

I-9 表面加振される不均一弾性体の動的応答解析

大盤建設 正員 〇井上 聖
 北見工業大学 同 大島俊之
 北工学部 同 熊町純雄

1. まえがき

本研究は弾性体中に深さ方向に連続した弾性定数、密度の異なる補強材が等間隔、等断面積で配置されている構造を対象として、これの表面に部分分布する加振力が作用した場合、その動的応答がどのようなものかを検討したものである。このような構造の例としては実際には複合材料部材や杭杭等間隔で配置された基礎などと考えられる。

理論式は動的フリス4要素法を用い、定積分変換と有限フーリエ変換 およびその逆変換を用いて、表面の境界条件を満足するように各変位成分の動的応答を求める方法によった。数値計算では加振周波数と動的応答倍率の関係を対称および逆対称荷重の場合に求めてみた。

2. 理論

(1) 不均一弾性体の動的基礎式

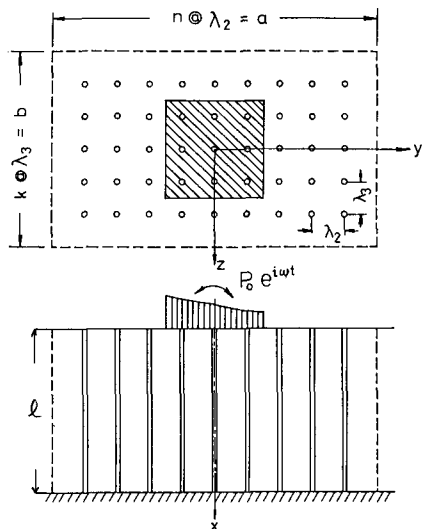
図1の構造の一部をとり出し、図2のように、補強材の位置を隅角とするフリス4要素に分割する。

動的フリス4要素関係式は三次元微小要素の振動方程式を用い、変位成分の要素内分布は一次変位に仮定して、ガウスター法により、フリス4の法則を用いた誘導したものである。

節点における動的フリス4式を誘導する際には、補強材の横抵抗はTimoshenko Beam作用をするものと見なし、補強材の軸歪剛性、質量とともに、節点に集中して考慮する方法を用いた。

このようにして得られた動的基礎式は次のようになる。

$$[K] \{u\} = [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} \quad \text{---(1)}$$



ただし $[K]$ 、 $[M]$ はそれぞれ剛性、質量マトリクスで、図1 不均一弾性体。

対称行列であり、次の要素以外は零である。

$$k_{11} = \frac{2\mu + \lambda}{36} \Delta_y^2 \Delta_z^2 D_x^2 + \frac{\mu}{6\lambda_2^2} \Delta_y^2 \Delta_z^2 + \frac{\mu}{6\lambda_3^2} \Delta_z^2 \Delta_y^2 + E_s k D_x^2,$$

$$k_{12} = \frac{\mu + \lambda}{12\lambda_2} \Delta_y \Delta_z^2 D_x, \quad k_{13} = \frac{\mu + \lambda}{12\lambda_3} \Delta_z \Delta_y^2 D_x, \quad k_{23} = \frac{\mu + \lambda}{4\lambda_2 \lambda_3} \Delta_y \Delta_z$$

$$k_{22} = \frac{\mu}{36} \Delta_y^2 \Delta_z^2 D_x^2 + \frac{2\mu + \lambda}{6\lambda_2^2} \Delta_y^2 \Delta_z^2 + \frac{\mu}{6\lambda_3^2} \Delta_z^2 \Delta_y^2 + \mu_s k_s k D_x^2$$

$$k_{33} = \frac{\mu}{36} \Delta_y^2 \Delta_z^2 D_x^2 + \frac{2\mu + \lambda}{6\lambda_3^2} \Delta_z^2 \Delta_y^2 + \frac{\mu}{6\lambda_2^2} \Delta_z^2 \Delta_y^2 + \mu_s k_s k D_x^2$$

$$k_{24} = \mu_s k_s k D_x, \quad k_{35} = k_{24}, \quad k_{44} = k_{55} = -D_x^2 E_s k_s^2 + \mu_s k_s$$

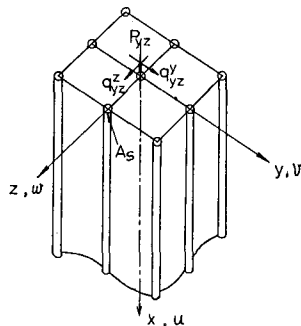


図2 表面のフリス4要素

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = \frac{\rho}{36} \bar{\Delta}_z^2 \bar{\Delta}_y^2 + p_s \eta, \quad m_{44} = m_{55} = -p_s r_s^2$$

$\{u\}^T = \{u_{yz}, v_{yz}, w_{yz}, -\theta_{yz}^y, -\theta_{yz}^z\}$, μ, λ は材料の Lamé の定数, ρ は密度, $\bar{\Delta}^2 = \Delta^2 + b$, $\Delta^2 f(y) = f(y+1) - 2f(y) + f(y-1)$, $\Delta f(y) = f(y+1) - f(y-1)$, $p_s, \mu_s, \kappa_s, E_s, r_s$ はそれぞれ補強材の密度, せん断弾性係数, せん断係数, 弾性係数, 回転半径を表すものとする。

(2) 定積分変換と有限フーリエ変換。

構造は表面の振動と同じ位相で振動するものとし、本式(1)の各変位成分は x 方向には連続関数, y, z 方向には離散関数と仮定される。次のようにおける。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{8}{lnk} \sum_k \sum_l \sum_m S_l S_j C_m [\Pi_{yz}] \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{n} \sin \frac{l\pi z}{k} e^{i\omega t} \\ v(x, y, z, t) &= \frac{8}{lnk} \sum_k \sum_l \sum_m R_l S_j S_m [\nabla_{yz}] \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{j\pi y}{n} \sin \frac{l\pi z}{k} e^{i\omega t} \\ w(x, y, z, t) &= \frac{8}{lnk} \sum_k \sum_l \sum_m S_l R_j S_m [\nabla_{yz}] \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{n} \cos \frac{l\pi z}{k} e^{i\omega t} \\ \theta^y(x, y, z, t) &= \frac{8}{lnk} \sum_k \sum_l \sum_m R_l S_j C_m [\Theta_{yz}^y] \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{j\pi y}{n} \sin \frac{l\pi z}{k} e^{i\omega t} \\ \theta^z(x, y, z, t) &= \frac{8}{lnk} \sum_k \sum_l \sum_m S_l R_j C_m [\Theta_{yz}^z] \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{n} \cos \frac{l\pi z}{k} e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

したがって式(1)を x 方向には有限フーリエ変換, y, z 方向には定積分変換を行ない, θ^y, θ^z の項を4行, 5行の式より消去すれば, 次のようになる。

$$[U] \{U\} = [N] \{U_B\} \quad (x=0, -(-1)^m \{U_B\} \quad x=L) \quad (3)$$

$$[U] = \begin{bmatrix} a_{11} M^2 + a_{12} & a_{13} M & a_{14} M \\ a_{21} M (a_{22} M^2 + a_{23}) & (a_{24} M^2 + a_{25}) (a_{22} M^2 + a_{23}) + a_{26}^2 M^2 & a_{27} (a_{22} M^2 + a_{23}) \\ a_{31} M (a_{32} M^2 + a_{33}) & a_{34} (a_{32} M^2 + a_{33}) & (a_{35} M^2 + a_{36}) (a_{32} M^2 + a_{33}) + a_{37}^2 M^2 \end{bmatrix}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ 0 & a_{24} M (a_{22} M^2 + a_{23}) - a_{26}^2 M & 0 & a_{22} a_{26} M & 0 \\ 0 & 0 & a_{35} M (a_{32} M^2 + a_{33}) - a_{37}^2 M & 0 & a_{32} a_{37} M \end{bmatrix}$$

$\{u\}^T = \{u_{yz}, v_{yz}, w_{yz}\}$, $\{U_B\}^T = \{u_{yz}, v_{yz}, w_{yz}, -\theta_{yz}^y, -\theta_{yz}^z\}$, 大文字は応答振幅。

$$\begin{aligned} a_{11} &= (C_p^2/C_s^2) \bar{D}_l \bar{D}_j + (C_f^2/C_s^2) \eta, \quad a_{12} = D_l \bar{D}_j / \lambda_2 + D_j \bar{D}_l / \lambda_3 + (\bar{D}_l \bar{D}_j + r_p \eta) (\omega^2 / C_s^2), \\ a_{13} &= (C_p^2/C_s^2 - 1) \sin j\pi/n \cdot \bar{D}_j / \lambda_2, \quad a_{14} = (C_p^2/C_s^2 - 1) \bar{D}_l \sin j\pi/k \cdot 1/\lambda_3, \quad a_{21} = a_{13}, \\ a_{22} &= C_f^2 r_s^2 / C_s^2, \quad a_{23} = C_r^2 \kappa_s / C_s^2 + r_p r_s^2 \omega^2 / C_s^2, \quad a_{24} = \bar{D}_l \bar{D}_j, \quad a_{25} = (C_p^2/C_s^2) \bar{D}_l \bar{D}_j / \lambda_2^2 \\ &+ \bar{D}_l \bar{D}_j / \lambda_3^2, \quad a_{27} = (C_p^2/C_s^2 - 1) \sin j\pi/k \sin i\pi/n \cdot 1/\lambda_2 \lambda_3, \quad a_{31} = a_{14}, \quad a_{32} = a_{22}, \\ a_{33} &= a_{23}, \quad a_{34} = a_{24}, \quad a_{35} = a_{24}, \quad a_{36} = (C_p^2/C_s^2) \bar{D}_l \bar{D}_j / \lambda_3^2 + \bar{D}_l \bar{D}_j / \lambda_2^2, \quad a_{26} = (C_p^2/C_s^2) \kappa_s \eta \\ a_{37} &= a_{26}, \quad C_s^2 = \mu/p, \quad r_p = p_s/p, \quad C_f^2 = E_s/p, \quad C_r^2 = \mu_s/p, \quad C_p^2 = 2\mu + \lambda/p, \\ D_l &= 2(1 - \cos \frac{l\pi}{n}), \quad D_j = 2(1 - \cos \frac{j\pi}{k}), \quad \bar{D}_l = 1 - \frac{D_l}{6}, \quad \bar{D}_j = 1 - \frac{D_j}{6}, \quad \eta = A_s / \lambda_2 \lambda_3, \end{aligned}$$

(3) 深さ方向の閉いた関数表示

式(3)を代数的に解けば、各変位成分の係関数が求まり、これを式(2)に代入すれば、各変位の応答振幅が表面と下底の境界値で表現される。

$\det [U] = 0$ の式は M^2 に關する5次方程式となるが、これを根を数値的に求め、未定係数法により、境界値の係数は部分分数に展開される。更に無限級数求和に關する公式を用いて x 方向には閉いた関数により表現される。

$$\{U\} = [U_1^1(x)] \{U_B\}_{x=0} + [U_1^2(x)] \{U_B\}_{x=l} \quad (4)$$

左に $[U_1^1]$, $[U_1^2]$ は 5×5 の関数行列であり、 x ($=x/l$) 方向には連続関数と表わされる。

(4) 境界条件

$x-y$ 平面, $x-z$ 平面に平行な4つの側面, および $x=l$ の底面では、面に垂直な方向の変位のみが存在し、他の変位は存在しない状態を決定する。= 9 ようにすれば、境界条件の取扱いが簡単となるが、= 9 条件は、= 9 場合の単純支持端と同一拘束条件となる。

表面では次の条件を考える。

$$\sigma_x|_{x=0} = P_{yz}, \quad \tau_{xy}|_{x=0} = q_{yz}, \quad \tau_{xz}|_{x=0} = q_{yz}^z \quad (5)$$

左に P_{yz} , q_{yz} , q_{yz}^z は表面の垂直荷重, せん断荷重と部材の力に離散化したものと見做す。また補強材の上表面には分布 x - z 荷重が作用しているものと見て ∂_{yz} , ∂_{yz}^z の項を無視する。式(5)を離散化したとせば、次のようになる。

$$\begin{aligned} a_{11} \bar{U}_{yz} + a_{12} \bar{V}_{yz} + a_{13} \bar{W}_{yz} &= P_{yz}, & a_{21} \bar{U}_{yz} + a_{22} \bar{V}_{yz} &= q_{yz}, \\ a_{31} \bar{U}_{yz} + a_{33} \bar{W}_{yz} &= q_{yz}^z \end{aligned} \quad (6)$$

左に $a_{11} = (2\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3 4\gamma^2 \bar{\Delta}_z^2$, $a_{12} = 3\lambda\lambda_3 \sigma_y \bar{\Delta}_z^2$, $a_{13} = 3\lambda\lambda_2 \sigma_z \bar{\Delta}_y^2$, $a_{21} = 3\mu\lambda_3 \sigma_y \bar{\Delta}_z^2$, $a_{22} = \mu\lambda_2\lambda_3 \bar{\Delta}_y^2 \bar{\Delta}_z^2$, $a_{31} = 3\mu\lambda_2 \sigma_z \bar{\Delta}_y^2$, $a_{33} = \mu\lambda_2\lambda_3 \bar{\Delta}_y^2 \bar{\Delta}_z^2$, $P_{yz} = \lambda_2\lambda_3 \bar{\Delta}_y^2 \bar{\Delta}_z^2 P_{yz}$, $q_{yz} = \lambda_2\lambda_3 \bar{\Delta}_y^2 \bar{\Delta}_z^2 q_{yz}$, $q_{yz}^z = \lambda_2\lambda_3 \bar{\Delta}_y^2 \bar{\Delta}_z^2 q_{yz}^z$
式(6)により境界値が決定され、式(2), (4)より各変位の応答振幅が得られる。

3. 数値計算例

図1の構造に於いて、図3と図4のような対称および反対称荷重が作用する場合の動的応答を求め、各変位成分の動的応答振幅の絶対値と、静的載荷時の値との比 $|U_{dy}| / U_{st}$ を各振動周波数 ω に計算した。

構造は図1に於いて：

弾性係数 $E = 3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, 単位重量 2.3 t/m^3 , $\nu = 0.17$

補強材は図1に於いて円形断面を想定して：

弾性係数 $E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, 単位重量 7.85 t/m^3 , $\nu = 0.17$

0.3, せん断係数 $k_s = 0.866$, $\eta = 0.1$, $n = k = 8$,

$\lambda_2 = \lambda_3 = 10 \text{ cm}$, $l = 8, 24, 50 \text{ cm}$, 荷重強度は図3, 図4

に於いて、それぞれ 0.5 kg/cm^2 , 最大値は 0.4 kg/cm^2 とした。

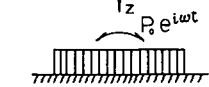
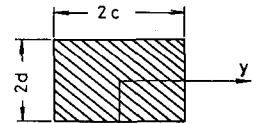


図3 対称荷重

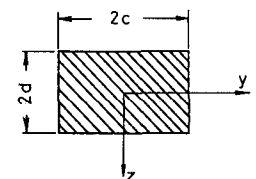


図4 反対称荷重

図5と図6は対称荷重が作用したときの荷重近傍の垂直変位 U と水平変位 V の動的応答倍率の特性を示している。横軸は加振周波数を無次元化した量 $\Omega = b\omega / 2\pi C_S$ である。

l の3種類、 $8, 24, 50 \text{ cm}$ に対して、静的変位は順に小さくなるが、一応動的応答倍率の示す深さ方向の減衰は早くなる。図5に $l=24 \text{ cm}$ の場合の U の場合 Ω が増えるにつれて応答は小さくなる結果となっているが、図6の水平変位 V については l が大きくなるにつれて、振動応答しやすい結果となっている。

図7と図8は逆対称荷重の場合の結果をそれぞれ U と水平変位 V について示しているが Ω の場合は Ω の場合と同様である。

4. まとめ

動的フリス4要素法を応用して、内部に異質な弾性と密度を有する補強材のある弾性体の表面加振の問題を解析した。

数値計算では加振周波数と動的応答倍率の関係を調べる。また、計算例をいれ、くわしく検討をする。

さらに今後には補強材の効果を Ω とも、弾性係数 E , 密度 ρ などを考慮して計算し検討したい。

参考文献

- 1) 小塚, 南井, 篠崎; 成層地盤の動特性について, 第24回応用力学連合講演会, 1974, p159.
- 2) T. Kobori, Minai, Shinozaki; Vibration of a Rigid Circular Disc on an Elastic Half-Space Subjected to Plane Waves (Part 2), Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 24, 1975, p153
- 3) W. Kohn; Propagation of Low-Frequency Elastic Disturbance in a Three-Dimensional Composite Material, Journal of Applied Mechanics, 1975, March, p159
- 4) Ewing, Jardetsky, Press; Elastic waves in Layered Media, McGraw-Hill, 1957.

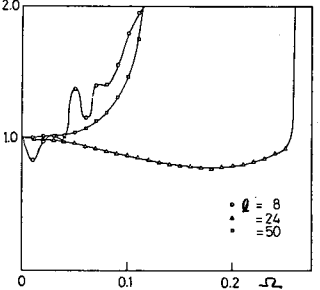


図5 対称荷重 $|U_{dy}|/U_{st}$

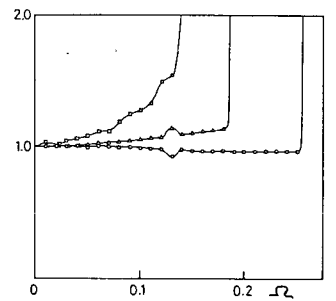


図6 対称荷重 $|V_{dy}|/V_{st}$

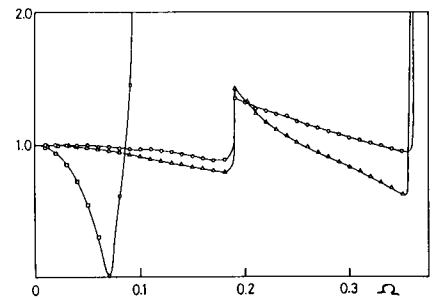


図7 逆対称荷重 $|U_{dy}|/U_{st}$

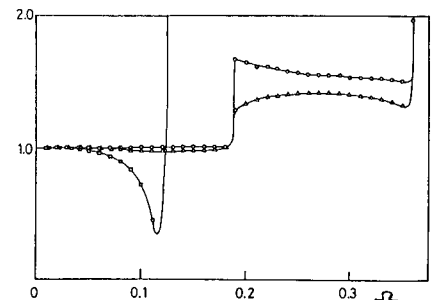


図8 逆対称荷重 $|V_{dy}|/V_{st}$