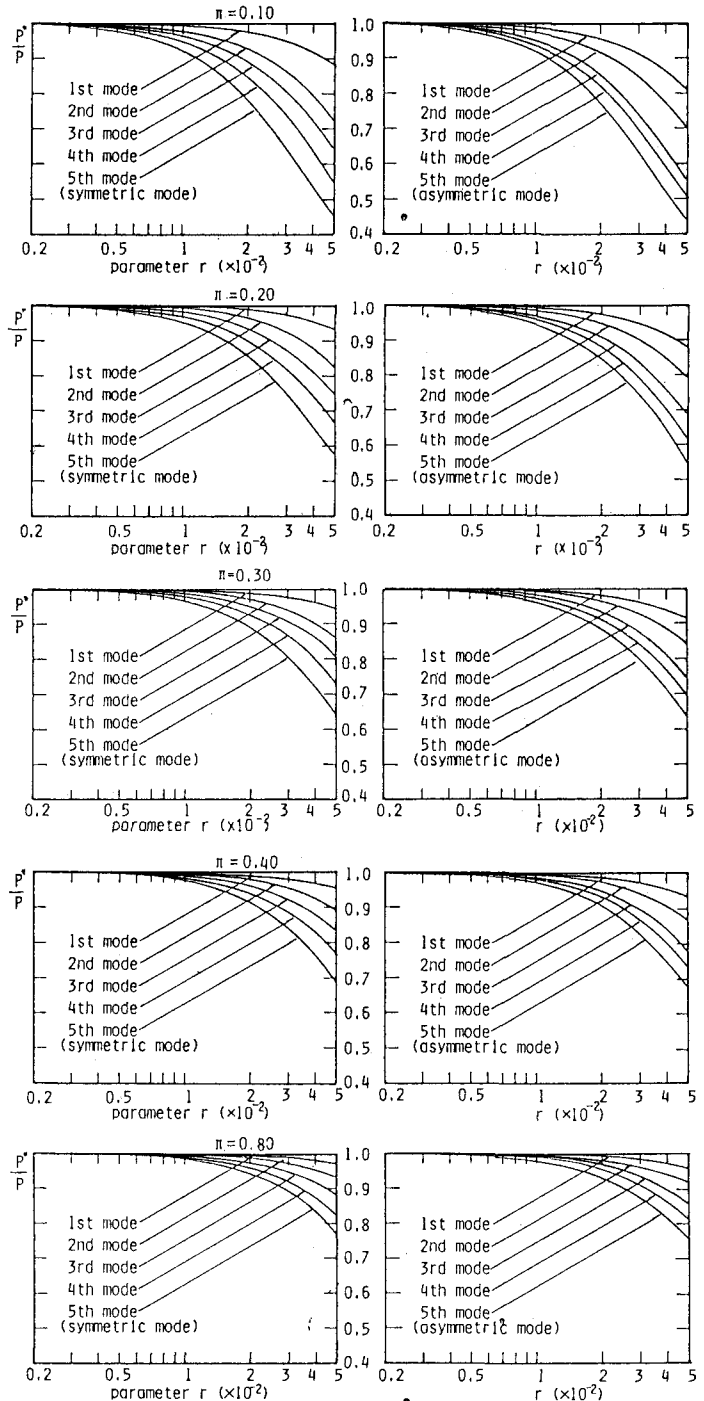


図-3

(a) $\pi = 0.10$
(b) $\pi = 0.20$
(c) $\pi = 0.30$
(d) $\pi = 0.40$
(e) $\pi = 0.80$

r とは異なり、 $A l^2$ を一定にし桁の断面2次モーメント I を変化させたものであるが、図-4はそれぞれ図-2の(b), (d)に一致する。

4 あとがき

本研究は、曲げ変形他にせん断変形と回転慣性の影響を考慮した連続桁の自由振動について検討してみた。数値計算例より、以下のような結論が得られた。連続桁とした場合、せん断変形と回転慣性の影響は単径間桁に比べてかなり小さくなる。形状係数の評価の仕方によってせん断変形の度合いは大きく変わる。なお、計算例においては、 $\alpha = 0$ とした場合だけを示したが、これは軸力(引張力)を受ける桁の固有円振動数は、軸力が大きくなるにつれ Bernoulli-Euler Beam理論によって得られるものと Timoshenko Beam理論によって得られるものがほぼ同じように大きくなり、振動数の比をとるとほぼ一定であるためである。

本研究において、軸力を受ける桁として解析を進めたのは、多径間連続桁の固有関数を用いて補剛桁にせん断変形と回転慣性を考慮した多径間連続吊橋の固有円振動数を近似的に求められると考えられるからである。これは吊橋の撓度理論に基づくもので、多径間連続吊橋を力学的に等価な系に置きかえて図-1に示すような軸力を受ける連続桁として解析するものである。すでに Bernoulli-Euler Beam理論を用いた方法は報告した⁴⁾が、Timoshenko Beam理論を用いた方法では次式によって塔頂をローラー結合とした多径間連続吊橋の固有円振動数 ω を求めることができる。

$$\begin{aligned} A &= a^4 r^2 s^2 \int_0^l Y^2(x) dx & B &= a^2 \int_0^l Y^2(x) dx \\ C &= \mu^2 v^2 \int_0^l Y^2(x) dx + \frac{Ec}{Lc} \frac{Ac}{\left(\frac{w}{H_w}\right)^2} \left| \int_0^l \frac{L}{E I} Y(x) dx \right|^2 \\ \omega &= \sqrt{\frac{B + \sqrt{B^2 - 4 A C}}{2 A}} \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 $a^2 = \gamma A l^4 / E I$ 、 Ec = ケーブルのヤング係数、 Ac = ケーブルの断面積、 Lc = ケーブルの長さ、 w = 補剛桁の死荷重、 H_w = 死荷重によるケーブルの水平張力、 l = 吊橋の全径間長。

なお、数値計算には北海道大学大型計算機センターの HITAC M-200H を使用した。

5 参考文献

- 1) T.Hayashikawa and N.Watanabe: Dynamic Behavior of Continuous Beam with Moving Loads
Proc. of ASCE, Vol. 107, No. EM1, 1981
- 2) Franklin Y.Cheng and Wu-Hsiung Tseng: Dynamic Matrix of Timoshenko Beam Columns
Proc. of ASCE, Vol. 99, No. ST3, 1973
- 3) Edward C.Pestel and Frederick A.Leckie: Matrix Methods In Elasto Mechanics 1963
- 4) 林川, 渡辺, 大島: 多径間連続吊橋の固有振動解析
第 30 回応用力学連合講演会講演論文抄録集
- 5) T.C.Huang: The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equation of Uniform Beams With Simple End Condition
Journal of Applied Mechanics, 12, 1961
- 6) G.R.Cowper: The Shear Coefficient in Timoshenko's Theory
Journal of Applied Mechanics, 6, 1966
- 7) Franklin Y.Cheng: Vibrations of Timoshenko Beams And Frameworks
Proc. of ASCE, Vol. 96, No. ST3, 1970