

I-12 選点法による回転殻の静的・動的解析

北海道大学 正員 久村 仁
北海道大学 正員 O三 上 隆

1. はじめに 殻の静的・動的問題の微分方程式は、空間および空間と時間に関する高次の方程式で与えられる。しかし、この高階微分方程式を厳密に解き、解を得ることは容易なことではなく、通常は何らかの近似的手法に頼らざるを得ない。その場合、空間と時間に対する処理手法が解の精度に大きな影響を及ぼすことが予想される。本報告は、空間に対する処理を従来の手法と異なる選点法で行う一つの計算手法を提示するものである。直交多項式の零点を選点とする本手法は、比較的簡単な手続で問題の定式化が行え、小容量の計算で高精度の数値解が得られる。数値計算例として、円筒殻と球殻を取り上げ、本手法の有効性の検討を行った。

2. 基礎式 微分方程式は、Novozhilov¹⁾の理論に基づき、円筒方向フーリエ級数展開により軸・経線方向座標 x 、および時間 t で表わされる。その際、方程式の階数低下を計るため、変位成分 $(U, V, W = \text{軸・経線方向, 円筒方向, 法線方向変位})$ とともに軸・経線方向曲げモーメント M_x を未知関数として扱う。したがって、回転殻の運動方程式は次の2階4元連立偏微分方程式で与えられる。

$$\rho_0 U'' + \rho_1 U' + \rho_2 U + \rho_3 V' + \rho_4 V + \rho_5 W' + \rho_6 W + \rho_7 M_x' + \rho_8 M_x = -P_0 + \ddot{U} \quad (1.1)$$

$$\rho_9 U' + \rho_{10} U + \rho_{11} V'' + \rho_{12} V' + \rho_{13} V + \rho_{14} W'' + \rho_{15} W' + \rho_{16} W + \rho_{17} M_x = -P_1 + \ddot{V} \quad (1.2)$$

$$\rho_{18} U' + \rho_{19} U + \rho_{20} V'' + \rho_{21} V' + \rho_{22} V + \rho_{23} W'' + \rho_{24} W' + \rho_{25} W + \rho_{26} M_x'' + \rho_{27} M_x' + \rho_{28} M_x = -P_W + \ddot{W} \quad (1.3)$$

$$\rho_{29} U + \rho_{30} U' + \rho_{31} V + \rho_{32} V' + \rho_{33} W' + \rho_{34} W + \rho_{35} M_x = 0 \quad (1.4)$$

ここに、 $\rho_0 \sim \rho_{35}$ = 係数、 P_0, P_1, P_W = 荷重、 $(\cdot)' = \partial/\partial x$ 、 $x = [0, 1]$ 、 $(\cdot)'' = \partial^2/\partial x^2$ である。では次式で定義される無次元化時間である。

$$\tau = (t \sqrt{E/\rho})/a \quad (2)$$

ここに、 E = 弾性係数、 ρ = 密度、 a = 基準半径。

なお、殻の両端で規定される境界条件を便宜上次式で表わす。

$$B_i(U, V, W, M_x) = 0, (i=1 \sim 8) \quad (3)$$

3. 定式化 ここで、式(1)を空間に対しては選点法を適用し、時間に関する常微分方程式に変換した後、直接積分法により解析をする。

3.1 選点法 時間 $t=t_j$ での未知関数 U, V, W, M_x を次式で表わす。

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ M_x \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{M+1} \begin{Bmatrix} \bar{a}_i \\ \bar{b}_i \\ \bar{c}_i \\ \bar{d}_i \end{Bmatrix} x^i \quad (4)$$

ここで、 M = 内部選点数、 $\bar{a}_i \sim \bar{d}_i$ = 任意定数。

選点は区間 $[0, 1]$ で定義される M 次Shifted Legendre多項式の零点である。

本法によると、連立方程式を解く問題に帰着されるが、式(4)の係数でなく、端点 $(x_0=0, x_{M+1}=1)$ と内部選点 x_i ($i=1 \sim M$)での関数の値を求めるようにし、数値計算の簡易化を図る。そのため、基礎式(1)と(3)の1, 2次導関数を端点と選点での関数値で表わす。例えば、 U については次式となる。

$$\{\dot{U}\} = [A]\{U\}, \quad \{\dot{U}\} = [B]\{U\} \quad (5)$$

ここに、 $\{\dot{U}\}^T = \{\dot{U}(x_0), \dot{U}(x_1), \dots, \dot{U}(x_{M+1})\}$ 、

$\{U\}^T = \{U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_{M+1})\}$ 、 $\{U\}^T = \{U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_{M+1})\}$

なお、式(5)は他の未知関数についても成立する。

3.2 時間に関する常微分方程式の誘導 時間に関する常微分方程式を得る手順を、軸・経線方向に領域分割を施した場合について説明する。この領域分割は、後述のように計算精度の向上に役立つものである。

図-1に示すように、全区間を N 個の領域に分割し、

①, ②, ③, ... を境界点、①, ②, ③, ... を選点と名付ける。

まず、各領域の内部選点における微分方程式の残差の条件より次式が得られる。

$$[a_1]\{\delta_1\}_j + [a_2]\{\delta_2\}_j = -\{P\}_j + [B]\{\ddot{\delta}\}_j \quad (6)$$

ここで、 j = 時間に関する添字、 $\{P\}^T = \{P_0, P_1, P_W, 0\}$ 、

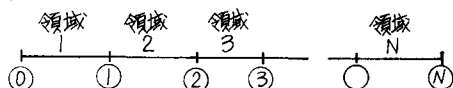


図-1 領域分割

$\{\delta_1\}$ = 各領域の内部選点における未知量, $\{\delta_2\}$ = 境界点と連続点での未知量。

連続点と境界点で成立する条件より次式が得られる。

$$[B_1]\{\delta_1\}_j + [B_2]\{\delta_2\}_j = 0 \quad \text{----- (7)}$$

式(6), (7) のマトリックス $[A_1]$, $[A_2]$, $[B_1]$, $[B_2]$ は式(5) のマトリックス $[A]$, $[B]$ の成分で作成される。

参考のため, N 領域分割での構成図を示す。

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & N \end{bmatrix} \quad (4MN \times 4MN)$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & N \end{bmatrix} \quad (4MN \times 8N)$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & & & 0 \\ \textcircled{2} & \textcircled{1} & & \\ \textcircled{2} & \textcircled{2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \textcircled{N} \end{bmatrix} \quad (8MN \times 4MN)$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & & & 0 \\ \textcircled{1} & \textcircled{1} & & \\ \textcircled{2} & \textcircled{2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \textcircled{N} \end{bmatrix} \quad (8MN \times 8N)$$

また, 式(6) のマトリックス $[B]$ は次のようになる。

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_1] & 0 \\ 0 & [B_2] \end{bmatrix} \quad (4MN \times 4MN)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [I] \end{bmatrix} \quad (4MN \times 4MN)$$

ただし $[I]$ = 単位マトリックス。

時間に関する常微分方程式は次のように得られる。

式(6), (7) より $\{\delta_2\}$ を消去すると

$$[A]\{\delta_1\}_j = -[P]_j + [B]\{\delta_1\}_j \quad \text{----- (8)}$$

ここに, $[A] = [A_1] - [A_2][B_2]^{-1}[B_1]$ ----- (9)

また, $\{\delta_1\}$ と $\{\delta_2\}$ を同時に求めると

$$\begin{bmatrix} [A_1] & [A_2] \\ [B_1] & [B_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_1\}_j \\ \{\delta_2\}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [P]_j \\ [0]_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [B] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\delta}_1\}_j \\ \{\ddot{\delta}_2\}_j \end{Bmatrix} \quad \text{----- (10)}$$

となる。なお, 式(8) は内部法, 式(10) は混合法とみなせる。静的問題では, 式(8), (10) の右辺第2項目を零とすることで解析できる。

3.3 時間に関する常微分方程式の解法

本報告では, Houbolt 法²⁾ と Newmark の β 法³⁾ を採用した。例えば, 式(8) に対する Houbolt 法のアルゴリズムは次式である。

$j=1$ のとき

$$[[A] - 6[B]/\Delta t^2]\{\delta_1\}_1 = -[2[A] + 6[B]/\Delta t^2]\{\delta_1\}_0 - 6[B]\{\delta_1\}_0/\Delta t - 2[P]_0 - \{P\}_1$$

$j=2$ のとき

$$[[A] - 2[B]/\Delta t^2]\{\delta_1\}_2 = -4[B]\{\delta_1\}_1/\Delta t^2 - [[A] - 2[B]/\Delta t^2]\{\delta_1\}_0 - \{P\}_0 - \{P\}_2$$

$j \geq 3$ のとき

$$[[A] - 2[B]/\Delta t^2]\{\delta_1\}_j = [B](-5\{\delta_1\}_{j-1} + 4\{\delta_1\}_{j-2} - \{\delta_1\}_{j-3})/\Delta t^2 - \{P\}_j \quad \text{----- (11)}$$

ここで, $\Delta t = (\Delta t \sqrt{E/\rho})/a$, Δt = 時間間隔

4. 数値計算例

4.1 静的問題

図-2 に示す片持円筒殻が風圧力を受ける場合を解析しシエル理論値⁴⁾との比較を行う。

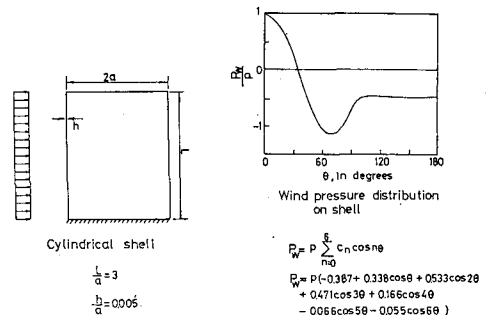


図-2 円筒殻の解析モデル

この種の構造

物では, 曲げモ

メント, せん

断力を変位と同

程度の精度で求

めることが, し

ばしば困難とな

る。ここでは,

領域分割により

精度向上を計った。

領域分割は

図-3 に示す7

とおりである。

なお, 選点数は

各領域に $M=11$

を用いた。

表-1 に, 自

由端の変位 W ,

固定端の合応力

N_0 , 曲げモー

メント M_0 , 有効せ

ん断力 Q_0 の値を

示した。これに

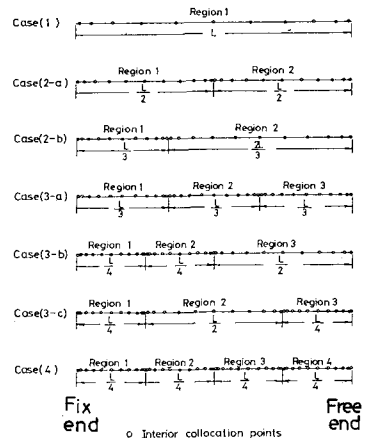


図-3 領域分割のパターン

表-1 本計算値とシエル理論値の比較

Case	W_{th} pa ²	N_0 pa	M_0 pa ²	Q_0 pa
(1)	652.211 (0.06)	31.974 (0.06)	-0.0241 (20.5)	-0.8292 (28.2)
(2-a)	652.571 (0.00)	31.974 (0.01)	-0.0195 (2.56)	-0.6386 (1.30)
(2-b)	652.524 (0.01)	31.972 (0.00)	-0.0200 (3.13)	-0.6467 (0.05)
(3-a)	652.579 (0.00)	31.971 (0.00)	-0.0200 (0.00)	-0.6467 (0.05)
(3-b)	652.576 (0.00)	31.972 (0.00)	-0.0200 (0.00)	-0.6470 (0.00)
(3-c)	652.576 (0.00)	31.972 (0.00)	-0.0200 (0.00)	-0.6470 (0.00)
(4)	652.576 (0.00)	31.972 (0.00)	-0.0200 (0.00)	-0.6470 (0.00)
Exact	652.576	31.972	-0.0200	-0.6470

(): Relative error, %

よると、合応力・断面力は領域分割により著しく精度が向上していることがわかる。なお、ここでは詳細は示さないが、適切な分割をすれば、領域分割数を増さなくても全区間にくたり高精度の解が得られる。例えば、図-3に示したCase(3-C)とCase(4)は同程度の精度で解が得られた。

図-4(a), (b)は、領域分割の解に与える影響を平均2乗残差で検討したものである。図の横軸と縦軸はそれぞれ、波数 n 、2領域以上での平均2乗残差と一領域でのそれとの比である。なお、 $P_w=1$ として求めた。図(a), (b)は、軸方向および法線方向のつり合いから得られる微分方程式(式(1.1)と(1.3))に対するもので、どちらも残差は領域分割数の増加とともに減衰している。また、自由端と固定端近傍を小さな領域に分割したCase(3-C)と4等分割のCase(4)は、同じ値になっている。以上のように、本手法は平均2乗残差などを併用することにより、より一層高精度な数値解析が行えるものと思われる。

図-5(a), (b)に、種々の高さ・半径比 L/a に対する自由端の変位、固定端の応力・断面力を示す。 L/a は通常の使用例(タンク・サイロなど)から見て2~5とした。いずれの L/a に対しても本計算値は理論値とよく一致している。

4.2 動的問題

(a) 円筒殻 解析モデルは、Johnsonら⁵⁾が空筒に対して差分法を適用した片持円筒殻である。荷重は円周方向に三角波、又時間に対する変動は三角形分布である(図-6参照)。数値積分法はJohnsonらと同様にHoubolt法により、時間間隔 Δt は 5×10^{-6} secとした。

図-7(a), (b)に、自由端でのたわみ、固定端でのモーメントを差分法との比較で示す。差分点数はモーメントの収束性から140とし、本手法は静的問題での領域分割の結果を踏まえ、3領域分割(一領域の選点数 $M=11$)で解析した。ちなみに、本手法による未知数の数は差分法のその1/4程度である。

図は、波数 $n=0, 1, 2$ に対する応答を示しているが、選点法、差分法ともよく一致している。

なお、参考のため両手法による計算時間を表-2に示した。使用した計算機は北海道大学大型計算機センターのM-200Hである。

表-2 計算時間の比較

n	C.P.U. time (sec.)	
	This study	F.D.M
0	30	110
1	50	140
2	50	140

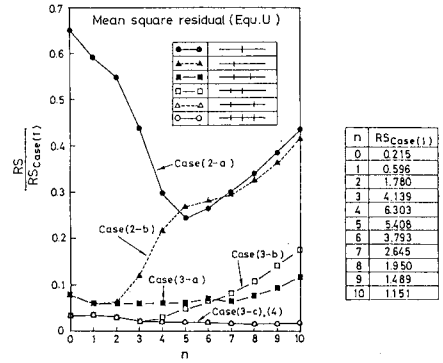


図-4(a) 式(1.1)の平均2乗残差

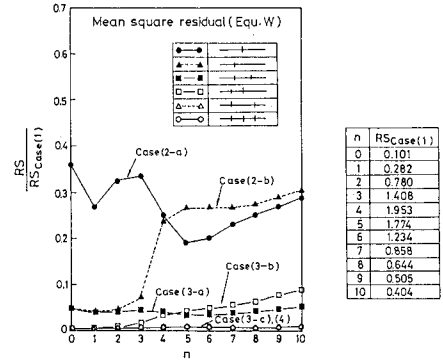


図-4(b) 式(1.3)の平均2乗残差

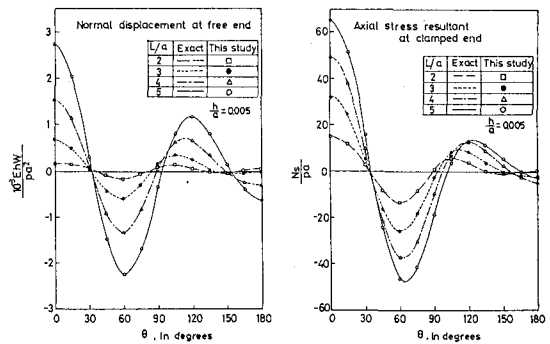


図-5(a) 種々の L/a に対するたわみと合応力

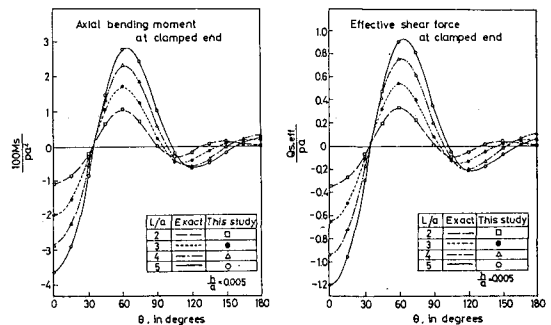


図-5(b) 種々の L/a に対する曲げモーメントとせん断力

(b) 球殻

モデルは Klein
ら FEM (円錐
台要素) で解析
した図-8 に示
すものである。

2 領域分割 (一領
域の選点数 $M=$
11) による結果
を図-9 (a) ~

(c) に示す。なお、積分
法は Houbolt 法と Newmark
β法 ($\beta=1/4$) を用い、時
間間隔は $\Delta t=10^{-5}$ sec であ
る。図-9 (a) と (b) に
頂点でのたれみと固定端
での合応力の変動を示す。
実線は Houbolt 法、○印
は Newmark β法の結果で
ある。図-9 (c) は固定
端の曲げモーメントで、
実線は Houbolt 法、---
は Newmark β法の結果で
ある。採用した数値積分
法の影響が、主に曲げモ
ーメント応答曲線に生じ
ているが、本手法の回転
殻の動的由題解析に対す
る有効性が理解されよう。

5. おわりに

回転殻の静的・動的由

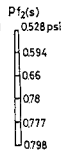
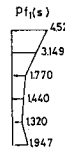
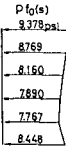
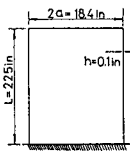
題の一解析法として、空座標を選点法で処理する解析法を提示し、
その有効性の検証を行った。その結果、比較的簡単な手続きで由題
の定式化が行え、高精度の数値解が得られることが明らかにされた。

今後は、時座標に対する選点法の適用およびその有効性につい
て研究をつづけていくつもりである。

参考文献

- 1) The Theory of Thin Elastic Shells, 1965.
- 2) J. Aeron. Sci., Vol. 17, PP. 540, 1950.
- 3) フリックス振動および応答, 培風館, 1971.
- 4) ASCE, Vol. 99, No. EM5, PP. 943, 1973.
- 5) AIAA Journal, Vol. 4, PP. 486, 1966.
- 6) Computer & Structures, Vol. 7, 1977.

Cylindrical shell



$$R_w = P \sum_{n=0}^{\infty} f_n(s) q(t) \cos n\theta$$

$P=100$ psi
 $\rho=2.4 \times 10^{-4}$ lb sec²/in⁴
 $E=10.5 \times 10^6$ psi
 $\nu=0.3$

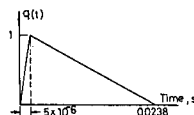
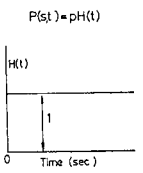
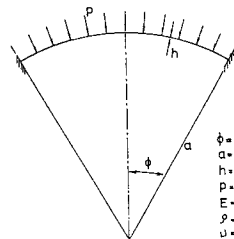


図-6 円筒殻の解析モデル

Shallow spherical cap



Geometry and properties

図-8 球殻の解析モデル

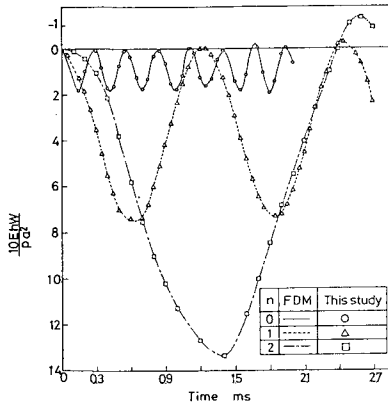


図-7(a) 円筒殻のたれみ応答曲線

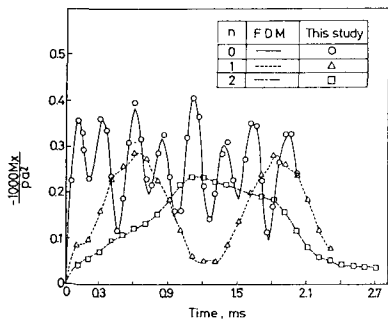


図-7(b) 円筒殻の曲げモーメント応答曲線

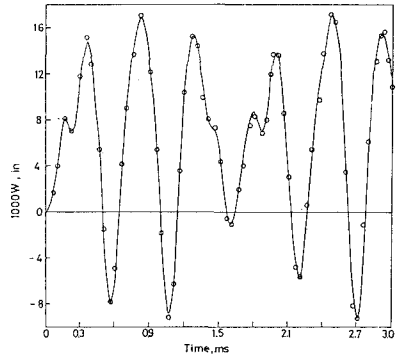


図-9(a) 球殻のたれみ応答曲線

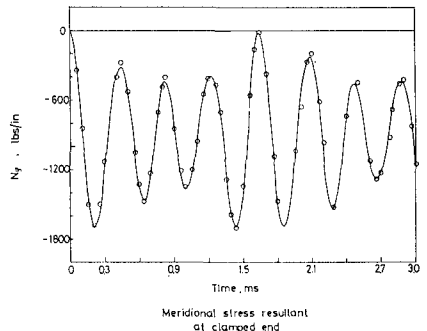


図-9(b) 球殻の合応力応答曲線

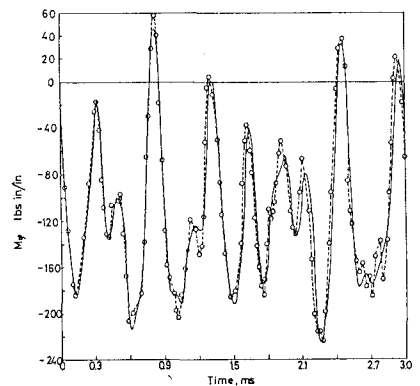


図-9(c) 球殻の曲げモーメント応答曲線