

I-7 半無限弾性体表面上に下方から上昇するせん断波による剛結された片持ばりの応答について

北海道大学 正員 能野 純雄
室蘭工業大学 正員 松岡 健一
専修短期大学 正員 三上 敬司

1. はじめに

弾性体に支持された基礎の動的挙動に関しては、多くの研究者によって行なわれている。例えば、1955年 Arnold, Bycroft and Warburton¹⁾及び 1956年には、Bycroft²⁾によって、水平変位のみで回転のないことを条件とする円盤の振動に対する境界条件を規定として解いているが、これは、回転を考慮しておらず、数学的取扱いだけを考えている。さらに、Lucó³⁾及び Veletsos⁴⁾らは、1971年に 半無限弾性体上の円形剛体フーチング基礎のロッキング振動と水平振動の連成振動を考慮した Compliance を求めている。

著者らも Fourier-Hankel 変換を用いて、半無限弾性体上の円形剛体フーチング基礎の Compliance を求めている。

$$\begin{bmatrix} u_a \\ \psi_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{HH} & C_{HM} \\ C_{MH} & C_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ M_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

u_a : 円形剛体フーチング底面の平均水平変位 ψ_a : 円形剛体フーチング底面の平均回転角

V_0 : 円形剛体フーチング底面内の水平力 M_0 : 円形剛体フーチング底面内の回転モーメント

$C_{HH}, C_{HM}, C_{MH}, C_{MM}$ は、Compliance である。

本論文は、半無限弾性体内の下方から上昇するせん断波と地表面で反射する反射波を重ね合わせた重複波が生じる場合、その重複波による半無限弾性体に剛密着している片持ばりの応答について研究したものである。

2. 解析方法

重複波に関して 上昇するせん断波は、

$$\bar{u} e^{i\psi(t-\frac{z}{c_s})}$$

反射係数=1とした地表面での反射波は、

$$\bar{u} e^{i\psi(t+\frac{z}{c_s})}$$

となる。

従って、弾性体内の変位は、(2)式と(3)式を組み合わせ

$$u(z) = \bar{u} e^{i\psi(t-\frac{z}{c_s})} + \bar{u} e^{i\psi(t+\frac{z}{c_s})}$$

となる。

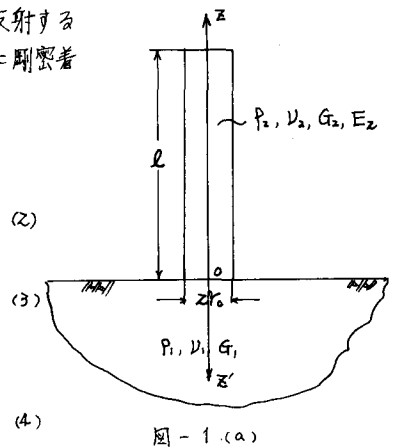
$\bar{u}$: せん断波の振幅 ρ : せん断波の円振動数 c_s : せん断速度 z' : 半無限弾性体の深さの位置

t : 時間

ところで、半無限弾性体の表面上に剛密着している片持ばりに(2)式のようなせん断波が作用した場合の解析に関しては、Timoshenko Beam理論を用いて 振動微分方程式を立てると、

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \rho_2 A_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ y + \bar{u} e^{i\psi(t-\frac{z}{c_s})} + \bar{u} e^{i\psi(t+\frac{z}{c_s})} \right\} \quad (5)$$

$$V - \frac{\partial M}{\partial z} = \rho_2 I_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (6)$$



$$V = K' G_2 A_2 \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \psi \right) \quad (7)$$

$$M = -E_2 I_2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (8)$$

V :せん断力 M :回転モーメント ψ :回転角 E_2 :ヤング率 ρ_2 :密度 A_2 :断面積 G_2 :せん断係数
 I_2 :断面二次モーメント

ここで、 $y = y^* e^{i\omega t}$, $\psi = \psi^* e^{i\omega t}$, $M = M^* e^{i\omega t}$ において 長さ方向に有限 Fourier 変換を施し
 それを 逆変換し, さらに 境界条件 $z=0$ で $y^* = u_a$, $\psi^* = \psi_a$ を適用して片持ばりと地盤との接触面に
 働くせん断力 V_0 , 回転モーメント M_0 を求めると

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = E_2 A_2 \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{l} & a_{12} \\ a_{21} & l \cdot a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a + 2\bar{u} \\ \psi_a \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここで, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$: 主に Fourier 級数形で表わされるものである,

l : 片持ばりの長さ

半無限弾性体表面上に剛密着している片持ばりに下方からせん断力が伝搬して反射する場合の応答について求
 めてみる。

i) 水平方向の変位応答

$$\left| \frac{u_a + 2\bar{u}}{\bar{u}} \right| = \left| \frac{2A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \right| \quad (10)$$

ii) 角変位の変位応答(片持ばりの長さ l に回転角 ψ_a を
 掛けたものを角変位と名付ける)

$$\left| \frac{l \cdot \psi_a}{\bar{u}} \right| = \left| \frac{2A_{21}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \right| \quad (11)$$

iii) 一種の外力 $2E_2 A_2 \bar{u} \omega_0^2 / l$ に対する片持ばり底面
 内のせん断力 V_0 の応答は,

$$\left| \frac{V_0}{\frac{2E_2 A_2 \bar{u} \omega_0^2}{l}} \right| = \left| \frac{1}{\omega_0^2} \frac{a_{11}A_{22} - a_{12}A_{21}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \right| \quad (12)$$

iv) 一種の外力モーメント $2E_2 A_2 \bar{u} \omega_0^2$ に対する片持ばり底面内のモーメント M_0 の応答は,

$$\left| \frac{M_0}{2E_2 A_2 \bar{u} \omega_0^2} \right| = \left| \frac{1}{\omega_0^2} \frac{a_{22}A_{22} + a_{22}A_{21}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \right| \quad (13)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= 1 + E_2 A_2 \left(\frac{a_{11}}{l} C_{HH} + a_{21} C_{HM} \right) \\ A_{12} &= E_2 A_2 \left(\frac{a_{12}}{l} C_{HH} + a_{22} C_{HM} \right) \\ A_{21} &= E_2 A_2 \left(a_{11} C_{HH} + l \cdot a_{21} C_{HM} \right) \\ A_{22} &= 1 + E_2 A_2 \left(a_{12} C_{HH} + l \cdot a_{22} C_{HM} \right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

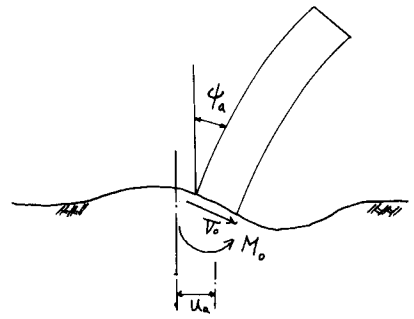


図-1 (b)

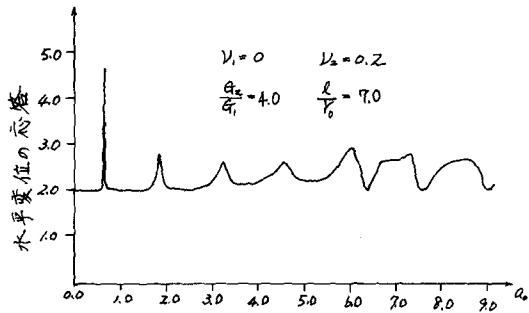


図-2 (a)

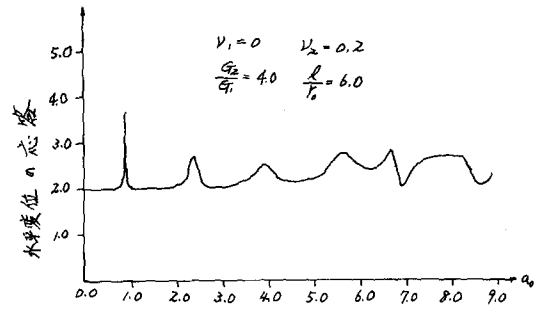


図-2 (b)

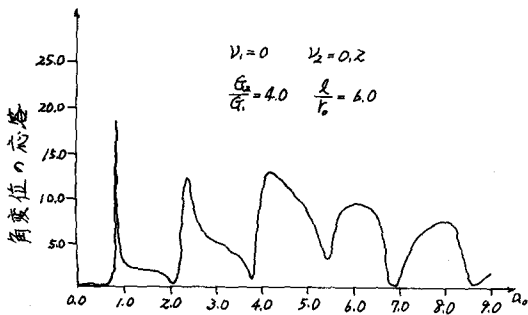


図-3 (a)

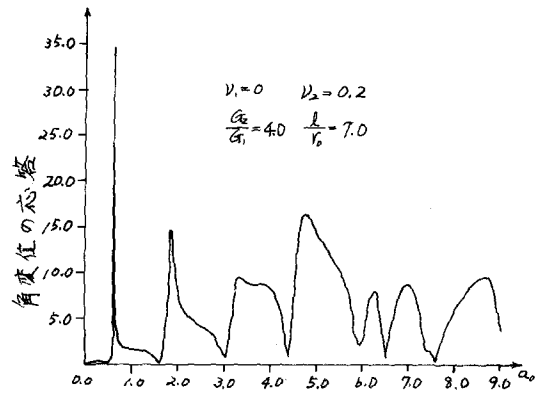


図-3 (b)

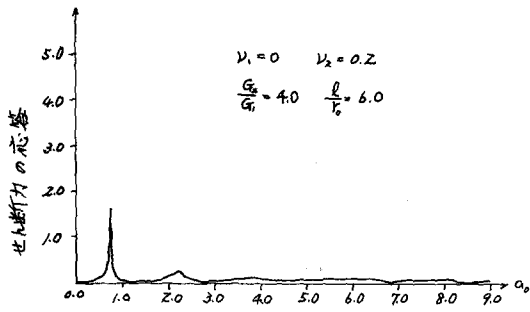


図-4 (a)

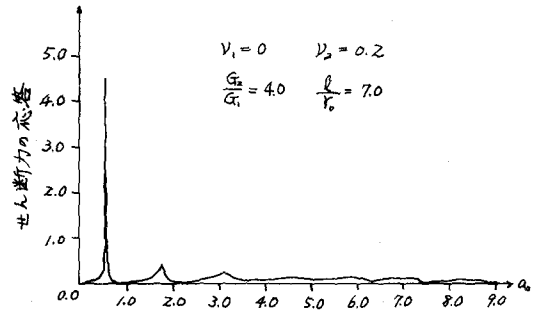


図-4 (b)

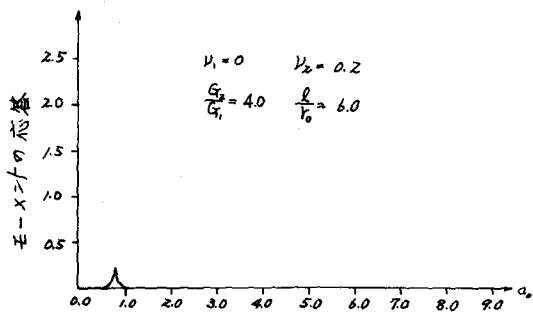


図-5 (a)

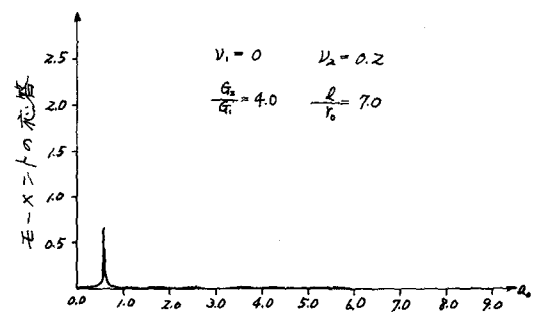


図-5 (b)

3. 数値計算例

ここで示す数値計算例は、地盤のポアソン比($=\nu_1$)、片持ばりのポアソン比($=\nu_2$)、地盤に対する片持ばりのせん断係数($=G_2/G_1$)、片持ばりの半径に対するその高さ($=\ell/r_0$)、などをパラメーターとして、無次元円振動数 $\alpha_0 = \sqrt{\rho/G_1} \cdot r_0$ ($\sqrt{G/\rho}$: せん断速度、 ρ : 円振動数 ω : 片持ばり半径) に対する水平方向の変位の応答、角変位の応答、せん断力の応答、回転モーメントの応答を表わしている図である。(図-2~図-5)

図-2-(a), (b) は、 $\nu_1=0$, $\nu_2=0.2$, $G_2/G_1=4.0$, $\ell/r_0=6.0$ and $\ell/r_0=7.0$ の場合の上昇してくるせん断波の振幅に対する地表面の水平方向の変位を表わしている図である。変位応答は、 $\ell/r_0=6.0$ の場合 $\alpha_0=0.83$, $\ell/r_0=7.0$ の場合 $\alpha_0=0.63$ を卓越している。このことは、低い振動数で共振していることを意味している。

図-3-(a), (b) は、 $\nu_1=0$, $\nu_2=0.2$, $G_2/G_1=4.0$, $\ell/r_0=6.0$ and $\ell/r_0=7.0$ の場合の上昇してくるせん断波の振幅に対する角変位の応答を表わしている図である。角変位応答は、全体的に水平変位の応答に比べて、オーダーが10倍くらい大きな値を示している。これは ℓ/r_0 と平均回転角 θ_0 に掛けているためで、 ℓ の影響を顕著に受けている。

図-4-(a), (b) は、 $\nu_1=0$, $\nu_2=0.2$, $G_2/G_1=4.0$, $\ell/r_0=6.0$ and $\ell/r_0=7.0$ の場合の一種の外力に対する片持ばり底面のせん断力の応答を表わしている図である。上述した変位応答よりも僅かながらより低い振動数で共振している。さらに、高い振動数のところでは、減衰している。

図-5-(a), (b) は、 $\nu_1=0$, $\nu_2=0.2$, $G_2/G_1=4.0$, $\ell/r_0=6.0$ and $\ell/r_0=7.0$ の場合の一種の外力による回転モーメントに対する片持ばりの底部の回転モーメントの応答を表わしている図である。この応答も、せん断力応答と同様に変位応答に比べてより低い振動数で共振している。

4. まとめ

これらの応答において ℓ/r_0 の影響が大きいこと、さらに、ばりの固有振動数とこれらの応答より求めた共振位置での振動数とは一致していない。このことは、片持ばりが地盤に完全に固定されておらず、剛密着しているために、水平方向に u_0 変位しているためと思われる。

これらの数値計算は、北海道大学大型計算機センター HITAC-200-H で計算を行った。

5. 参考文献

- 1) Arnold, R.N., Bycroft, G.N. and Warburton, G.B. (1955), "Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Solid." J. Appl. Mech., Trans. ASME. Vol. 77, pp.391~401
- 2) Bycroft, G.N. (1956), "Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-infinite Elastic Space and on a Elastic Stratum." Philosophical Trans., Royal Society, London, Vol. 248
- 3) Luco, J.E and Westmann, R.A. "Dynamic Response of Circular Footings." ASCE. Oct. 1971
- 4) Veletsos, A.D. and Wei, Y.T. "Lateral and Rocking Vibration of Footings" ASCE. Sept. 1971
- 5) 能町純雄, 松岡健一, 三上敬司: "半無限弾性体の水平振動に及ぼす表面上の剛体基礎の複素コンプライアンスに関する考察" 第35回年次学術講演会講演概要集.