

I—5 トラスと斜接橋に補剛された平板の 定積分変換による静的および動的解析

北見工業大学 正員 大島 俊之
北見工学部 同 能町 純雄

1. まえがき

本研究は比較的薄い平板が斜接橋に直交するトラスにより補剛されている片面補剛板(以下トラスプレートという)を対象として、平板上に載荷する静的および動的荷重に対する構造の弾性挙動を検討するものである。平板はトラスの格点に集中する部材力により補剛されるので、理論的には格点に底力が無限大となるが、サニヤナニの原理から、格点の近傍を考慮して近似的に底力の集中は起らないものとして扱う。解析においては、平板とトラス部材が合点する格点での力のつりあいをたてるが、平板の面内変形に対しては、格点を節点とする4角形有限要素法を適用する。また平板の面外変形を考慮する場合は、平板自身の曲げ剛性の効果をトラス構造の鉛直方向剛性成分と重ね合せて考慮する方法を用いる。

2. 斜接橋にトラスと平板を補剛された トラスプレートの応力解析

(1) 平板の面内変形

図2を参照して、平板の面内力 S_{rs}^x, S_{rs}^y とトラスの部材力 N のつりあいは、 $x, y = \bar{x}$ 向にそれぞれ、

$$S_{rs}^x + \{N(r, r+\frac{1}{2}) - N(r, r-\frac{1}{2})\} \alpha_1 = 0 \quad (1)$$

$$S_{rs}^y + \{N(s, s+\frac{1}{2}) - N(s, s-\frac{1}{2})\} \alpha_2 = 0 \quad (2)$$

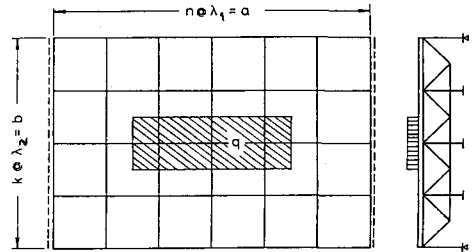


図1. トラスプレート

また S_{rs}^x, S_{rs}^y は平面応力問題に対する長方形有限要素法を用い、格点を節点とする関係式を用いる。

$$S_{rs}^x = \left(\frac{N_1}{6\lambda_1} \Delta_r^2 \Delta_s^2 + \frac{Gt\lambda_1}{6\lambda_2} \Delta_s^2 \Delta_r^2 \right) U_{rs} + \frac{Gt}{4} \frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta_r \Delta_s V_{rs} \quad (3)$$

$$S_{rs}^y = \left(\frac{N_2}{6\lambda_2} \Delta_r^2 \Delta_s^2 + \frac{Gt\lambda_2}{6\lambda_1} \Delta_r^2 \Delta_s^2 \right) V_{rs} + \frac{Gt}{4} \frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta_r \Delta_s U_{rs} \quad (4)$$

$$\text{ただし } N_1 = \frac{Ept\lambda_2}{1-\nu^2}, N_2 = \frac{Ept\lambda_1}{1-\nu^2}, E_p \text{ は平板の弾性係数, } \nu \text{ はポアソン比, } \alpha_1 = \cos \theta_1, \alpha_2 = \cos \theta_2, \Delta^2 = \Delta^2 + 6$$

$$\Delta^2 f(r) = f(r+1) - 2f(r) + f(r-1), \Delta f(r) = f(r+1) - f(r-1)$$

また式(3), (4)において $\nu = 0$ とおけば逐次積分法により桁板要素法から誘導した文献¹⁾の結果と一致する。

(2) トラス部材力のつりあい式

(i) (r, s) 点での鉛直方向のつりあい

$$\{N(r, r-\frac{1}{2}) + N(r, r+\frac{1}{2})\} \beta_1 + \{N(s, s-\frac{1}{2}) + N(s, s+\frac{1}{2})\} \beta_2 = -P_{rs} \quad (5)$$

$$\beta_1 = \sin \theta_1, \beta_2 = \sin \theta_2$$

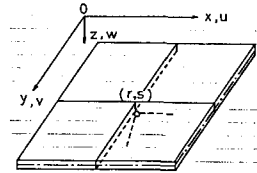


図2. 平板構造

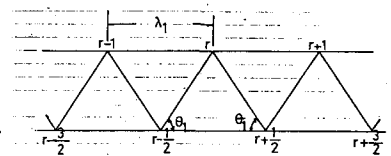


図3. トラス構造

(ii) $(r+\frac{1}{2}, s)$ 点 z の水平方向の α より、

$$N(r+\frac{1}{2}, r+\frac{3}{2}) - N(r+\frac{1}{2}, r-\frac{1}{2}) + \{N(r+\frac{1}{2}, r+1) - N(r+\frac{1}{2}, r)\} \alpha_1 = 0 \quad (6)$$

(iii) $(r, s+\frac{1}{2})$ 点 z の水平方向の α より、

$$N(s+\frac{1}{2}, r+\frac{3}{2}) - N(s+\frac{1}{2}, r-\frac{1}{2}) + \{N(s+\frac{1}{2}, r+1) - N(s+\frac{1}{2}, r)\} \alpha_2 = 0 \quad (7)$$

(iv) $(r+\frac{1}{2}, s)$ 点 z の鉛直方向の α より、

$$N(r+\frac{1}{2}, r) + N(r+\frac{1}{2}, r+1) = 0 \quad (8)$$

(v) $(r, s+\frac{1}{2})$ 点 z の鉛直方向の α より、

$$N(s+\frac{1}{2}, s) + N(s+\frac{1}{2}, s+1) = 0 \quad (9)$$

以上より式(1)~(9)に部材力と節点変位の関係式を代入し、図1のトラスアールトに対する基礎方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{N_1}{6\lambda_1} \Delta_r^2 \Delta_s^2 + \frac{Gt\lambda_1}{6\lambda_2} \Delta_r^2 \Delta_s^2 - 2K_3 \alpha_1^2 \right) U_{rs} \\ & + \frac{Gt}{4} \frac{1+V}{1-V} \Delta_r \Delta_s V_{rs} + K_3 \alpha_1^2 V_r U_{r-\frac{1}{2}, s} \\ & + K_3 \alpha_1 \beta_1 \Delta_r W_{r-\frac{1}{2}, s} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{N_2}{6\lambda_2} \Delta_s^2 \Delta_r^2 + \frac{Gt\lambda_2}{6\lambda_1} \Delta_r^2 \Delta_s^2 - 2K_4 \alpha_2^2 \right) V_{rs} \\ & + \frac{Gt}{4} \frac{1+V}{1-V} \Delta_r \Delta_s U_{rs} + K_4 \alpha_2^2 V_s V_{r, s-\frac{1}{2}} \\ & + K_4 \alpha_2 \beta_2 \Delta_s W_{r, s-\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & K_3 \beta_1 \{ \Delta_r U_{r-\frac{1}{2}, s} \alpha_1 + (V_r W_{r-\frac{1}{2}, s} - 2W_{rs}) \beta_1 \} \\ & + K_4 \beta_2 \{ \Delta_s V_{r, s-\frac{1}{2}} \alpha_2 + (V_s W_{r, s-\frac{1}{2}} - 2W_{rs}) \beta_2 \} \\ & = -P_{rs} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Delta_r U_{rs} \alpha_1 - (V_r W_{rs} - 2W_{r+\frac{1}{2}, s}) = 0 \quad (13)$$

$$\Delta_s V_{rs} \alpha_2 - (V_s W_{rs} - 2W_{r, s+\frac{1}{2}}) = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & K_1 \Delta_r^2 U_{r-\frac{1}{2}, s} + K_3 \alpha_1^2 (V_r U_{rs} - 2U_{r+\frac{1}{2}, s}) \\ & - K_3 \alpha_1 \beta_1 \Delta_r W_{rs} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & K_2 \Delta_s^2 V_{r, s-\frac{1}{2}} + K_4 \alpha_2^2 (V_s V_{rs} - 2V_{r, s+\frac{1}{2}}) \\ & - K_4 \alpha_2 \beta_2 \Delta_s W_{rs} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

(3) 定積分変換による解。

式(10)~(16)に式(2)文庫⁽⁴⁾の公式を用い、定積分変換をほこ $z=L$ 、トラス下側の垂直変位 $W_{r+\frac{1}{2}, s}$, $W_{r, s+\frac{1}{2}}$ の項を消去すると、基礎式は次の5元連立方程式となる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & a_{15} \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ & & & a_{44} & a_{45} \\ \text{Sym} & & & & a_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_{rs} \\ \bar{U}_{r+\frac{1}{2}, s} \\ \bar{W}_{rs} \\ \bar{V}_{r, s+\frac{1}{2}} \\ \bar{V}_{rs} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{P}_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{Gt\lambda_1}{\lambda_2} \bar{D}_m \bar{D}_i - \frac{N_1}{\lambda_1} \bar{D}_m \bar{D}_i \\ & - 2K_3 \alpha_1^2 \cos^2 \frac{m\pi}{2n}, \quad a_{12} = 2K_3 \alpha_1^2 \cos \frac{m\pi}{2n} \end{aligned}$$

$$a_{13} = K_3 \alpha_1 \beta_1 \sin \frac{m\pi}{n}, \quad a_{15} = -Gt \frac{1+V}{1-V} \sin \frac{m\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{k}$$

$$a_{22} = -(K_1 \bar{D}_m + 2K_3 \alpha_1^2), \quad a_{23} = -2K_3 \alpha_1 \beta_1 \sin \frac{m\pi}{2n}$$

$$a_{33} = -2K_3 \beta_1^2 \sin^2 \frac{2m\pi}{2n} - 2K_4 \beta_2^2 \sin^2 \frac{i\pi}{2k},$$

$$a_{34} = -2K_4 \alpha_2 \beta_2 \sin \frac{i\pi}{2k}, \quad a_{35} = K_4 \alpha_2 \beta_2 \sin \frac{i\pi}{k}$$

$$a_{44} = -(K_2 \bar{D}_i + 2K_4 \alpha_2^2), \quad a_{45} = 2K_4 \alpha_2^2 \cos \frac{i\pi}{2k}$$

$$a_{55} = -\frac{Gt\lambda_2}{\lambda_1} \bar{D}_m \bar{D}_i - \frac{N_2}{\lambda_2} \bar{D}_m \bar{D}_i - 2K_4 \alpha_2^2 \cos^2 \frac{i\pi}{2k}$$

$$\bar{D}_m = 1 - \frac{D_m}{6}, \quad \bar{D}_i = 1 - \frac{D_i}{6}, \quad D_m = 2(1 - \cos \frac{m\pi}{n})$$

$$D_i = 2(1 - \cos \frac{i\pi}{k}), \quad \bar{P}_3 = -P_{rs}$$

また、荷重の記号の上に $\sim$ は波形状記号は定積分変換の像関数であることを示している。

また平板の面外変形に対する剛性を考慮する場合に (17) 式の右辺 $-P_{rs}$ のかわりに

$$\bar{P}_3 = -\bar{P}_{rs} + \lambda_2 \lambda_3 D^* \bar{W}_{rs} \quad (18)$$

$$D^* = \frac{E_p t^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \left(\frac{i\pi}{n} \right)^2 + \left(\frac{i\pi}{k} \right)^2 \right\}^2$$

とあり、計算される。

以上より式(17)を代数的に解き、定積分変換

進行すれば、各格梁の変位成分が得られ、これを用いて応力も計算できる。

(4) 数値計算例

図1の構造に対し、等分布荷重が満載した場合の格梁のたわみ w 、 x 方向応力 σ_x 、斜材力、下弦材力をといて、図4, 5, 6, 7 に示している。

用いた断面諸元は次のとおりである。

$$\begin{aligned} E_p &= E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, & K_1 &= EA_{d1}/\lambda_1, & K_2 &= EA_{d2}/\lambda_2 \\ K_3 &= EA_{d1}/\lambda_{d1}, & K_4 &= EA_{d2}/\lambda_{d2}, & V &= 0.3, \\ A_{d1} &= A_{d2} = 50 \text{ cm}^2, & A_{e1} &= A_{e2} = 80 \text{ cm}^2, & \lambda_1 &= \lambda_2 = 100 \text{ cm}, \\ t &= 10 \text{ mm}, & \theta_1 &= \theta_2 = \pi/3, & n &= k = 16, & g &= 0.1 \text{ kg/cm} \end{aligned}$$

図4の○印は平板の面内曲げ剛性を無視した場合、△印は考慮した場合の結果を示している。

3. 走行荷重によるトラスフレームの動的応答解析^{B)}

(1) 理論根拠

図8のように両端単純支持の多数のクロスゲージコンクリートスリットに、一方向に補剛されている平板上を単一集中荷重が走行する場合について考えるが、二方向に補剛されている場合も同様に計算できる。

平板の基礎式としては、帯板要素法を用い、横断面方向には平板の曲げ剛性による力伝達されるものとする。また級数 n 項数は近似的にトラスの格間数と一致する数値をとり、トラスに対する橋軸方向の

定和分変換と重ね合せで解析できるものとする。

また横断面方向にもトラスが等間隔で配置されているものとして、定和分変換できる構造を考える。

トラスについては2と同様の剛性の他に、橋梁の質量による慣性力を断面方向には

consistent

mass, 橋軸方向には Lumped mass とし、節梁に集中して考慮し、フリス式を求め、上格梁については平板の面内剛性、面外剛性とを重ね合せも考慮する。

このようにして、全構造に対する動的基礎式は、定和分変換の結果、次のようにになる。

$$[K_{st}] \{ \ddot{u} \} + [M_{st}] \frac{d^2}{dt^2} \{ \ddot{u} \} = \{ F \} \quad (19)$$

ただし $[K_{st}]$, $[M_{st}]$ はそれぞれ全構造素のそれぞれ剛性、質量マトリクス $\{ \ddot{u} \}$, $\{ F \}$ は和分変換後のそれぞれ変位と荷重の係数マトリクスである。

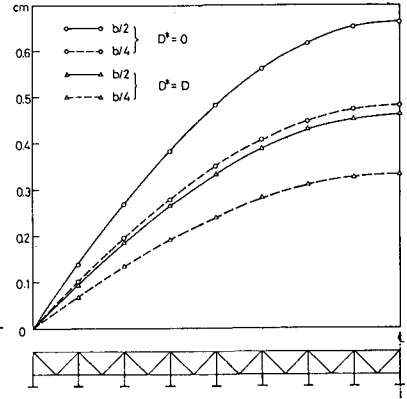


図4 たわみ w

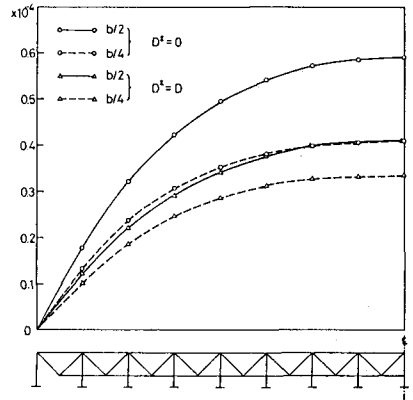


図5 x 方向応力 (σ_x / E_p)

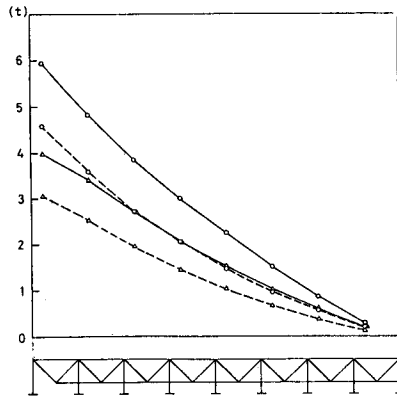


図7 斜材軸力 (x 方向)

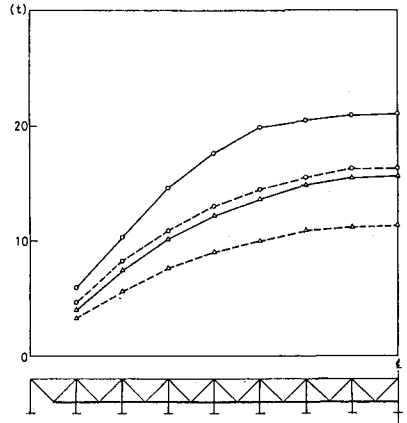


図6 下弦材軸力 (x 方向)

式(19)は集中荷重が一一定速度 V で節線上を走行する場合に於いて、一般解と特殊解に分け、初期静止条件 $t=0$ の $\psi, \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = 0$ を考慮し、解 $\psi = \psi_0 + \psi_1$ とし、7-1式を逐次代入し、解を求めることとなる。

(2) 数値計算

図8の構造に対し、荷重 $P=20t$ の速度 V で走行する場合の応答変位、速度、加速度を空間、幅量中央に於いて求めた結果を図9, 10, 11に示す。図中実線は $V=60 \text{ km/h}$ 、破線は 100 km/h の場合を示す。

用いた断面諸元は次の通りである。

$$A_u = 80 \text{ cm}^2, A_v = 40 \text{ cm}^2, A_d = 60 \text{ cm}^2, A_l = 60 \text{ cm}^2,$$

$$\lambda_1 = 3 \text{ m}, \lambda_v = 3 \text{ m}, \text{ 平板は RC Slab, 厚さ } t = 25 \text{ cm},$$

$$\lambda_2 = 2 \text{ m}, k = 8, n = 16$$

この構造の一次固有振動数は 1.9 Hz となる。

図には128個のデータを図示している。

4. まとめ

以上のように平板とトラスの合成体構造に等価変換を適用し、規則性のある構造への応用の有用性を確かめた。

この手法により計算量が大幅に省けることとなる。

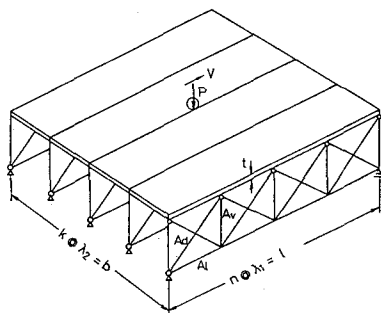


図8 一方向トラスプレート

参考文献

- 1) 能町, 松岡, 大島, 坂本: 土木学会北海道支部研究発表会論文集, 第29号, 1973.
- 2) 能町, 松岡, 大島: 日本鋼構造協会第5回研究集会, マチウクス構造解析法研究発表会論文集, 1971
- 3) Nomachi, Matsuoka, Ohshima: 室工大紀要, Vol. 8, No. 1, Oct. 1973.
- 4) Nomachi, Matsuoka, Proc. of 20th Japan Nat. Cong. for Appl. Mech. 1970
- 5) Matsuoka, Nomachi: Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 23, 1975
- 6) Nomachi: 室工大紀要, Vol. 4, No. 1, 1962.
- 7) Davies: Space Truss Structures, Wiley, 1967.
- 8) 大島, 能町, 角田, 土木学会北海道支部論文報告集, 第35号, 1979.
- 9) 大島, 能町, 角田: 土木学会第34回年次学術講演会概要集, 1979. 工部

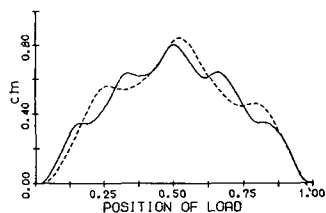


図9 変位の応答

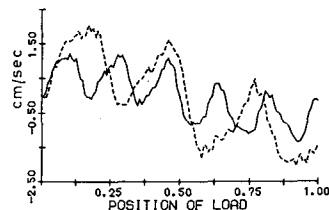


図10 速度の応答

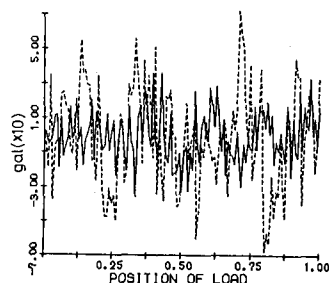


図11 加速度の応答