

I-8 有限平板法による3次元多層体上の円形基礎の動的応答について

北海道開発局 土木試験所 正員 吉田 純一
北海道大学 工学部 正員 能町 純雄

1. まえがき

本文は3次元多層体上の円形基礎の動的応答について、多層体を平板に分割した要素によって計算し、複素コンプライアンスを求めようとするものである。

従来この種の研究では半無限弾性体における場合 Fourier 変換, Hankel 変換を利用するなどして解析的な方法で行なわれている。また、剛な基盤上の層状体の場合についても1層であれば解析的方法を用いている研究も見られるが、この場合は解析的には非常に複雑になるため一般には有限要素法を用いて応答を求めている。しかしながら有限要素法による場合、有限個の節点のみにより解析を行なうため仮想境界を設けて、この仮想境界での波の反射が生じないようにしなければならない問題が生じる。

本文では円柱座標系で表わされる3次元弾性体について $r\theta$ 面で厚さ一定に分割した平板を取り出し、この円周方向、半径方向には Fourier-Hankel 変換を行ない、板の厚さ方向には Galerkin 法を用いて導いた平板要素を用いて多層体地盤の動的応答解析を進める。この場合、半径方向には無限の平板を考えるため有限要素法における境界の問題は生じない。

2. 平板要素の基本式

Fig-1 に示すように、厚さ h の板に円柱座標 (r, θ, z) をとり、 u, v, w とする。ここでは周期的外力で定常状態を考えるので ω 外力の円振動数として $f = \xi e^{i\omega t}$ のように表わすものとする。

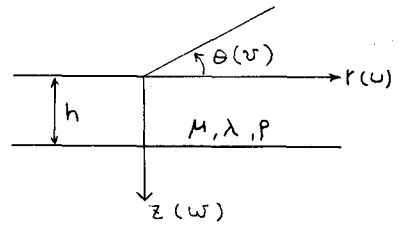


Fig-1.

この座標系の運動方程式に、各変位の z 方向分布を一次変化と仮定し Galerkin 法を適用し、 θ, r 方向に Fourier-Hankel 変換を行なうと、平板要素に関する基本式(1)が得られる^{1), 2)}

$$\begin{bmatrix} Q_{amg}(z=0) \\ Q_{bmg}(z=0) \\ Q_{zmg}(z=0) \\ Q_{amg}(z=h) \\ Q_{bmg}(z=h) \\ Q_{zmg}(z=h) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{33} & 0 & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{44} & 0 & 0 \\ \text{Symm.} & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mg}(z=0) \\ B_{mg}(z=0) \\ W_{mg}(z=0) \\ A_{mg}(z=h) \\ B_{mg}(z=h) \\ W_{mg}(z=h) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2\mu/h + (\mu\xi^2 - \rho p^2)zh/3. & a_{14} &= -2\mu/h + (\mu\xi^2 - \rho p^2)h/3. \\ a_{22} &= 2\mu/h + (\mu\alpha\xi^2 - \rho p^2)zh/3. & a_{23} &= (\mu - \lambda)\xi. \\ a_{25} &= -2\mu/h + (\mu\alpha\xi^2 - \rho p^2)h/3. & a_{26} &= (\mu + \lambda)\xi. \\ a_{33} &= \mu\alpha/h + (\mu\xi^2 - \rho p^2)h/3 & a_{35} &= -a_{26}/2. \\ a_{36} &= -\mu\alpha/h + (\mu\xi^2 - \rho p^2)h/6 & a_{44} &= -a_{11}. \\ a_{55} &= -a_{22}. & a_{56} &= a_{26}. \\ & & a_{66} &= -a_{33}. \end{aligned}$$

上式中 μ, λ : ラーメの定数, h : 板の厚さ, ρ : 単位質量, α : 円振動数, $\alpha = 2 + \lambda/\mu$.

A_{mg}, B_{mg}, W_{mg} および $Q_{amg}, Q_{bmg}, Q_{zmg}$ はそれぞれ Fourier-Hankel 変換した変位および応力であり次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} A_m \xi &= \int_0^\infty r \{ (C_m[\zeta] + S_m[\zeta]) J_m(\xi r) \pm (C_m[\zeta] - S_m[\zeta]) J_{m-1}(\xi r) \} dr \\ B_m \xi &= \int_0^\infty r C_m[\zeta] J_m(\xi r) dr \\ W_m \xi &= \int_0^\infty r C_m[\zeta] J_m(\xi r) dr \\ Q_{am} \xi &= \int_0^\infty r \{ (C_m[\tilde{\zeta}_r] + S_m[\tilde{\zeta}_r]) J_m(\xi r) \pm (C_m[\tilde{\zeta}_r] - S_m[\tilde{\zeta}_r]) J_{m-1}(\xi r) \} dr \\ Q_{bm} \xi &= \int_0^\infty r C_m[\tilde{\zeta}_r] J_m(\xi r) dr \\ Q_{zm} \xi &= \int_0^\infty r C_m[\tilde{\zeta}_r] J_m(\xi r) dr \end{aligned} \right\} (2)_{1,2}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{am} \xi &= \int_0^\infty r \{ (C_m[\tilde{\zeta}_r] + S_m[\tilde{\zeta}_r]) J_m(\xi r) \pm (C_m[\tilde{\zeta}_r] - S_m[\tilde{\zeta}_r]) J_{m-1}(\xi r) \} dr \\ Q_{bm} \xi &= \int_0^\infty r C_m[\tilde{\zeta}_r] J_m(\xi r) dr \\ Q_{zm} \xi &= \int_0^\infty r C_m[\tilde{\zeta}_r] J_m(\xi r) dr \end{aligned} \right\} (3)_{1,2}$$

また Fourier 変換の記号は $C_m[f] = \int_0^{2\pi} f \cos m\theta d\theta$, $S_m[f] = \int_0^{2\pi} f \sin m\theta d\theta$ であり, $J_m(x)$ は m 次の第 1 種の Bessel 関数である。

3. 多層体の場合

多層体を適当な平板要素に分割し, その各境界で力のつり合をとるにより解析することができる。

Fig. 2 のように多層体を分割し各境界を layers より 0, 1, ..., λ , ..., n とし境界 $\lambda-1$ と λ の間の層を λ 層として各定数に λ をつけて表わすものとする。

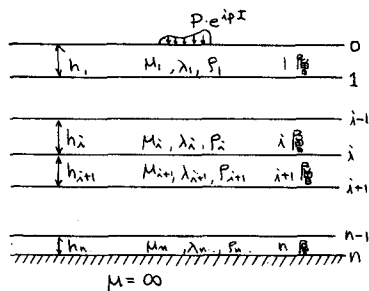


Fig - 2

境界 λ での力のつり合を考えると, 境界 λ での r, θ, z 方向の振動入力を $q_{\theta z, \lambda}$, $q_{rz, \lambda}$, P_λ とすると

$$\sigma_{z, \lambda+1}|_{z=0} - \sigma_{z, \lambda}|_{z=h} = P_\lambda, \quad \tau_{rz, \lambda+1}|_{z=0} - \tau_{rz, \lambda}|_{z=h} = q_{rz, \lambda}$$

$$\tau_{\theta z, \lambda+1}|_{z=0} - \tau_{\theta z, \lambda}|_{z=h} = q_{\theta z, \lambda}$$

したがって像関数では

$$\left. \begin{aligned} Q_{am\xi, \lambda+1}|_{z=0} - Q_{am\xi, \lambda}|_{z=h} &= T_{am\xi, \lambda} \\ Q_{bm\xi, \lambda+1}|_{z=0} - Q_{bm\xi, \lambda}|_{z=h} &= T_{bm\xi, \lambda} \\ Q_{zm\xi, \lambda+1}|_{z=0} - Q_{zm\xi, \lambda}|_{z=h} &= T_{zm\xi, \lambda} \end{aligned} \right\} (4)$$

$T_{am\xi}$, $T_{bm\xi}$, $T_{zm\xi}$ は式(3)にしたがって変換した振動入力の像関数である。

地表面 ($\lambda=0$) では式(4)と同様に

$$Q_{am\xi, 1}|_{z=0} = T_{am\xi, 0}, \quad Q_{bm\xi, 1}|_{z=0} = T_{bm\xi, 0}, \quad Q_{zm\xi, 1}|_{z=0} = T_{zm\xi, 0} \quad (5)$$

基盤は剛体と考えるため $\lambda=n$ では, 各変位がないとして

$$A_{m\xi, n} = B_{m\xi, n} = W_{m\xi, n} = 0 \quad (6)$$

となる。式(4)~(6)に式(1)を代入して各変位成分の像関数の連立方程式を求めて逆変換する事により各層の変位, 応力を求める事が出来る。

各変位の逆変換は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\infty \xi \{ (A_{m\xi} + B_{m\xi}) J_m(\xi r) \pm (A_{m\xi} - B_{m\xi}) J_{m-1}(\xi r) \} d\xi \cdot \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \\ w &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\infty \xi W_{m\xi} J_m(\xi r) d\xi \cdot \cos m\theta \end{aligned} \right\} (7)$$

4. 円形基礎の複素コラライアレス

今, 地表面で円形基礎により水平振動と回転振動(ロッキンク)を受けている場合の応答について解析する。半径 a の円形基礎の水平力を $H e^{i\lambda x}$, ロッキンクモーメントを $M e^{i\lambda x}$ としせん断力, 圧力分布を次式のよに仮定する

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\tau}_{rz} &= \frac{H}{\pi a^2} \cos \theta, \quad \tilde{\tau}_{\theta z} = -\frac{H}{\pi a^2} \sin \theta, \quad \tilde{\sigma}_z = \frac{4M}{\pi a^4} \cdot r \cos \theta \quad (r < a) \\ \tilde{\tau}_{rz} &= \tilde{\tau}_{\theta z} = \tilde{\sigma}_z = 0. \quad (r > a) \end{aligned} \right\} (8)$$

(したがって式(5)の境界条件は

$$T_{am\xi} = -T_{bm\xi} = \frac{2H}{a\xi} J_1(\xi a), \quad T_{2m\xi} = \frac{4M}{a+\xi} J_2(\xi a), \quad (m=1) \quad \left. \vphantom{\frac{2H}{a\xi}} \right\} (9)$$

$$T_{am\xi} = T_{bm\xi} = T_{2m\xi} = 0, \quad (m \neq 1)$$

また応答は次式のような重み付きの平均水平変位と平均回転角を考える。

$$U_a = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (u \cos \theta - v \sin \theta) r dr d\theta, \quad \varphi_a = \frac{4}{\pi a^4} \int_0^{2\pi} \int_0^a w r^2 \cos \theta dr d\theta \quad (10)$$

この場合の複素コンプライアンスは次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_a \\ \tilde{\varphi}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{HH} & C_{MH} \\ C_{HM} & C_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ M \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

5. 計算例

Fig-3. に示すように剛な基盤上に、剛性の異なる層をはさんでいる地盤のモデルについて、剛性の異なる層の位置を変化させた場合の影響について数値計算を行ない複素コンプライアンスを求めた。計算は地盤を5等分しその内の一層の剛性が異なるとして計算した。計算に用いた値は次の通りである。

$$\mu_1 = \mu_3 = \mu_0. \quad (\mu_0: \text{基準とした剛性})$$

$$\mu_2 = 5\mu_0. \quad : \text{剛性の異なる層の剛性.}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\delta = 2a : \text{全層厚 (a: 円形基礎の半径)}$$

$$\delta_1 : \text{剛性の異なる層までの表面からの層厚.}$$

$$\delta_2 = \delta/5 : \text{剛性の異なる層の層厚.}$$

解析結果は無次元振動数 $a_0 = a\sqrt{S/\mu_0}$ をパラメータとして用い、複素コンプライアンスは静的な場合 ($P=0$) に対する応答倍率で表わし、剛な層が表面にある ($\delta_1/\delta = 0$)、中間にある ($\delta_1/\delta = 2/5$) 基盤上にある ($\delta_1/\delta = 4/5$) 場合について計算した。

各コンプライアンスの計算結果を Fig-4~9 に示す。ロッキングによる φ_a のコンプライアンス (C_{MH}) の実数部を Fig-4 に、虚数部を Fig-5 に示した。この計算では剛な層が下に在るほど応答のピークを示す振動数が高くなる傾向にある。また応答の分布は層の構成によって実数部も虚数部も変化している。

Fig-6, 7 には水平力による U_a のコンプライアンス (C_{HH}) を示した。この場合 C_{HH} に比べピークが多く表われにくく。

Fig-8, 9 には水平力による φ_a のコンプライアンス ($C_{HM} = C_{MH}$) を示した。この場合は応答のピークは C_{HM} とともに現われるが応答値の変化が大きく現われている。

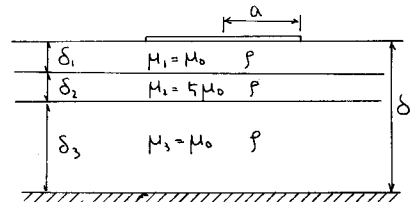


Fig-3

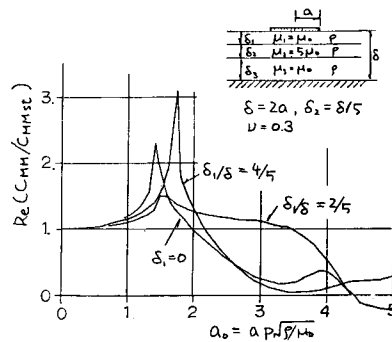


Fig-4. ロッキングによる φ_a の複素コンプライアンス (C_{MH}) の実数部

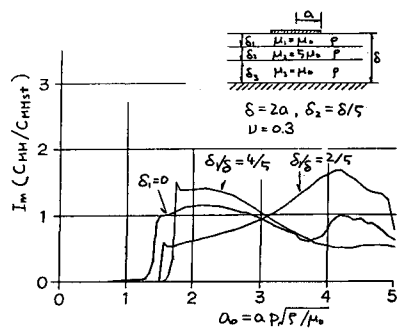


Fig-5. ロッキングによる φ_a の複素コンプライアンス (C_{MH}) の虚数部

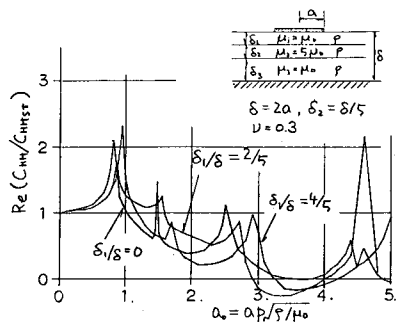


Fig-6. 水平力による U_0 の複素コンプライア
ンス (C_{HH}) の実数部

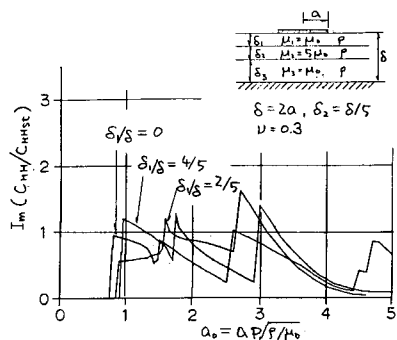


Fig-7. 水平力による U_0 の複素コンプライア
ンス (C_{HH}) の虚数部

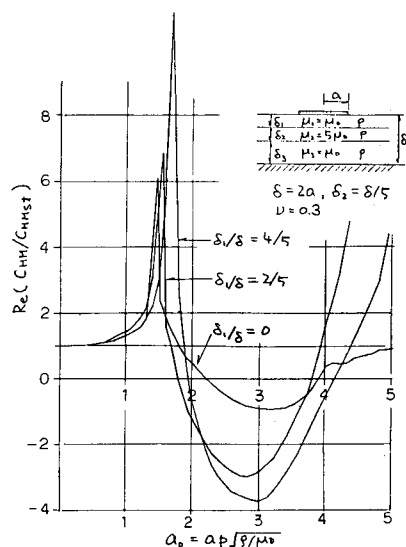


Fig-8. 水平力による q_0 の複素コンプライア
ンス (C_{HH}) の実数部

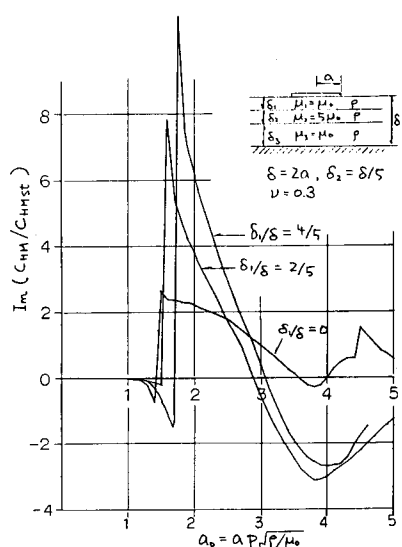


Fig-9. 水平力による q_0 の複素コンプライア
ンス (C_{HH}) の虚数部

6. あとがき

有限平板法による剛性の異なる3次元多層体についての動的応答の計算方法と円形基礎の複素コンプライアランスの若干の計算結果を示した。本文で示した方法を用いる事により層構造のエネルギー消散による減衰特性について、有限要素法による場合の仮想境界のような問題を考える事なく計算できる。今後この計算方法を用いて層構造の消散減衰についての検討を進めたい。

参考文献

- 1) 吉田、能所：三次元多層体の動的応答について：土木学会北海道支部論文報告集，第37号，1980
- 2) 吉田、能所：有限平板法による部分振動入力に対する動的応答について：土木学会第36回年次学術講演会概要集 I-259，1981。