

I-10 斜め入射せん断波を受ける弾性体中にある厚肉円筒の動的応答について

—— 円筒外面にせん断応力が存在しない場合 ——

室蘭工業大学 正員 松岡健一
北海道大学 正員 能町純雄

1. まえがき

せん断波をうける弾性体の応答問題は種々研究されており¹⁾、著者らもこれまで、せん断波をうける無限弾性体中にある厚肉円筒の問題を、弾性体と円筒の境界面の変位と対応する応力が連続する場合について若干の解析を行なった²⁾。しかし覆工を施したトンネルや埋設パイプラインの問題では掘削などにより、境界状態が乱れているので、境界面での連続性は十分に満足されず、むしろ境界面にはせん断応力が存在しはいるとある方がより実際に近いと思われる。ここでは境界面にせん断応力が存在しない場合についても解析を行い、境界面の変位と応力が連続する場合とを比較検討を行なう。数値計算は、弾性係数 E 、ポアソン比 ν とを变化させて行なう。

2. 円柱座標で表わされる波動方程式の変位解

円柱座標で表わされる波動方程式の解はすでに示してあるが²⁾、必要上もう一度ここに簡単に示す。図-1のように座標をとり、せん断波の入射方向を z 方向とし、変位成分を u, v, w とすれば、円筒に対して

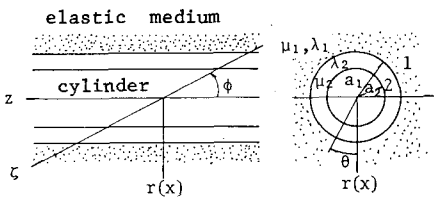


図-1. 弾性体中の厚肉円筒

$$u = \sum_m C_m (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \cos m\theta \cdot e^{i(\omega t - Nz)} \quad (1)$$

$$v = \sum_m (\tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr}) \sin m\theta \cdot e^{i(\omega t - Nz)} \quad (2)$$

$$w = \sum_m C_m \tilde{w}_{mr} \cos m\theta \cdot e^{i(\omega t - Nz)} \quad (3)$$

ここで、 $C_0 = 1/2\pi$, $C_m = 1/\pi$ ($m \neq 0$), $N = \omega \cos \varphi / V_s$,

ω : せん断波の角速度, V_s : せん断波の速度, μ, λ : Laméの弾性定数, ρ : 密度, t : 時間, であり,

$$N_\mu^2 = N^2 - \rho \omega^2 / \mu, \quad N_\lambda^2 = N^2 - \rho \omega^2 / (\lambda + 2\mu)$$

とすれば、 $\tilde{A}_{mr}, \tilde{B}_{mr}, \tilde{w}_{mr}$ は

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mr} = & \sum_{k=1}^{\infty} [\chi_{mp}^{(k)}(N_\mu r) / N_\mu \{ \alpha_{mk} / 2\mu + (m+1) A_{mk} \\ & + (m-1) B_{mk} - i N E_{mk} / 2 \} + (\mu N^2 / \rho \omega^2) \{ \chi_{mp}^{(k)}(N_\mu r) / N_\mu \\ & - N_\lambda \chi_{mp}^{(k)}(N_\lambda r) / N_\lambda^2 \} \{ \beta_{mk} / 2\mu + (m+1) A_{mk} - (m-1) B_{mk} \\ & + i N E_{mk} \}], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mr} = & \sum_{k=1}^{\infty} [G_m^{(k)}(N_\mu r) / N_\mu \{ \alpha_{mk} / 2\mu + (m+1) A_{mk} \\ & + (m-1) B_{mk} + i N E_{mk} / 2 \} + (\mu N^2 / \rho \omega^2) \{ \chi_{ms}^{(k)}(N_\mu r) / N_\mu \\ & - N_\lambda \chi_{ms}^{(k)}(N_\lambda r) / N_\lambda^2 \} \{ \beta_{mk} / 2\mu + (m+1) A_{mk} - (m-1) B_{mk} \\ & + i N E_{mk} \}], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{mr} = & \sum_{k=1}^{\infty} [G_m^{(k)}(N_\mu r) E_{mk} - i (3\mu N / \rho \omega^2) \{ G_m^{(k)}(N_\mu r) - \\ & G_m^{(k)}(N_\lambda r) \} \{ \beta_{mk} / 2\mu + (m+1) A_{mk} - (m-1) B_{mk} + i N E_{mk} \}], \end{aligned} \quad (6)$$

と表わされる。また式中の関数は、

$$\left. \begin{aligned} G_m^{(k)}(Nr) &= R_{m,m}^{(k)}(Nr) / R_{m,m}^{(k)}(NA_k), \\ \chi_{mp}^{(k)}(Nr) &= R_{m+1,m}^{(k)}(Nr) / R_{m,m}^{(k)}(NA_k), \\ \chi_{ms}^{(k)}(Nr) &= R_{m-1,m}^{(k)}(Nr) / R_{m,m}^{(k)}(NA_k), \\ R_{j,m}^{(k)}(Nr) &= I_j^{(k)}(Nr) K_m(NA_{k-1}) - (-1)^{j+m} I_m(NA_{k-1}) K_j(Nr), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

であり、 I, K は変形が1種および2種のベッセル関数で、 $a_1 = a_2$ と1ている。また α, β, A, B, E は円筒の内外面の変位と応力で表わされる一種の積分定数である。

弾性体は円孔を有する無限体とあるが、このときの解は、(4)~(6)式において $k=2$ のみとし $a_1 \rightarrow \infty$ とし、式中の関数を

$$\left. \begin{aligned} G_m^{(2)}(Nr) &= K_m(Nr) / K_m(NA_2), \\ \chi_{mp}^{(2)}(Nr) &= -K_{m+1}(Nr) / K_m(NA_2), \\ \chi_{ms}^{(2)}(Nr) &= -K_{m-1}(Nr) / K_m(NA_2), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

としてえられるものに入射波動を加えて与えられるが、入射せん断波は、円柱座標で表わして

$$u^{(0)} = v_0 \exp \{ i[\omega t - (z \cos \varphi - r \sin \varphi \cos \theta) / V_s] \} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta, \quad (9)$$

$$v^{(0)} = v_0 \exp \{ i[\omega t - (z \cos \varphi - r \sin \varphi \cos \theta) / V_s] \} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta, \quad (10)$$

$$w^{(0)} = v_0 \exp \{ i[\omega t - (z \cos \varphi - r \sin \varphi \cos \theta) / V_s] \} \sin \varphi, \quad (11)$$

と与える。

3. 境界条件

入射せん断波をうける弾性体中の円筒の解析は、円筒と円孔を有する無限体を、境界条件を満足するように組合せて行おうが、係数 A, B についてはまだ次の適合条件を満足しなければならぬ。

$$a_k A_{mk} = \tilde{A}_{mr} \big|_{r=a_k}, \quad (12)$$

$$a_k B_{mk} = \tilde{B}_{mr} \big|_{r=a_k}, \quad (13)$$

ここで、無限体および円筒の変位および応力に関するものをそれぞれ上添字 (1), (2) で区別し、その他の係数を下添字 1, 2 で区別するものとすれば、境界条件は、円筒の内面は中空であるとして、

i). $r = a_1$ において

$$\tau_{r\theta}^{(1)} \big|_{r=a_1} = 0 \quad \therefore \alpha_{m2}^{(1)} = 0 \quad (14)$$

$$\sigma_r^{(1)} \big|_{r=a_1} = 0 \quad \therefore \beta_{m2}^{(1)} = 0 \quad (15)$$

$$\tau_{rz}^{(1)} \big|_{r=a_1} = 0 \quad (16)$$

ii). $r = a_1$ (弾性体と円筒の境界面) において

このときは、境界面で変位・応力が連続の場合と、せん断応力が存在しない場合で条件が異なる。

ii-a). 変位および応力が連続の場合 (case-I)

この場合は、境界面の各方向変位と境界面に作用している応力がそれぞれ等しいとすることが、

$$u^{(2)} + u^{(1)} \big|_{r=a_1} = u^{(2)} \big|_{r=a_1}$$

$$\therefore A_{m1}^{(2)} + B_{m1}^{(2)} = A_{m2}^{(2)} + B_{m2}^{(2)} + \Pi_0 \pi \sin 2\varphi \cdot e^{-m\omega}$$

$$\cdot \{ J_{m-1}(\omega a_1 \sin \varphi / \sqrt{s}) - J_{m+1}(\omega a_1 \sin \varphi / \sqrt{s}) \}, \quad (17)$$

$$v^{(2)} + v^{(1)} \big|_{r=a_1} = v^{(2)} \big|_{r=a_1}$$

$$\therefore A_{m1}^{(2)} - B_{m1}^{(2)} = A_{m2}^{(2)} - B_{m2}^{(2)} - \Pi_0 \pi \cos 2\varphi \cdot e^{-m\omega}$$

$$\cdot \{ J_{m-1}(\omega a_1 \sin \varphi / \sqrt{s}) + J_{m+1}(\omega a_1 \sin \varphi / \sqrt{s}) \}, \quad (18)$$

$$w^{(2)} + w^{(1)} \big|_{r=a_1} = w^{(2)} \big|_{r=a_1}$$

$$\therefore E_{m1}^{(2)} = E_{m2}^{(2)} + \Pi_0 \pi \sin \varphi \cdot e^{-m\omega} J_m(\omega a_1 \sin \varphi / \sqrt{s}), \quad (19)$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)} + \tau_{r\theta}^{(1)} \big|_{r=a_1} = \tau_{r\theta}^{(2)} \big|_{r=a_1}$$

$$\therefore \alpha_{m1}^{(2)} = \alpha_{m2}^{(2)} + (\mu_1/2\sqrt{s}) \Pi_0 \pi \sin 2\varphi \cdot e^{-m\omega} \cdot \{ J_{m+2}(\omega a_1 \sin \varphi / \sqrt{s}) - J_{m-2}(\omega a_1 \sin \varphi / \sqrt{s}) \}, \quad (20)$$

$$\sigma_r^{(2)} + \sigma_r^{(1)} \big|_{r=a_1} = \sigma_r^{(2)} \big|_{r=a_1}$$

$$\therefore \beta_{m1}^{(2)} = \beta_{m2}^{(2)} + (\mu_1/2\sqrt{s}) \Pi_0 \pi \sin 2\varphi \cdot e^{-m\omega} \cdot \{ -J_{m+2}(\omega a_1 \sin \varphi / \sqrt{s}) + 2J_m(\omega a_1 \sin \varphi / \sqrt{s}) - J_{m-2}(\omega a_1 \sin \varphi / \sqrt{s}) \}, \quad (21)$$

$$\tau_{rz}^{(2)} + \tau_{rz}^{(1)} \big|_{r=a_1} = \tau_{rz}^{(2)} \big|_{r=a_1} \quad (22)$$

ii-b). せん断応力が存在しない場合 (case-II)

この場合、境界面にせん断応力は存在しないが、それでも、半径方向の変位と、半径方向の直応力は連続

しているものとする。したがって、式(19), (21)が成

り立つ。その他の条件として

$$\tau_{r\theta}^{(2)} + \tau_{r\theta}^{(1)} \big|_{r=a_1} = 0$$

$$\therefore \alpha_{m2}^{(2)} + (\mu_1/2\sqrt{s}) \Pi_0 \pi \sin 2\varphi \cdot e^{-m\omega} \{ J_{m+2}(\omega a_1 \sin \varphi / \sqrt{s}) - J_{m-2}(\omega a_1 \sin \varphi / \sqrt{s}) \} = 0 \quad (23)$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)} \big|_{r=a_1} = 0 \quad \therefore \alpha_{m1}^{(2)} = 0, \quad (24)$$

$$\tau_{rz}^{(2)} + \tau_{rz}^{(1)} \big|_{r=a_1} = 0, \quad (25)$$

$$\tau_{rz}^{(2)} \big|_{r=a_1} = 0, \quad (26)$$

を満足しなければならぬ。

式(16), (22), (24), (26) に必要となる τ_{rz} を示せば

$$\tau_{rz} \big|_{r=a_k} = \sum_m C_m T_{mk} \cos m\theta \cdot e^{i(\omega t - N z)} \quad (27)$$

$$T_{mk} = \frac{1}{k-1} \left[(i^k m N / N_k a_k) G_m^{(k)}(N_k a_k) \cdot \alpha_{mk} - (\mu N^2 / \rho \omega^2) \{ 2N_k / N \{ \chi_{mp}^{(k)}(N_k a_k) + m G_m^{(k)}(N_k a_k) / N_k a_k \} - (N / N_k + N_k / N) \{ \chi_{mp}^{(k)}(N_k a_k) + m G_m^{(k)}(N_k a_k) / N_k a_k \} \} \beta_{mk} + 2\mu(m+1) A_{mk} - 2\mu(m-1) B_{mk} + 2\mu i N E_{mk} \} + (i^2 2\mu m N / N_k^2 a_k) G_m^{(k)}(N_k a_k) \{ (m+1) A_{mk} + (m-1) B_{mk} \} + \mu (N^2 / N_k + N_k) \{ \chi_{mp}^{(k)}(N_k a_k) + (m / N_k a_k) G_m^{(k)}(N_k a_k) \} E_{mk} \right], \quad (28)$$

4. 数値計算

数値計算として、円筒の内外径比 $a_1/a_2 = 1.1$ のものに対して、ポアソン比 $\nu = 0.25$ と円筒と弾性体の弾性定数は $\mu_2/\mu_1 = 10, 100, 1000$ に変化させたものと、弾性定数比 $\mu_2/\mu_1 = 100$ とポアソン比 $\nu = 0.05, 0.25, 0.45$ に変化させたものの解析を行ない、結果を図-2 ~ 図-8 に示した。

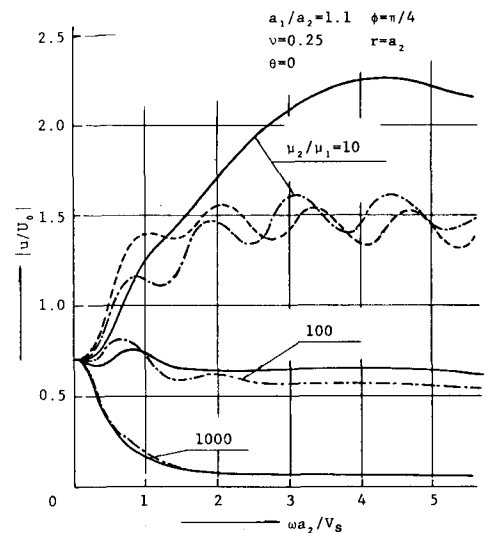


図-2 変位 u の角速度 ω に対する変化

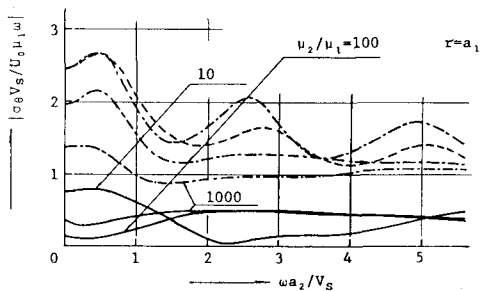
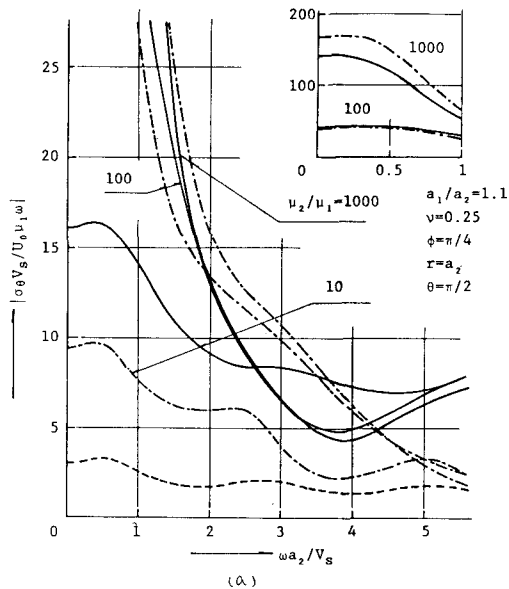


図-3 応力 σ_θ の角速度 ω に対する変化 (a)

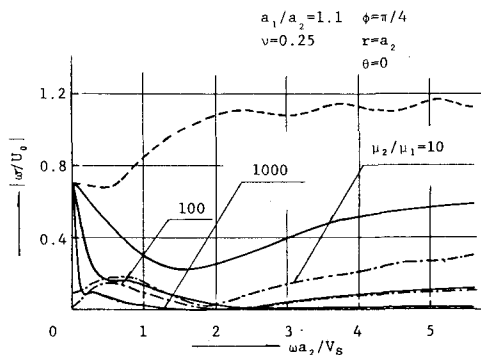


図-4 変位 ωr の角速度 ω に対する変化 (a)

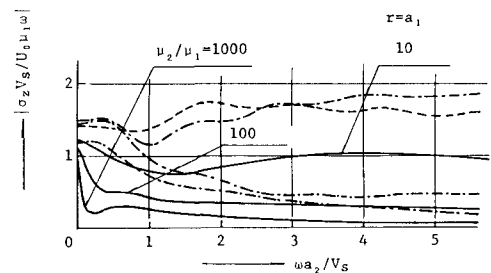
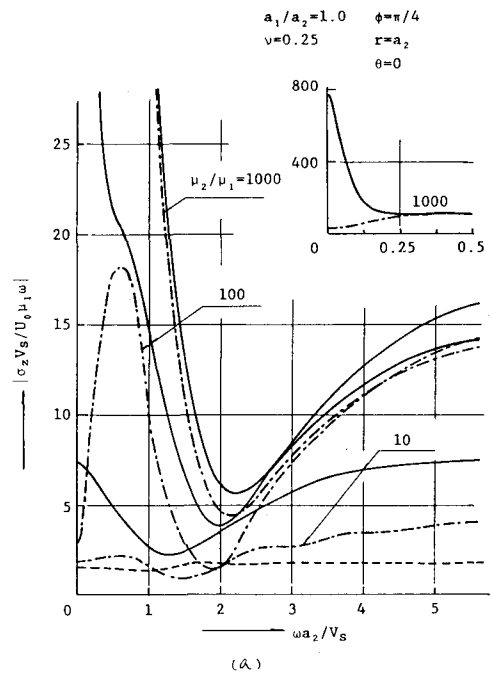


図-5 応力 σ_z の角速度 ω に対する変化 (a)

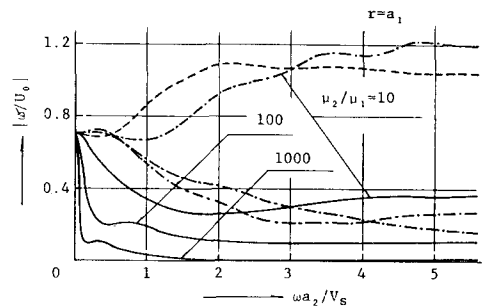


図-4 (b)

図-2~5には実線が case-I, 鎖線が case-II, 破線が円孔を有する無限体 ($\mu_1 = \mu_2$) を示し, 図-6~8)には実線が case-I, 破線が case-II の結果を示した。

弾性定数比を変化させたものでは, 半径方向変位は比の小さいほど両者の差は大きく, また一般に case-I の方が大きくはっている (図-2)。軸方向変位は

円筒と弾性体の傾向が異なり, 円筒では case-I が弾性体では case-II が大きく, また弾性定数比の小さいほど程大きい (図-4)。応力 σ_θ はやはり一般には円筒と case-I が, 弾性体では case-II が大きい, 特に弾性体では ω の値によっても異なりまた弾性定数比によっても異なり, た変化をしている (図-3)。応力 σ_z は ω と

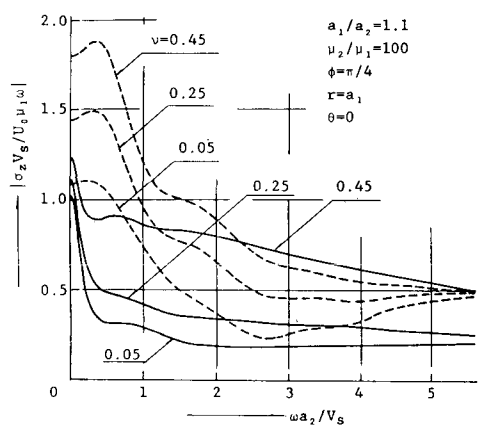
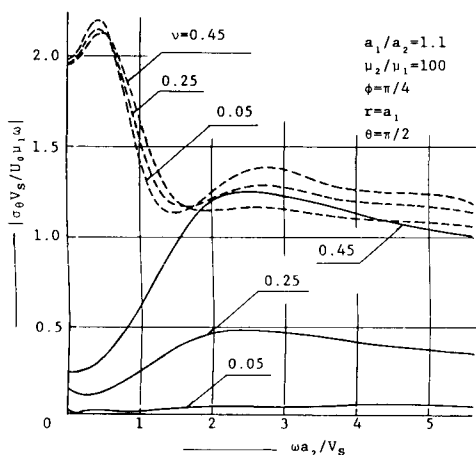
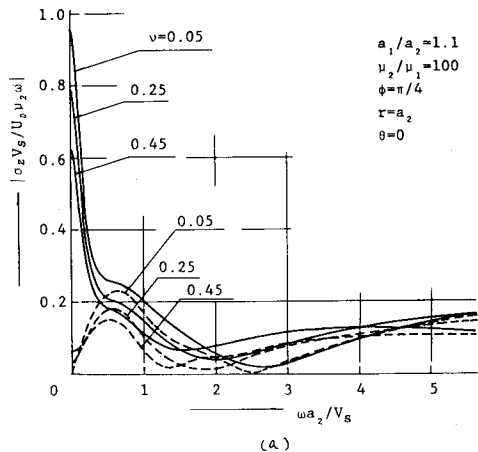
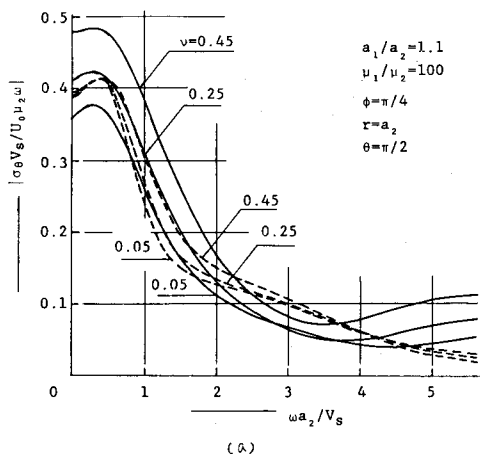


図-7. 応力 σ_0 のポアソン比による相違 (18)

図-8. 応力 σ_2 のポアソン比による相違 (16)

同様にかなりはつきりに傾向が表われており、円筒では Case-I, 弾性体では Case-II が大きく特に ω の小さい範囲で円筒部で両者の差は著しい(図-5)。

ポアソン比の変化に対しては、変位は Case-I の場合 $\omega a_2/V_0 < 1.5$ でポアソン比の大きいものが $\omega a_2/V_0 > 1.5$ で小さいものか大きく Case-II ではポアソン比の小さいものが大きい(図-6)。応力 σ_0 は Case-II ではポアソン比の影響が小さく Case-I ではポアソン比の大きいものが大きくその影響も大きい(図-7)。応力 σ_2 は、 ω の小さい範囲で円筒、弾性体ともポアソン比による影響は大きく円筒ではポアソン比の小さいものが、弾性体では大きいものが Case-I, II とも大きい値となっている(図-8)。

検討が十分ではないが、以上の結果から、傾向として境界面にせん断応力が存在しない場合には円筒部の

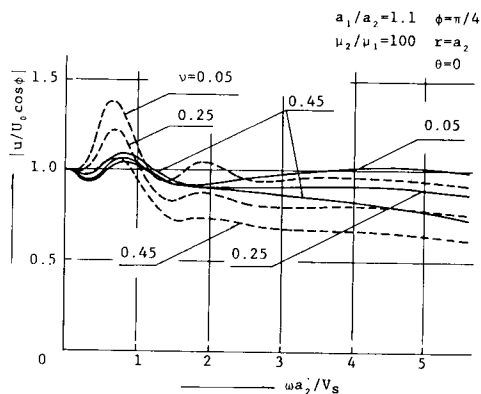


図-6 変位 u のポアソン比による相違

変位、応力は小さく弾性体では大きい値となるが円孔を有する無限体よりは小さい値である。

【参考文献】 1) 早井、佐武：材料力学集 第1部、413、1979 (18)、2) 松岡、坂町：北海道学術文芸集 No. 97、97、1981。