

I—1 中実球のスタンプの近似解析について

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. 緒 言

等径・等大の2つの球の接触問題は、これを、変形後の1つの球に着目すると、球の表面の一部が剛性平面で圧縮されたスタンプの問題に帰着される。弾性体の接触問題については、古くに、有名な Hertz の理論¹⁾が見受けられ、その後、2つの球の接触問題あるいは球と剛性平面との接触問題に限定しても、Hertz の理論に含まれている仮定の補正あるいは接触面における摩擦の影響などを検討した研究が多数見受けられるようになった。

Deresiewicz²⁾は、変形前の2次曲面上にあった任意点が、変形後も2次曲面上にあるという Hertz の仮定に対する緩和を行い、Goodman³⁾は、粗い表面を持った2つの球の接触問題における摩擦の効果を検討している。また、Torvik⁴⁾は、なめらかな表面を持った2つの球の接触問題における近似境界条件の影響を検討している。さらに、粗い表面を持った球となめらかな剛性平面との接触問題に関しては、Greenwood および Tripp⁵⁾ および Hughes および White⁶⁾などの研究が見受けられる。

本研究は、中実球の粗い表面の一部が、粗い剛性平面で圧縮されたスタンプの解析を近似解法により行い、中実球の応力性状および変形性状を明らかにしたものである。したがって、本研究は、直接的には、中実球の接触問題の解析に寄与するものではないが、前述したように、等径・等大の2つの球の接触問題であれば、変形後はスタンプの問題に帰着されるので、その解析は、接触問題に関する1つの基礎的データを提供するものと思われる。軸対称問題としての中実球、球殻および無限体中の球の第1種および第2種境界値問題は、3次元弾性論の書物⁷⁾において良く見受けられる所であるが、本研究が課題としている混合境界値問題の解析に関する研究はあまり見受けられないようである。

2. つり合い方程式の解

球座標系 (r, θ, φ) における拘束力がない場合のつり合い方程式の解は、軸対称変形に限定すると、次のように表わされる。

第1基本解:

$$2G u^1 = 2G [u_r^1, u_\theta^1, 0] = \text{grad } \phi \dots \dots \dots (1a)$$

ここで、

$$u_\theta^1 = 0, \quad u_r^1 \equiv \partial^2 / \partial r^2 + (2/r) \partial / \partial r + (1/r^2) \partial^2 / \partial \theta^2 + (\cot \theta / r^2) \partial / \partial \theta \dots \dots \dots (1b)$$

第3基本解:

$$2G u^3 = 2G [u_r^3, u_\theta^3, 0] = \text{grad } (r\lambda) - k(1-\nu)\lambda = \text{grad } (r\lambda_r) - k(1-\nu)[\lambda_r, \lambda_\theta, 0] \dots \dots \dots (2a)$$

ここで、

$$\lambda_r = -r \frac{\partial}{\partial r} \int \lambda_\theta d\theta, \quad r^2 \lambda_\theta - \frac{\lambda_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial \lambda_\theta}{\partial r} = 0 \dots \dots \dots (2b)$$

ただし、式(1a)および式(2a)における G および ν は、それぞれ、せん断弾性係数およびポアソン比を表わすものとする。求める解は、上の2つの基本解を加えたものであり、次式で表わされる。

$$2G u = 2G [u_r, u_\theta, 0] = 2G (u^1 + u^3) = 2G [u_r^1 + u_r^3, u_\theta^1 + u_\theta^3, 0] \dots \dots \dots (3)$$

式(1b)および式(2b)を解いて変位がテンソルを求めると、次の通りである。

$$\phi = \sum_{n=2}^{\infty} r^n A_n P_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^{-(n+1)} P_n(\mu), \quad \mu \equiv \cos \theta \dots \dots \dots (4)$$

$$\lambda_r = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} (n+1) E_n P_n(\mu) - \sum_{n=1}^{\infty} n C_n r^{-n} P_n(\mu)$$

$$\lambda_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} E_n P_n^2(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n P_n^2(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} E_n \sin \theta P_n'(\mu) + \left\{ \dots \dots \dots (5) \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n \sin \theta P_n'(\mu) \right\}$$

上に示した3つの変位ポテンシャルは、著者⁸⁾がすでに報告した非軸対称問題に関する変位ポテンシャルの助変数および位数 n を0と置いた変位ポテンシャルに一致している。 $A_n, \dots, C_n$ は、境界条件によって定められるべき未知定数である。上式の各々の変位ポテンシャルの第1項目は内部問題の解および第2項目は外部問題の解であるが、本研究においては、外部問題の解は不要であるので、以下では、内部問題の解に限って議論を進める。式(4)および式(5)に示した変位ポテンシャルを、それぞれ、式(1a)および式(2a)に代入し式(3)を用いると、変位成分は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} 2Gr u_r &= \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} A_n n P_n(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} (n+1)(n-2+2\nu) E_n P_n(\mu) - 2(1-2\nu) E_0 r \\ 2Gr u_\theta &= - \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} A_n P_n^2(\mu) - \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} (n+5-4\nu) E_n P_n^2(\mu) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

また、応力成分は、上の変位成分よりひずみ成分を求め、球座標系における応力-ひずみ関係式を用いると、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} A_n n(n-1) P_n(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (n+1)(n^2-n-2-2\nu) E_n P_n(\mu) - 2(1+\nu) E_0 \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} A_n \{ P_{n-1}'(\mu) - n(n-1) P_n(\mu) \} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n E_n \{ (n+5-4\nu) P_{n+1}'(\mu) + \\ &\quad - (n+1)(n^2+5n+7-2\nu) P_n(\mu) \} - 2(1+\nu) E_0 \\ \sigma_{\phi\phi} &= - \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} A_n P_{n-1}'(\mu) - \sum_{n=1}^{\infty} r^n E_n \{ (n+5-4\nu) P_{n+1}'(\mu) - (n+1)(2n+3) \times \\ &\quad \times (1-2\nu) P_n(\mu) \} - 2(1+\nu) E_0 \\ \sigma_{r\theta} &= - \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} A_n (n-1) P_n^2(\mu) - \sum_{n=1}^{\infty} r^n (n^2+2n-1+2\nu) E_n P_n^2(\mu) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

3. 線垂直荷重および線せん断荷重が作用したときの解

半径 R_2 の球の表面の $\theta = \theta_k$ と $\theta = \pi - \theta_k$ の円周上に分布する線垂直荷重 p_k を $i(\theta)$ で表わし、 $\theta = \theta_k$ の円周上に分布する線せん断荷重 $q_k \sin \theta$ と $\theta = \pi - \theta_k$ の円周上に分布する線せん断荷重 $-q_k \sin \theta$ を $j(\theta)$ で表わすと、これらの関数は、次式のように展開される。

$$i(\theta) = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n P_n(\mu), \quad j(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n P_n^2(\mu) \dots \dots \dots (8)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= p_k \sin \theta_k / R_2, \quad e_n = p_k \sin \theta_k (2n+1) P_n(\cos \theta_k) / R_2 \\ d_n &= q_k \sin \theta_k \{ P_{n-1}(\cos \theta_k) - P_{n+1}(\cos \theta_k) \} / R_2 \quad (n=2, 4, \dots) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

したがって、これらの線荷重が作用したときの解は、式(7)の σ_{rr} および $\sigma_{r\theta}$ に

$$r = R_2 \text{ において } \sigma_{rr} = -i(\theta), \quad \sigma_{r\theta} = j(\theta) \dots \dots \dots (10)$$

の境界条件を課して、未知定数 A_n, E_n および E_0 を

$$\left. \begin{aligned} A_n &= - \frac{\sin \theta_k}{(n-1) \Delta_n R_2} \left[p_k (2n+1) P_n(\cos \theta_k) (n^2+2n-1+2\nu) - q_k \{ P_{n-1}(\cos \theta_k) + \right. \\ &\quad \left. - P_{n+1}(\cos \theta_k) \} (n+1)(n^2-n-2-2\nu) \right] \\ E_n &= \frac{\sin \theta_k}{\Delta_n R_2^{n+1}} \left[p_k (2n+1) P_n(\cos \theta_k) - n q_k \{ P_{n-1}(\cos \theta_k) - P_{n+1}(\cos \theta_k) \} \right] \\ E_0 &= \frac{p_k \sin \theta_k}{2(1+\nu) R_2}, \quad \Delta_n = 2 \{ n^2 + n + 1 + \nu(2n+1) \} \quad (n=2, 4, \dots) \end{aligned} \right\} \dots \dots (11)$$

と求め、これらを式 (17) に代入することにより得られる。応力状態が $z=0$ に關して対称であるので、以下では、 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ において考えることにする。いま、球の表面の $0 \leq \theta < \theta_0$ の区間に線荷重 P_ℓ が L 個および線せん断荷重 $q_\ell \sin \theta$ が L 個作用している場合を考えると、その解は、 $\theta = \theta_\ell$ ($0 < \theta_\ell < \theta_0$) に 1 個の線荷重が作用しているときの解、すなわち、式 (11) を式 (17) に代入したときの解を L 個重ね合わせることにより得られ、たとえ、次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} 2G u_r &= \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=2}^{\infty} \{ r^{n-1} n A_n + r^{n+1} (n+1)(n-2+4\nu) E_n \} P_n(\mu) - 2(1-2\nu) \sum_{\ell=1}^L E_\ell r \\ 2G u_\theta &= - \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=2}^{\infty} \{ r^{n-1} A_n + r^{n+1} (n+5-4\nu) E_n \} P_n^1(\mu) \\ \sigma_{rr} &= \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=2}^{\infty} \{ r^{n-2} n(n-1) A_n + r^n (n+1)(n^2-n-2-2\nu) E_n \} P_n(\mu) - 2(1+\nu) \sum_{\ell=1}^L E_\ell \\ \sigma_{r\theta} &= - \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=2}^{\infty} \{ r^{n-2} (n-1) A_n + r^n (n^2+2n-1+2\nu) E_n \} P_n^1(\mu) \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

上式中の A_n , E_n および E_ℓ は、式 (11) に示したものであり、数式が長くなるので代えていない。

4. 境界条件

図-1 に示した $\sigma_{\theta\theta} = 70^\circ$ の境界条件は、次の通りである。

$$r = R_2, \quad 0 \leq \theta < \theta_0 \text{ において}$$

$$u_r = -R_2(\cos \theta - \cos \theta_0) \cos \theta, \quad u_\theta = R_2(\cos \theta - \cos \theta_0) \sin \theta \dots \dots \dots (13)$$

および

$$r = R_2, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi/2 \text{ において}$$

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \dots \dots \dots (14)$$

上式のうち、式 (14) の境界条件は、式 (11) および式 (12) に示した解が、 $0 < \theta_\ell < \theta_0$ ($\ell = 1, 2, \dots, L$) の区間にのみ線荷重が作用したときの解であるため、すでに満足されている。式 (12) の変位成分に式 (13) の境界条件を課すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (R_2/2G) \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=2}^{\infty} P_n(\cos \theta) \{ n A_n R_2^{n+2} + (n+1) \times \\ \times (n-2+4\nu) E_n R_2^n \} - 2(1-2\nu) R_2 / (2G) \times \\ \times \sum_{\ell=1}^L E_\ell = -R_2(\cos \theta - \cos \theta_0) \cos \theta \\ - (R_2/2G) \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=2}^{\infty} P_n^1(\cos \theta) \{ A_n R_2^{n+2} + (n+5+ \\ -4\nu) E_n R_2^n \} = R_2(\cos \theta - \cos \theta_0) \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

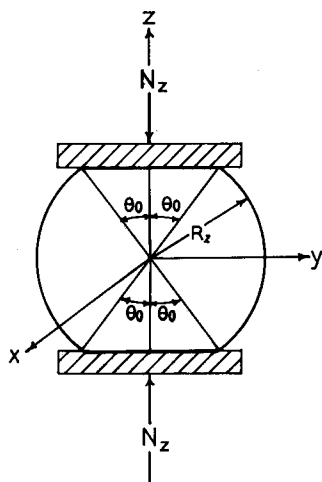


図-1 中実球のスタンプ

上式に、式 (11) を代入して整理してよす次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\ell=1}^L \bar{P}_\ell \sin \theta_\ell \left\{ \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_n(\cos \theta_\ell)}{(n-1)\Delta_n} P_n(\cos \theta_\ell) (2n+1) [2n^2-1-\nu(2n^2-n-2)] \right\} + \\ - \sum_{\ell=1}^L \bar{q}_\ell \sin \theta_\ell \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n-1)\Delta_n} P_n(\cos \theta) [P_{n-1}(\cos \theta_\ell) - P_{n+1}(\cos \theta_\ell)] [n-2+ \right. \\ \left. -\nu(2n-1)] \right\} = (\cos \theta - \cos \theta_0) \cos \theta \\ \sum_{\ell=1}^L \bar{P}_\ell \sin \theta_\ell \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{(n-1)\Delta_n} P_n(\cos \theta_\ell) (2n+1) [n-2-\nu(2n-1)] \right\} - \sum_{\ell=1}^L \bar{q}_\ell \sin \theta_\ell \times \\ \times \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{(n-1)\Delta_n} [P_{n-1}(\cos \theta_\ell) - P_{n+1}(\cos \theta_\ell)] [2n^2-n+1-\nu(2n^2-3n-1)] \right\} \end{aligned} \right\} \dots (16a)$$

$$= -(\cos \theta - \cos \theta_0) \sin \theta \quad (l=1, 2, \dots, L; n=2, 4, \dots)$$

ここで,

$$\bar{P}_l = P_l / (GR_2), \quad \bar{F}_l = F_l / (GR_2) \dots \dots \dots (16b)$$

上式は、厳密には、 $0 \leq \theta < \theta_0$ の区間の任意の θ について満足されねばならないが、近似的に、 $0 \leq \theta < \theta_0$ の区間の L 個の θ_k ($k=1, 2, \dots, L$) において満たされるものとする、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{l=1}^L \bar{P}_l \sin \theta_l \left\{ \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_n(\cos \theta_k) P_n(\cos \theta_l)}{(n-1) \Delta_n} (2n+1) \{ 2n^2 - 1 - \nu(2n^2 - n - 2) \} \right\} \\ & + \sum_{l=1}^L \bar{F}_l (-\sin \theta_l) \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n-1) \Delta_n} P_n(\cos \theta_k) \{ P_{n-1}(\cos \theta_l) - P_{n+1}(\cos \theta_l) \} \{ n + \right. \\ & \left. - 2 - \nu(2n-1) \} \right\} = (\cos \theta_k - \cos \theta_0) \cos \theta_k \\ & \sum_{l=1}^L \bar{P}_l \sin \theta_l \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_n^2(\cos \theta_k) P_n(\cos \theta_l)}{(n-1) \Delta_n} (2n+1) \{ n - 2 - \nu(2n-1) \} \right] \\ & + \sum_{l=1}^L \bar{F}_l (-\sin \theta_l) \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_n^2(\cos \theta_k)}{(n-1) \Delta_n} \{ P_{n-1}(\cos \theta_l) - P_{n+1}(\cos \theta_l) \} \{ 2n^2 - n + \right. \\ & \left. + 1 - \nu(2n^2 - 3n - 1) \} \right] = -(\cos \theta_k - \cos \theta_0) \sin \theta_k \end{aligned} \right\} \dots \dots (17)$$

$$(l=1, 2, \dots, L; k=1, 2, \dots, L; n=2, 4, \dots)$$

上式は、 $\bar{P}_l$ および $\bar{F}_l$ を未知量とする 2L 元連立 1 次方程式であるが、 $\theta_l = \theta_k = 0$ において特異となるので、 $0 + \varepsilon' \leq \theta_l \leq \theta_0$ 、 $0 + \varepsilon' \leq \theta_k \leq \theta_0$ において満たされるものとする。上式を解いて、それぞれ、 L 個の $\bar{P}_l$ および $\bar{F}_l$ が求められれば、式 (16a) および式 (11) より、それぞれ $(N+L)$ 個の A_n 、 E_n および L 個の E_0 が求められ、式 (12) より、変位および応力成分が数値的に求められることになる。 $r=R_2$ 、 $0 \leq \theta \leq \theta_0$ における 3 方向の合力 R_z は、 $R_z/G = R_2^2 F_z$ 、ここで、 $F_z = (2\pi/G) \int_{\cos \theta_0}^1 \{ (\sigma_{rr})_{r=R_2} \times \cos \theta - (\sigma_{\theta\theta})_{r=R_2} \sin \theta \} d\mu$ により求められ、圧縮力を正とした N_z は、 $N_z/G = -R_z/G = (-F_z) R_2^2$ と表わされる。 F_z は、式 (12) に示した σ_{rr} および $\sigma_{\theta\theta}$ の $r=R_2$ における値を代入して、厳密に数式の上で積分されるが、紙面数に限りがあるため、その表示は省略する。

5. 数値計算例

数値計算例として、 $\theta_0 = \pi/16$ 、 $\varepsilon' = 0.005$ 、 $L = 80$ および n の項数 N は 90 とし、ポアソン比 ν を種々変えて計算した。この解析においては、図-1 に示したように、球の表面の $0 \leq \theta < \theta_0$ において変位成分が規定されているので、剛性平面と球との接触面の半径 a およびたわみ w は、

$$a = R_2 \sin \theta_0, \quad w = R_2 (1 - \cos \theta_0) \dots \dots \dots (18)$$

と表わされる既知量であるが、Hertz の公式を用いて

$$\left. \begin{aligned} a &= R_2 \sin \theta_0 = \alpha \left[\beta (1-\nu) R_2 N_z / (8G) \right]^{1/3} \\ w &= R_2 (1 - \cos \theta_0) = \beta \times 2 \left[\beta (1-\nu) N_z / (8G \sqrt{R_2}) \right]^{2/3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19a)$$

表-1 Hertz の公式との比較

ν	$-F_z$	α	β
0.00	0.0189	1.01	0.260
0.20	0.0209	1.06	0.282
0.25	0.0222	1.06	0.283
0.30	0.0222	1.08	0.296
0.40	0.0256	1.08	0.298
0.45	0.0282	1.08	0.296

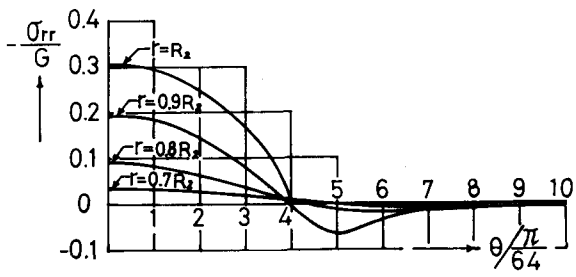


図-2 σ_{rr} の分布 ($\nu=0.25$)

ここで、

$$d = \sin \theta_0 \left[\frac{3(1-\nu)(-F_2)}{8} \right]^{-1/3}, \quad \beta = (1 - \cos \theta_0) / 2 \left[\frac{3(1-\nu)(-F_2)}{8} \right]^{-2/3} \dots \dots \dots (19c)$$

と表わし、式(19c)より d および β を求めて、 $d = 1.0$ および $\beta = 0.5$ になるかいなかを照合したのが、表-1である。表-1に示されているように、種

々のポアソン比に対し、 d はほぼ1.0に等しいが、 β はほぼ0.3となっており、接触面における摩擦の存在が、たわみ w に大きな影響を及ぼしていることがわかる。図-2には、 σ_{rr} の分布を示した。 r 方向における減衰が著しく、 $0 \leq r \leq 0.5 R_2$ においては、ほぼ0となる。また、 $r = R_2$ の $\theta = \theta_0 = \pi/16$ における値がほぼ0となっているのは、きわめて興味深い。図-3には、 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布を示した。 $r = R_2$ における分布は、その性状は把握できるが、値には若干の誤差を含んでいると判断したので除外した。 $\theta = \theta_0 = \pi/16$ の近傍において大きな圧縮応力を与えるのは興味ある。

図-4には、 $\sigma_{\varphi\varphi}$ の分布を示した。この図においても、 $r = R_2$ における分布は、図-3と同じ理由により、除外してある。 $r = 0.9 R_2$ の $\theta = \theta_0 = \pi/16$ の近くにおいて比較的大きな引張応力を与えているが、 $\sigma_{\theta\theta}$ よりは小さな値であり、また、圧縮応力にならないという特徴を示している。図-5には、 $\sigma_{r\theta}$ の分布を示した。 σ_{rr} と比較すると、 $2/3$ 程度の小さな値であるが、 r 方向における減衰は、 σ_{rr} に比較して幾分遅く、 $0 \leq r \leq 0.4 R_2$ においてほぼ0となる。 $r = R_2$ の $\theta = \theta_0 = \pi/16$ における値は、本研究の近似解析による限りでは、連続して0とならず、不連続性を示している。この近似解析においては、 $0 \leq \theta < \theta_0$ の区間における変位成分に関する境界条件が近似的に満足されていること、あるいは、線素面荷重および線せん断荷重の Legendre 展開による多項式および陪関数の収束が遅いことなどが原因となって生じた数値計算上の誤差が不連続な値となって現われたのか、あるいは、真に不連続な値を示すのかは、厳密な3次元解析をまたねば明確にできないようである。図-6には、 $r = R_2$ において規定された変位成分の値が微分して与えられて、圧縮前の $r = R_2$ における r 方向の応力 p を

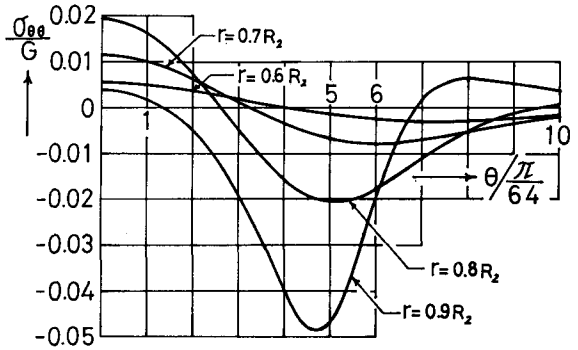


図-3 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布 ($\nu=0.25$)

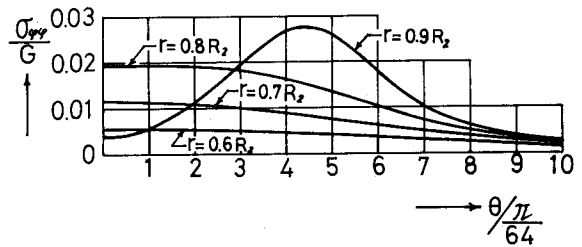


図-4 $\sigma_{\varphi\varphi}$ の分布 ($\nu=0.25$)

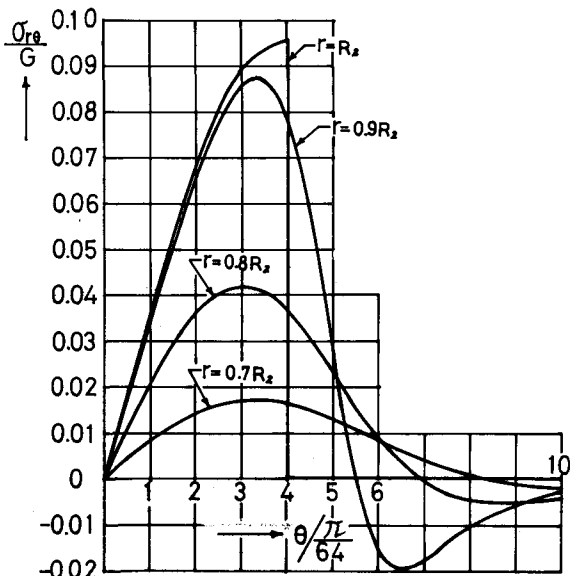


図-5 $\sigma_{r\theta}$ の分布 ($\nu=0.25$)

$$P/G = (\sigma_{rr}/G)r = R_2 \cos \theta + (\sigma_{\theta\theta}/G)r = R_2 \sin \theta \dots (20)$$

より求め、その分布を示した。 $\theta = \theta_0 = \pi/16$ においては、図-5に示した σ_{rr} の $\theta = \theta_0 = \pi/16$ の円周上における不連続な値により、連続して0とはならず、小さな値ではあるが、不連続性を示している。

6. 結 語

厳密な解析がなかなか困難とされている中実球のスタンプの解析を、変位成分に関する境界条件のみが近似的に満たされる1つの半解析法により

行った。本研究は、第1章において述べたように、中実球の接触問題の解析を直接の目的としているが、たがスタンプの解析を通して、たとえば、表-1は、少なくとも、接触面に摩擦のある場合には、Hertzの理論の適用がむずかしいことを示している結果としてきわめて興味深い。また、接触面に摩擦の存在しない場合においても、文献2)に受け入れられるようにHertzの理論に含まれている仮定の補正あるいは非線形弾性論による解析結果との不一致などが報告されており、Hertzの理論の適用性については、現時点においても、あまり明確にされていないようである。本研究の目的である粗い剛性平面で圧縮された粗い表面を持つ中実球の応力分布は、図-2から図-6を通して明らかにされたと考えているが、図-5に示した σ_{rr} の $r=R_2$ 、 $\theta=\theta_0=\pi/16$ における不連続性は、今後さらに精密な計算を行い検討する必要があると考えている。粗い表面を持つ2つの球の接触問題に関する文献3)においては、円柱座標系に変換されたせん断応力 σ_{rz} が、数式上は、接触面の境界において特異性を示すにもかかわらず、図には、境界において0と表示されており、本研究における σ_{rr} とは、座標系が異なるにしても、摩擦がある場合の接触面の境界における応力の値は、詳細な吟味が必要と考えられる。

謝 辞 本研究は、中実球の接触問題に関する能町純徳教授（北海道工学工学部土木工学科）との談話の中で接触問題の1つの基本的課題として、同教授により提示されたテーマである。記して深謝する次第です。

参考文献

- 1) ランダウ=リフシッツ（坂藤常三訳）：弾性理論，pp. 37-42，東京図書，1972.
- 2) Deresiewicz, H. : A note on second-order Hertz contact, J. Appl. Mech., Vol. 28, No. 1, pp. 141-142, 1961.
- 3) Goodman, L. E. : Contact stress analysis of normally loaded rough spheres, J. Appl. Mech., Vol. 29, No. 3, pp. 515-522, 1962.
- 4) Torvik, P. J. : Note on the boundary conditions for contact problems, J. Appl. Mech., Vol. 34, No. 3, pp. 761-763, 1967.
- 5) Greenwood, J. A. and J. H. Tripp : The elastic contact of rough spheres, J. Appl. Mech., Vol. 34, No. 1, pp. 153-159, 1967.
- 6) Hughes, B. D. and L. R. White : Analytic approximations for the elastic contact of rough spheres, J. Appl. Mech., Vol. 47, No. 1, pp. 194-196, 1980.
- 7) たとえば，Lur'e, A. I. : Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity, pp. 325-379, Interscience Pub., 1964.
- 8) 奥村 勇：球殻の等温弾性問題ならびに熱応力問題の一解法について，土木学会論文報告集，No. 307, pp. 1-15, 1981.

$$P/G = (\sigma_{rr}/G)\cos\theta - (\sigma_{\theta\theta}/G)\sin\theta$$

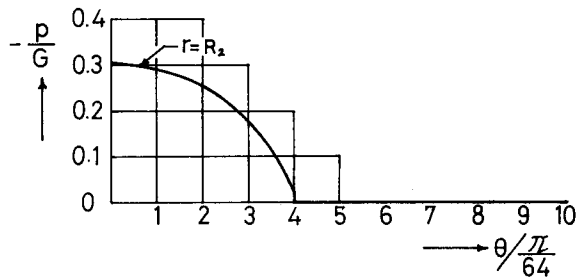


図-6 表面における方向の応力分布
($\nu=0.25$)