

I-2 鏡像の原理を用いた有孔無限板の解析

北海道大学工学部 正 員 渡辺 昇
北海道大学工学部 正 員 林川 俊郎
北海道大学工学部 学生員 栗橋 秀幸

1. まえがき

土木、建築、機械などの各種構造物において、最近是有孔板を使用したものが多数見受けられる。この有孔板が面内荷重を受ける場合、孔辺の近傍に応力集中が生ずることはよく知られている。この現象は構造物を破壊に導くき裂の原因ともなるので、応力集中の大きさ、応力分布および変位分布の状態を正確に知ることは重要な問題となる。

本研究は、こうした有孔板の二次元弾性問題の中から無限板を取り上げ、その解析の一手法として鏡像の原理を用いた複素応力関数による方法を紹介するものである。

2. 基本事項

2-1. 応力の複素表示

二次元弾性問題は重調和関数であるAiryの応力関数 $F(x, y)$ によって表現できる。この関数 $F(x, y)$ を2つの解析関数 $\varphi(z)$ 、 $\psi(z)$ によって

$$F(x, y) = \operatorname{Re} \{ \bar{z}\varphi(z) + \psi(z) \} \quad (1)$$

という形で表わすことを最初に提案したのはGoursatである。これを用いれば応力は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} \{ 2\varphi'(z) - \{ \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) \} \} \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} \{ 2\varphi'(z) + \{ \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) \} \} \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Im} \{ \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) \} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

2-2. 境界条件

有孔無限板では境界条件として、無限遠点における応力状態 および 孔辺の拘束条件 の2つを考える。前者は孔の無い場合の解析関数から求めることができる。後者については新しい関数として

$$\chi(z) = \bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z) \quad (3)$$

を定義しておけば、孔辺が自由である場合には孔辺上で

$$\varphi(z) = -\overline{\chi(z)} \quad (4)$$

という条件が与えられる。

2-3. 鏡像の原理

解析曲線の弧 L の片側に接する領域 D 内で正則、 L 上で連続な2つの関数 $\mu(z)$ 、 $\nu(z)$ が L 上で

$$\mu(z) = \overline{\nu(z)} \quad (5)$$

を満たすならば、両者は L を超えて解析接続ができる。

このとき、 L の方程式 $\omega(x, y) = 0$ に

$$x = (z + \bar{z})/2, \quad y = (z - \bar{z})/2i$$

を代入して、 $\bar{z}$ について解いて得られる式を

$$\bar{z} = \Omega(z) \quad (6)$$

とすれば、関数 $\Omega(z)$ は L 上とその近傍で正則である。故に

$$\mu(z) = \overline{\nu(\Omega(z))}, \quad \nu(z) = \overline{\mu(\Omega(z))} \quad (7)$$

によって2つの関数の L を超えての解析接続が決まる。

ここで式 (6) の関数 $\Omega(z)$ について、その性質を示す。

- 1) z が L 上にあるとき、式 (6) により $\Omega(z)$ は $\bar{z}$ に等しい。
- 2) z が L 上を A から B まで動くとき、 $\Omega(z)$ は L の実軸に關す

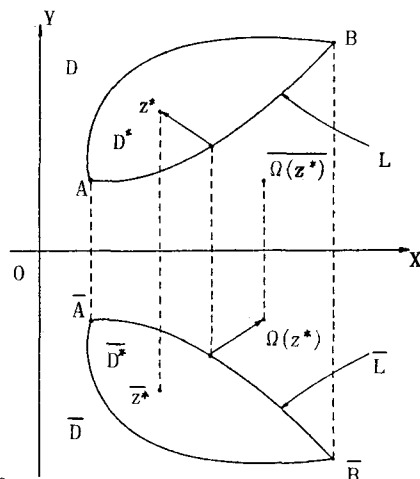


図-1 z -平面

る鏡像 $\bar{L}$ の上を $\bar{A}$ から $\bar{B}$ まで動く。

- 3) z が L の上から領域 D の外へ向かうと、 $\Omega(z)$ は $\bar{L}$ から領域 D の実軸に関する鏡像 $\bar{D}$ の内へ入ってゆく。すなわち領域 D の外部の領域 D^* の点を z^* と記することにすれば、 $\Omega(z^*)$ の値は $\bar{D}$ の内部に入る。したがってその共役 $\overline{\Omega(z^*)}$ の値は D の内部に必ず入る。故に $\Omega(z^*)$ が $\bar{D}$ 内にあるような z^* は L に沿って D に接する1つの領域 D^* を作るであろう。(図-1 参照)

3. 解析の概要

式 (4) より、式 (5) において $\mu(z) = \varphi(z)$ 、 $\nu(z) = -\chi(z)$ とおけば2つの解析関数 $\varphi(z)$ 、 $\chi(z)$ について 2-3. の鏡像の原理を用いることができる。

解析関数 $\varphi(z)$ 、 $\chi(z)$ が D 内の z に対して既知であるならば、 D^* 内の z^* に対して $\varphi(\overline{\Omega(z^*)})$ が、また、式 (3) の定義によって $\chi(\overline{\Omega(z^*)})$ がわかる。(D^* 内に z^* があるとき、 $\overline{\Omega(z^*)}$ は D 内に入るからである。) そこでそれぞれの共役をとれば、 $\overline{\varphi(\Omega(z^*))}$ 、 $\overline{\chi(\Omega(z^*))}$ となる。式 (4) において z を z^* におきかえ、同時に式 (6) を導入すれば次式が成り立つ。

$$\varphi(z^*) = -\overline{\chi(\Omega(z^*))}, \quad \chi(z^*) = -\overline{\varphi(\Omega(z^*))} \quad (8)$$

式 (8) によって D^* 内の点 z^* に対する $\varphi(z^*)$ 、 $\chi(z^*)$ さらに式 (3) から $\varphi(z^*)$ を求めることができる。このようにして求められた $\varphi(z^*)$ 、 $\chi(z^*)$ を鏡像の関数といい、 D 内で既知であった $\varphi(z)$ 、 $\chi(z)$ の解析接続となっている。

結局、境界 L を持った領域 $D + D^*$ における解析関数は D 内の関数 $\varphi(z)$ 、 $\chi(z)$ と D 内の鏡像関数 $\varphi(z^*)$ 、 $\chi(z^*)$ とを重ね合わせたものとなる。前者を φ_D 、 χ_D 、後者を φ_{D^*} 、 χ_{D^*} と表わすことにすれば、領域 $D + D^*$ における解析関数 φ 、 χ は次のようになる。

$$\varphi = \varphi_D + \varphi_{D^*}, \quad \chi = \chi_D + \chi_{D^*} \quad (9)$$

式 (3) で式 (6) の $\Omega(z)$ を導入すれば次式が求められる。

$$\varphi'(z) = \chi(z) - \Omega(z) \cdot \varphi'(z) \quad (10)$$

式 (10) を積分することにより、

$$\varphi(z) = \int \chi(z) dz - \int \Omega(z) \cdot \varphi'(z) dz \quad (11)$$

が計算される。

4. 等角写像の応用

孔の形状が複雑である場合、直接 $\Omega(z)$ を決定することは困難となる。そこで単純な形状の孔を持った補助平面を想定し、実際の有孔板 (実平面) と写像関数によって対応づけながら、補助平面の点の値の関数として実平面の解析関数を求めることを考える。

実平面を z -平面 (図-1)、補助平面を ζ -平面 (図-2) とし、両者が写像関数 $z = f(\zeta)$ で対応しているとする。ここで図-2 における $\Omega(\zeta)$ は図-1 における $\Omega(z)$ に対応するものであり、 ζ -面上の境界 l の方程式より導かれる。

$z = f(\zeta)$ によって d は D に写され、 $\bar{z} = \bar{f}(\bar{\zeta})$ によって $\bar{d}$ は $\bar{D}$ に写される。しかるに $\Omega(\zeta^*)$ は $\bar{d}$ 内の点であるから

$$\Omega(z^*) = \bar{f}(\Omega(\zeta^*)) \quad (12)$$

によって z -平面の $\Omega(z^*)$ に写される。

図-2 ζ -平面

補助平面としては実平面の境界およびその外部領域 (すなわち孔を除いた部分) に対応するような境界と外部領域を持つものであれば十分であるが、境界 l を単位円 $|\zeta| = 1$ としておけば $\Omega(\zeta) = \zeta^{-1}$ のように $\Omega(\zeta)$ が決まる。

写像関数 $z = f(\zeta)$ が与えられたときの解析関数の変換について以下に示す。

$$\varphi(z) = \varphi[f(\zeta)] (= \Phi(\zeta) \text{ とおく。}) \quad \}$$

$$\begin{aligned}
 \phi'(z) &= \frac{d\phi(z)}{dz} = \frac{d\Phi(\zeta)/d\zeta}{df(\zeta)/d\zeta} = \frac{\Phi'(\zeta)}{f'(\zeta)} \quad (= \Phi^I(\zeta) \text{ とおく。}) \\
 \phi''(z) &= \frac{d^2\phi(z)}{dz^2} = \frac{d^2\Phi(\zeta)/d\zeta^2}{(df(\zeta)/d\zeta)^2} - \frac{(d\Phi(\zeta)/d\zeta) \cdot (d^2f(\zeta)/d\zeta^2)}{(df(\zeta)/d\zeta)^3} \\
 &= \frac{\Phi''(\zeta)}{(f'(\zeta))^2} - \frac{\Phi'(\zeta) \cdot f''(\zeta)}{(f'(\zeta))^3} = \frac{\Phi''(\zeta) \cdot f'(\zeta) - \Phi'(\zeta) \cdot f''(\zeta)}{(f'(\zeta))^3} \\
 & \quad (= \Phi^{II}(\zeta) \text{ とおく。})
 \end{aligned} \tag{13}$$

同様に

$$\begin{aligned}
 \psi(z) &= \psi[f(\zeta)] \quad (= \Psi(\zeta) \text{ とおく。}) \\
 \psi'(z) &= \frac{\Psi'(\zeta)}{f'(\zeta)} \quad (= \Psi^I(\zeta) \text{ とおく。}) \\
 \psi''(z) &= \frac{\Psi''(\zeta) \cdot f'(\zeta) - \Psi'(\zeta) \cdot f''(\zeta)}{(f'(\zeta))^3} \quad (= \Psi^{II}(\zeta) \text{ とおく。})
 \end{aligned} \tag{14}$$

また式 (3) の補助関数 $\chi(z)$ に対しても式 (6) を導入して次のような関数を定義する。

$$X(\zeta) = \bar{f}(\Omega(\zeta)) \cdot \Phi(\zeta) + \Psi(\zeta) \tag{15}$$

これ以降は関数の変換や微分などに注意しながら式 (2) で表わされる応力の関係式を導けばよい。

5. 計算の手順

無限遠点において一様応力が作用する場合、すなわち応力解析関数が $\phi(z) = Az$ 、 $\psi(z) = Bz^2$ となる場合について計算の手順を示す。

$z = \infty$ に対して、 $z = f(\zeta)$ により $\zeta = \infty$ が対応するから以下の関係が成り立つ。

$$\phi(z) = Az = As(\zeta) = \Phi(\zeta) \quad (\text{ただし } s(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} f(\zeta)) \tag{16}$$

$$\phi'(z) = A = \Phi^I(\zeta) \tag{17}$$

$$\phi''(z) = 0 = \Phi^{II}(\zeta) \tag{18}$$

$$\psi(z) = Bz^2 = B[s(\zeta)]^2 = \Psi(\zeta) \tag{19}$$

$$\psi'(z) = 2Bz = 2Bs(\zeta) = \Psi^I(\zeta) \tag{20}$$

$$\psi''(z) = 2B = \Psi^{II}(\zeta) \tag{21}$$

ここで式 (3) の $\bar{z}$ に式 (6) を代入して得られる関数 $\chi(z) = \Omega(z) \cdot \phi'(z) + \psi'(z)$ を上の各式および式 (12) によって ζ の関数として次のように表わす。(無限遠点における式 (15) を求める。)

$$X(\zeta) = p(\zeta) \cdot A + 2Bs(\zeta) \quad (\text{ただし } p(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \bar{f}(\zeta)) \tag{22}$$

孔辺が自由であれば、鏡像の関数は次のように求められる。

$$\Phi^*(\zeta) = -\bar{X}(\Omega(\zeta)) = -\bar{A} \cdot \bar{p}(\Omega(\zeta)) - 2\bar{B} \cdot \bar{s}(\Omega(\zeta)) \tag{23}$$

$$X^*(\zeta) = -\bar{\Phi}(\Omega(\zeta)) = -\bar{A} \cdot \bar{s}(\Omega(\zeta)) \tag{24}$$

さらに $-\bar{s}(\Omega(\zeta)) = t(\zeta)$ 、 $-\bar{p}(\Omega(\zeta)) = q(\zeta)$ とおけば式 (23)、(24) は次のようになる。

$$\Phi^*(\zeta) = A \cdot q(\zeta) + 2B \cdot t(\zeta) \tag{25}$$

$$X^*(\zeta) = A \cdot t(\zeta) \tag{26}$$

すなわち全て ζ の関数として表現できる。

有孔板の解析関数は式 (16) と式 (25)、式 (22) と式 (26) をそれぞれ重ね合わせたものである。そこで以下においては $\Phi(\zeta)$ 、 $X(\zeta)$ はこの有孔板の解析関数を示すものとする。したがって次のようになる。

$$\Phi(\zeta) = A \cdot s(\zeta) + \bar{A} \cdot q(\zeta) + 2\bar{B} \cdot t(\zeta) \tag{27}$$

$$X(\zeta) = \bar{A} \cdot t(\zeta) + A \cdot p(\zeta) + 2B \cdot s(\zeta) \tag{28}$$

式 (15) などによって $\phi(z) = \Psi(\zeta)$ を求めることができるが、式 (2) から応力の計算においては

この形にもどす必要はない。簡単のため $s(\zeta)$ を s 、 $\varphi(z)$ を φ 、 $d\varphi(z)/dz$ を φ' などと表わすことにする。まず、式 (13)、(27) より次式が導かれる。

$$\varphi' = \frac{\Phi'}{f'} = \frac{As' + \bar{A}q' + 2\bar{B}t'}{f'} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \varphi'' &= \frac{\Phi''f' - \Phi'f''}{f'f'f'} \\ &= \frac{(As'' + \bar{A}q'' + 2\bar{B}t'')f' - (As' + \bar{A}q' + 2\bar{B}t')f''}{f'f'f'} \end{aligned} \quad (30)$$

次に、式 (13)、(14)、(15) より次のような関係が導かれる。

$$\begin{aligned} X(\zeta) &= \bar{f}(\Omega(\zeta)) \cdot \frac{\Phi'(\zeta)}{f'(\zeta)} + \frac{\Psi'(\zeta)}{f'(\zeta)} \\ \therefore \Phi'(\zeta) &= X(\zeta) \cdot f'(\zeta) - \bar{f}(\Omega(\zeta)) \cdot \Phi'(\zeta) = Xf' + g\Phi' \end{aligned} \quad (31)$$

ただし $g(\zeta) = -\bar{f}(\Omega(\zeta))$ とおき、先の記法を用いた。式 (14) より次式が導かれる。

$$\psi' = \frac{\Psi'}{f'} = X + \Phi' \frac{g}{f'} \quad (32)$$

$$\psi'' = \frac{X'f' + g\Phi'' + g'\Phi'}{f'f'} - \frac{g\Phi'f''}{f'f'f'} \quad (33)$$

式 (2) より応力の計算には φ' 、 $\bar{z}\varphi'' + \psi''$ が必要である。これまで導いてきた式および $z = f$ 、 $\bar{z} = \Omega(z) = \bar{f}(\Omega(\zeta)) = -g$ という関係から $\bar{z}\varphi'' + \psi''$ は次のようになる。

$$\bar{z}\varphi'' + \psi'' = \frac{A(p'f' + s'g') + 2Bs'f' + \bar{A}(t'f' + q'g') + 2\bar{B}t'g'}{f'f'} \quad (34)$$

式 (29) および式 (34) を式 (2) へ代入すれば応力が計算できる。

6. 計算例

① 一面(補助平面)上の単位円を z -面(実平面)上のだ円およびハート形に写す場合の計算結果を示す。

それぞれの場合の写像関数 $z = f(\zeta)$ を以下に示しておく。

◎ だ円

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= c(\zeta + m\zeta^{-1}) \\ \text{ただし} \\ c &= \frac{a+b}{2} \cdot e^{i\gamma} \\ m &= \frac{a-b}{a+b} \end{aligned} \quad (35)$$

(図-3 参照)

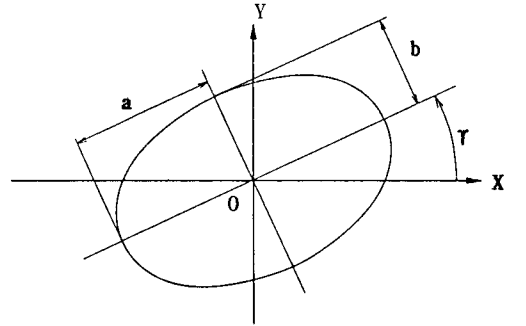


図-3 だ円

◎ ハート形

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= d(1 - \zeta^2) \\ \text{ただし} \\ d &= l \cdot e^{i\delta} \end{aligned} \quad (36)$$

(図-4 参照)

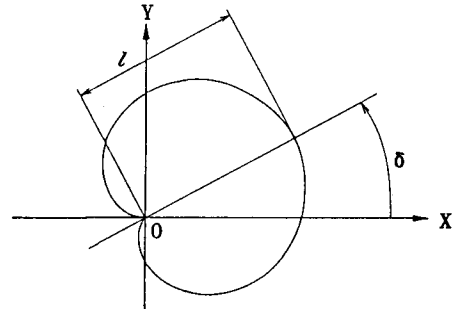


図-4 ハート

6-1. だ円孔を有する無限板の応力状態

だ円孔を有する無限板に一樣な応力が作用した場合の応力解析関数は次のようになる。

$$\varphi' = \frac{(\overline{mAc} + 2\overline{Bc}) \zeta^{-2} + Ac}{c(1 - m\zeta^{-2})} \quad (37)$$

$$\overline{z}\varphi'' + \phi'' = 2 \frac{\overline{Bc} \zeta^{-4} + \{\operatorname{Re}[A] \cdot |c|^2(1 - m^2) - 2m \cdot \operatorname{Re}\{\overline{Bc}\}\} \zeta^{-2} + Bc^2}{c^2(1 - m\zeta^{-2})^2} \quad (38)$$

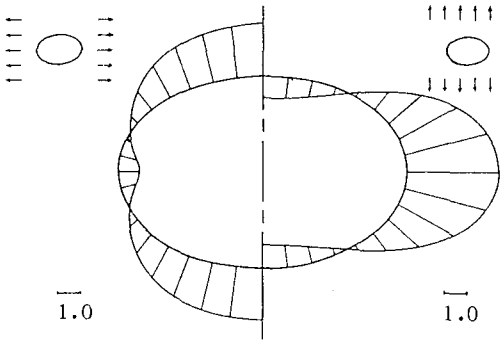


図-5 孔辺応力（直応力）

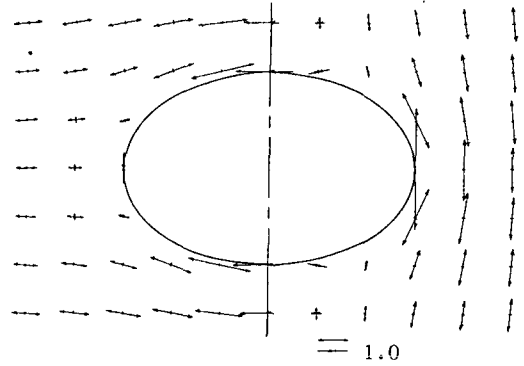


図-6 主応力（直応力）

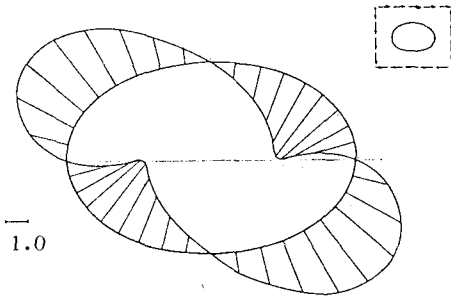


図-7 孔辺応力（せん断応力）

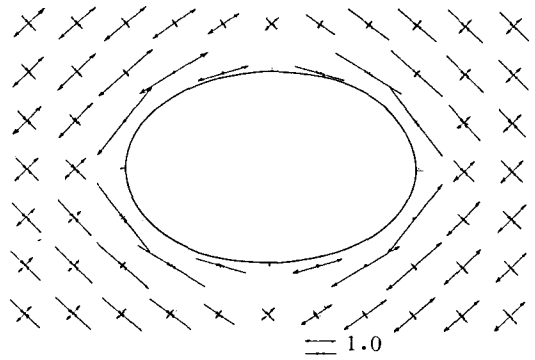


図-8 主応力（せん断応力）

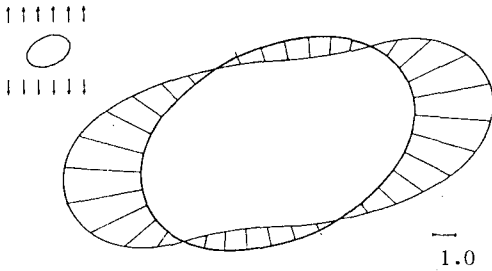


図-9 孔辺応力（傾斜直応力）

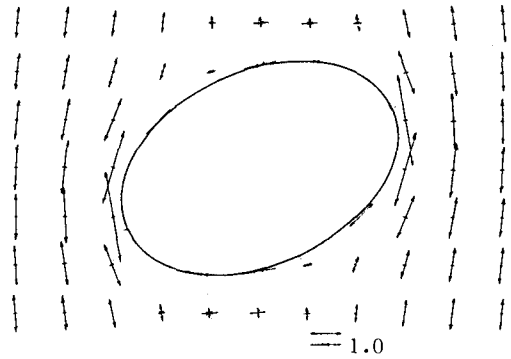


図-10 主応力（傾斜直応力）

6-2. ハート形孔を有する無限板の応力状態

ハート形孔を有する無限板に一樣な応力が作用した場合の応力解析関数は次のようになる。

$$\varphi' = A - 2\overline{B} \frac{\overline{c}}{c} \zeta^{-3} \quad (39)$$

$$\overline{z}\varphi'' + \phi'' = 2 \left\{ B + \operatorname{Re}[A] \left(-\frac{\overline{c}}{c} \zeta^{-3} \right) + \overline{B} \left(-\frac{\overline{c}}{c} \zeta^{-3} \right)^2 \right\} \quad (40)$$

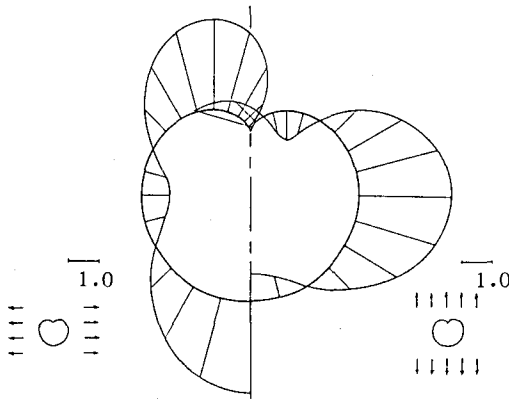


図-11 孔辺応力（直応力）

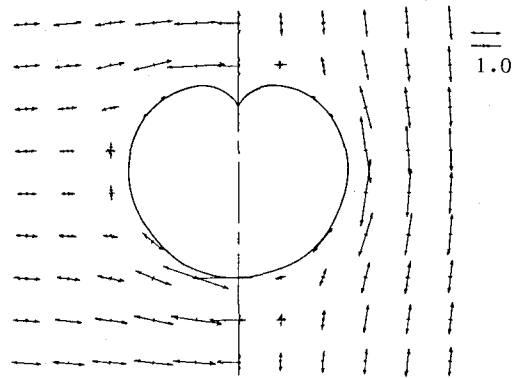


図-12 主応力（直応力）

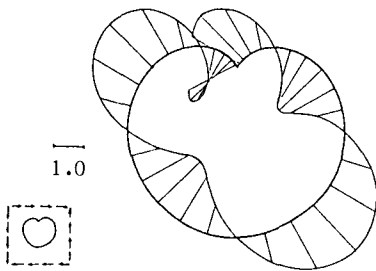


図-13 孔辺応力（せん断応力）

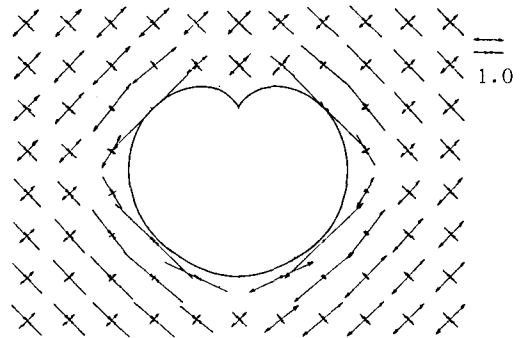


図-14 主応力（せん断応力）

7. あとがき

本研究は任意形状の孔を有する無限板の応力解析を複素関数を用いて試みたものである。本解析法の特徴をまとめると以下のようになる。

- 1) 有限要素法、階差法および選点法などの解法は、多大の計算量と複雑さを呈し、しかも得られる結果はあくまでも近似解にしか過ぎない。こうした近似解法と比較すれば、本解析法ははるかに簡単にして厳密である。
- 2) 本報告では応力解析のみを示したが、本解析法は変位についても応力解析の場合と同一の概念によって解析が可能である。
- 3) 本解析法は有孔無限板の弾性二次元問題のみならず、横荷重を受ける有孔無限板の曲げ問題にも応用が可能である。

なお、本研究の数値計算には北海道大学大型計算機センターの HITAC M-200 を使用した。

（参考文献）

- 1) 渡辺昇：土木工学のための複素関数論の応用と計算、朝倉書店
- 2) 森口繁一：2次元弾性論、岩波書店
- 3) 今井功：等角写像とその応用、岩波書店
- 4) 能代清：初等函数論、培風館
- 5) 村上裕則、大南正 瑛：破壊力学入門、オーム社