Ⅳ—21　三角測量四辺形の厳密解をForm化し、これにsin対数表差dと図形閉合差δの代入のみで解をうる解析

道都短期大学　正会員　今井芳雄

§1. 前言. 三角測量四辺形の調整の厳密解は、先づ3つの角条件式と1つの辺条件式のもとで、条件付最小自乗法から導入される偏微分方程式を解いて求めるわけであるが、これには4このラグランジュ未数$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$を用いて$\lambda$に関する4元1次の連立方程式を解くのである。然し$\lambda$の連立方程式の$\lambda$係数が文字の多項式なので文字のまゝ解くには手数を要することから先づこの係数を数値化してから数値係数の方程式として これを消去法または行列式によって解いていたのである 2次方程式の根の公式のような文字解は得られていないのである 従って方程式の解き方は変らないが測量の都度新らたにλの係数を数値化して後 連立方程式を解くという手数が必要であった。筆者はλの方程式の解をλの文字係数のまゝ求めこれを整理し 最終的に四辺形の厳密解が sin対数表差dと 図形の閉合差δのただ2種類の数値を代入するだけの計算で得られる様 解をForm化したので発表するわけであります。従って対数表差dと閉合差δを求めておけば これをFormに従って代入計算するだけで誰にも容易に一度の計算で最終厳密解が得られるのであります

§2. $\log_{10} \sin M$の表差

公式から $$\log_{10} \sin(M+v) = \frac{\log_e \sin(M+v)}{\log_e 10} \quad \text{-------- (2.1)}$$

ただし Mは観測角, vはMの補正値で秒単位とする. (2.1)式をTaylor式で展開すると

$$= \frac{1}{\log_e 10}\left\{\log_e \sin M + \frac{\cos M}{\sin M} \times v^{秒} \times 10^{-6} \times 4.848 \text{ radian}\right\} \quad \text{-------- (2.2)}$$

$$= \log_{10} \sin M + \frac{10^{-6} \times 2.1054596^{\text{ radian}}}{\tan M} \times v^{秒} \quad \text{-------- (2.3)}$$

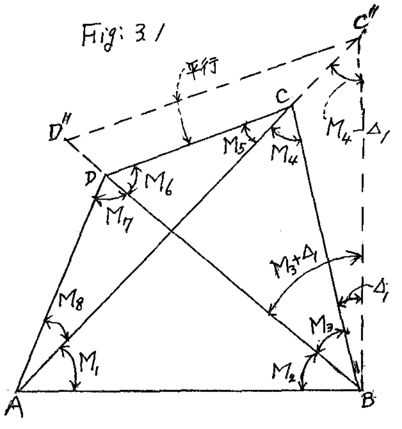
ここで $$\frac{10^{-6} \times 2.1054596 \text{ radian}}{\tan M} = d \quad とおけば \quad \text{-------- (2.4)}$$

$$= \log_{10} \sin M + d \cdot v^{秒} \quad \text{-------- (2.5)}$$

を得る dは三角関数対数表において1秒の表差である 四辺形厳密解ではdの有効桁数を対数表に掲げたものより多くとった方がよい そのため(2.5)式で直接計算するものとした.

§3. 四辺形の図形閉合条件

Fig: 3.1



閉合した四辺形ABCD (Fig: 3.1) は4つの三角形から出来ている 各々の三角形について

$$\triangle ADC \cdots M_5 + M_6 + M_7 + M_8 = 180^\circ \quad \text{-------- (3.1)}$$

$$\triangle ADB \cdots M_1 + M_2 + M_7 + M_8 = 180^\circ \quad \text{-------- (3.2)}$$

$$\triangle DCB \cdots M_3 + M_4 + M_5 + M_6 = 180^\circ \quad \text{-------- (3.3)}$$

$$\triangle ACD \cdots M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 180^\circ \quad \text{-------- (3.4)}$$

という三角形3内角の和 equal 180°という条件式が4つ存在する (3.1)式と(3.2)式から

$$M_1 + M_2 = M_6 + M_5 \equiv x \quad とおく \text{ --------}$$

(3.2) 式と (3.4) 式から　$M_3+M_4=M_7+M_8\equiv y$ とおく ---------- (3.6)
の2式が得られる. 次に 四辺形 ABCD 全体については4頂点 A, B, C, D の内角 について

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$$

$$=(M_8+M_1)+(M_2+M_3)+(M_4+M_5)+(M_6+M_7)=360^\circ \text{ ---------- } (3.7)$$

の条件がうまれる. (3.7) 式の M に (3.5) 式 (3.6) 式の関係を入れると

$$=2x+2y=360^\circ \text{ ---------- } (3.8)$$

$$\therefore\ x+y=180^\circ \text{ ---------- } (3.9)$$

となる. (3.9) 式の関係があるから (3.5), (3.6), (3.7) 式の3式が成立すれば (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.7)

の内容を満すことになる。然し四辺形の 図形閉合はこの3条件式 つまり角条件のみでは不充分である 例えば △BDC において M_3 が $M_3+\Delta_1$, M_4 が $M_4-\Delta_1$ に観測され又は補正されているときは △BDC でなく △BD″C″ となるが (3.6), (3.3) 式は成立するから 四辺形閉合を check する方法がない。辺 DC でなく 辺 D″C″ を得ることになる。四辺形 ABCD が たしかに閉合するためには 独立の他の条件が必要であり それは辺条件式である

§4. 辺条件式

Fig. 3.1 から　△ADB, △ADC より $\dfrac{AD}{AB}\times\dfrac{DC}{AD}=\dfrac{DC}{AB}$ ---------- (4.1)

△ABC, △DCB より $\dfrac{BC}{AB}\times\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{DC}{AB}$ ---------- (4.2)

∴ (4.1) 式 = (4.2) 式 ---------- (4.3)

(4.1) 式の左辺 $=\dfrac{\sin M_2}{\sin M_7}\times\dfrac{\sin M_8}{\sin M_5}$ ---------- (4.4)

(4.2) 式の左辺 $=\dfrac{\sin M_1}{\sin M_4}\times\dfrac{\sin M_3}{\sin M_6}$ ---------- (4.5)

$$\therefore\ \frac{\sin M_2}{\sin M_7}\times\frac{\sin M_8}{\sin M_5}=\frac{\sin M_1}{\sin M_4}\times\frac{\sin M_3}{\sin M_6} \text{ ---------- } (4.6)$$

(4.6) 式両辺の対数をとって 移項 整理すると

$$\log_{10}\sin M_1+\log_{10}\sin M_3+\log_{10}\sin M_5+\log_{10}\sin M_7-\{\log_{10}\sin M_2+\log_{10}\sin M_4+\log_{10}\sin M_6+\log_{10}\sin M_8\}=0 \text{ --- } (4.7)$$

(4.7) 式は閉合した四辺形をうるため 角 M を規正するための辺条件式である。もし角 M_3 に $+\Delta_1$, M_4 に $-\Delta_1$ の誤差があれば $\log_{10}\sin(M_3+\Delta_1)-\log_{10}\sin(M_4-\Delta_1)$ は §2 から equal $\log_{10}\sin M_3-\log_{10}\sin M_4+d_3\cdot\Delta_1-(-)d_4\cdot\Delta_1\neq\log_{10}\sin M_3-\log_{10}\sin M_4$ ---------- (4.8)

であって 角条件式の様に $+\Delta_1$, $-\Delta_1$ は相殺されることがなく 数値として残るのであって 従って (4.7) 式は equal zero とならず不成立である

§5. 四辺形の図形閉合差

図形閉合差を δ_i $(i=1, 2, 3, 4)$, とすれば (3.7) 式, (3.5), (3.6), (4.7) 式から

$$M_1+M_2+M_3+M_4+M_5+M_6+M_7+M_8-360^\circ=\delta_1 \text{ ---------- } (5.1)$$

$$(M_1+M_2)-(M_5+M_6)=\delta_2 \text{ ---------- } (5.2)$$

$$(M_3+M_4)-(M_7+M_8)=\delta_3 \text{ ---------- } (5.3)$$

$$\log_{10}\sin M_1+\log_{10}\sin M_3+\log_{10}\sin M_5+\log_{10}\sin M_7-\{\log_{10}\sin M_2+\log_{10}\sin M_4+\log_{10}\sin M_6+\log_{10}\sin M_8\}=\delta_4 \text{ --- } (5.4)$$

とおく. δ_i $(i=1, 2, 3, 4)$ の持つ数値の $+$, $-$ は δ_i の構成式通りに 数値計算を進めた結果に従うものとする

§6．誤差の条件式　観測角 M_i ($i=1,2,3,\cdots\cdots 8$) の補正量を v_i ($i=1,2,3\cdots\cdots 8$) とすれば §5の閉合差式に入れた時　これは閉合差 δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 を打すものでなければならないので　条件式 ϕ_j ($j=1,2,3,4$) を生ずる

$$\phi_1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + \delta_1 = 0 \quad (6.1)$$

$$\phi_2 = v_1 + v_2 - v_5 - v_6 + \delta_2 = 0 \quad (6.2)$$

$$\phi_3 = v_3 + v_4 - v_7 - v_8 + \delta_3 = 0 \quad (6.3)$$

$$\phi_4 = d_1 \cdot v_1 + d_3 \cdot v_3 + d_5 \cdot v_5 + d_7 \cdot v_7 - (d_2 \cdot v_2 + d_4 \cdot v_4 + d_6 \cdot v_6 + d_8 \cdot v_8) + \delta_4 = 0 \quad (6.4)$$

更に v_i 群はそれぞれが偶然誤差であるから　同時出現確率の　最大値を示すところの　出現組合せのものでなければならない，同時出現確率の最大値は　v_i 夫々の出現確率が Gauss の誤差分布法則に従うものとすれば　その自乗の和が最小のとき実現する　従って M_i ($i=1,2,3,\cdots\cdots 8$) の観測精度が皆等しくあれば　v の誤差関数 $f(v)$ は

$$f(v) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + v_5^2 + v_6^2 + v_7^2 + v_8^2 = \text{minimum} \quad (6.5)$$

の形となる　v_i ($i=1,2,3\cdots 8$) の解を得て数値計算をしたとき (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) 式の右辺が equal Δ_j ($j=1,2,3,4$) であれば　ϕ_j の精度を $\dfrac{\Delta_j}{\delta_j}$ で表らわすことにする．

(6.5) 式は　すべて自乗数の和であり　従って正の数の和ということになるから　その最小値は　存在することとなるから　その条件は　$f(v)$ の全微分 df が equal zero になることで　充分である。閉合条件 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 はいづれも右辺が zero であるから　その全微分 $d\phi_j$ ($j=1,2,3,4$) は equal zero である　こゝで Lagrange Multiplier λ_j ($j=1,2,3,4$) を用いて　$\lambda_j \cdot d\phi_j$ を作ると　これも equal zero である　従ってこれらの zero 同志の和も equal zero である　故に

$$df + \lambda_1 \cdot d\phi_1 + \lambda_2 \cdot d\phi_2 + \lambda_3 \cdot d\phi_3 + \lambda_4 \cdot d\phi_4 = 0 \quad (6.6)$$

(6.6) 式　左辺全微分の和は　偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial v_i} dv_i$　$\lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial v_i} dv_i$，$\lambda_2 \dfrac{\partial \phi_2}{\partial v_i} dv_i$　$\lambda_3 \dfrac{\partial \phi_3}{\partial v_i} dv_i$

$\lambda_4 \dfrac{\partial \phi_4}{\partial v_i} dv_i$，($i=1,2,3,\cdots\cdots 8$) の和である．この構成は 40 個からなる和であるが　dv_i ($i=1,2\cdots\cdots 8$) を因数として括弧の外にくゝり出した 8 個の括弧項の和として整理が出来る．8 個の v_i については ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 の 4 条件式があるので 8 個の dv_i のうち 4 個は独立自変数でなくなるから　うち 1 つは zero の場合も生ずる．そこでこの独立でない dv_i を因数にもつ 4 個の括弧をすべて zero にする様 λ を定めるものとする．然るとき (6.6) 式が依然 equal zero であるためには　独立変数 dv_i を因数にもつ 4 個の括弧もすべて zero でなければならぬ．dv_i が 4 個ともすべて zero でない場合にも (6.6) 式は成立しなければならないからである　以上の結論で．今の条件できめられた λ_j ($j=1,2,3,4$) を乗数に含んだ 8 ケの括弧は夫々が同時に equal zero である可きである．従って 8 個の v_i，4 個の λ_j 計 12 個の未知数を含んだ 12 個の条件式が得られる．このうち 8 ケの条件方程式が偏微分の式で　誤差方程式である

§7．誤差方程式の編成　§6 の結論によって (7.1)……(7.8) の 8 ケの誤差方程式となる

$$\frac{\partial f}{\partial v_1} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial v_1} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial v_1} + \lambda_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial v_1} + \lambda_4 \frac{\partial \phi_4}{\partial v_1} = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_2} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial v_2} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial v_2} + \lambda_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial v_2} + \lambda_4 \frac{\partial \phi_4}{\partial v_2} = 0 \quad (7.2)$$

次頁につづく

$$\frac{\partial f}{\partial v_3}+\lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial v_3}+\lambda_2\frac{\partial \phi_2}{\partial v_3}+\lambda_3\frac{\partial \phi_3}{\partial v_3}+\lambda_4\frac{\partial \phi_4}{\partial v_3}=0 \text{ ------------ } (7.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_4}+\lambda_1\frac{\partial \phi_4}{\partial v_4}+\lambda_2\frac{\partial \phi_2}{\partial v_4}+\lambda_3\frac{\partial \phi_3}{\partial v_4}+\lambda_4\frac{\partial \phi_4}{\partial v_4}=0 \text{ ------------ } (7.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_5}+\lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial v_5}+\lambda_2\frac{\partial \phi_2}{\partial v_5}+\lambda_3\frac{\partial \phi_3}{\partial v_5}+\lambda\frac{\partial \phi_4}{\partial v_5}=0 \text{ ------------ } (7.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_6}+\lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial v_6}+\lambda_2\frac{\partial \phi_2}{\partial v_6}+\lambda_3\frac{\partial \phi_3}{\partial v_6}+\lambda_4\frac{\partial \phi_4}{\partial v_6}=0 \text{ ------------ } (7.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_7}+\lambda\frac{\partial \phi_1}{\partial v_7}+\lambda_2\frac{\partial \phi_2}{\partial v_7}+\lambda_3\frac{\partial \phi_3}{\partial v_7}+\lambda_4\frac{\partial \phi_4}{\partial v_7}=0 \text{ ------------ } (7.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_8}+\lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial v_8}+\lambda_2\frac{\partial \phi_2}{\partial v_8}+\lambda_3\frac{\partial \phi_3}{\partial v_8}+\lambda_4\frac{\partial \phi_4}{\partial v_8}=0 \text{ ------------ } (7.8)$$

§8．誤差方程式の解　$\frac{\partial f}{\partial v_i}$, $\lambda_j\frac{\partial \phi_j}{\partial v_i}$ $(j=1,2,3,4)$, $(i=1,2,3,\cdots 8)$ の実際の形を(6.1),(6.2),(6.3),(6.4),(6.5)式を偏微分することで求め．(7.1),⋯,(7.8)式を展開すると v_i $(i=1.2.3\cdots 8)$ が8ヶ λ_j $(j=1.2.3.4)$ が4ヶ 計12個の未知数を含んだ8個の方程式となる．これに ϕ_j $(j=1.2.3.4)=0$ を示す(6.1),(6.2),(6.3),(6.4)を加えて12ヶの方程式となるが (7.1),⋯,(7.8)式の1つ1つは v_i の1次式だから v_i は直ちに λ で表わせる 従ってこれを ϕ_j $(j=1.2.3.4)$ の式の v_i に代入すれば λ についての 4ヶの方程式となる 筆者の解法としては λ_4 を求めることになる §1 で述べたように、λ の係数を 文字のまゝ扱って λ_4 を求めた。

$$\lambda_4=\Big\{\frac{1}{4}(d_1+d_3+d_5+d_7-d_2-d_4-d_6-d_8)\times\delta_1+\frac{1}{2}(d_1+d_6-d_2-d_5)\times\delta_2+\frac{1}{2}(d_3+d_8-d_4-d_7)\times\delta_3-2\delta_4\Big\}\div\Big[\frac{1}{8}(d_1+d_3+d_5+d_7-d_2-d_4-d_6-d_8)^2+\frac{1}{4}(d_1+d_6-d_2-d_5)^2+\frac{1}{4}(d_3+d_8-d_4-d_7)^2-(d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2+d_5^2+d_6^2+d_7^2+d_8^2)\Big] \text{ -------- } (8.1)$$

として得られる 従来までは λ_4 をこの形でなく 数値係数連立方程式として 数値解となって求めざるを得なかった．続いて λ_1, λ_2, λ_3 も λ_4 を含んだ形で解けるので λ_j $(j=1.2.3.4)$ を未知数として含んだ v_i $(i=1.2.3\cdots 8)$ に代入して v_i が決定される．この際 留意すべきことは (8.1)式で表わされた λ_4 の数値計算に誤りがあると (6.4)式 $\phi_4=\cdots=0$ の条件が、なかなか満されない．たゞし (6.1),(6.2),(6.3) の条件式は 中身が λ_4 の係数がZeroになる内容であることから λ_4 の誤りに左右されないで δ_1, δ_2, δ_3 の閉合差を打消して条件式は満される

§9．Form化した補正値 v_i の式（四辺形の厳密解）

観測角 M_i $(i=1.2.3\cdots 8)$ の補正値を v_i $(i=1,2,3,\cdots 8)$ とすると次の8ヶの補正値が得られる

$$v_1=\frac{1}{16}\Big\{\lambda_4\times(d_3+d_6+d_7-5d_1-3d_2-d_4-d_5-d_8)+(-)2\delta_1+(-)4\delta_2\Big\} \text{ -------- } (9.1)$$

$$v_2=\frac{1}{16}\Big\{\lambda_4\times(d_3+d_6+d_7+3d_1+5d_2-d_4-d_5-d_8)+(-)2\delta_1+(-)4\delta_2\Big\} \text{ -------- } (9.2)$$

$$v_5=\frac{1}{16}\Big\{\lambda_4\times(d_2+d_3+d_7-5d_5-3d_6-d_1-d_4-d_8)+(-)2\delta_1+4\delta_2\Big\} \text{ -------- } (9.3)$$

次頁に続く

$$v_6=\frac{1}{16}\left\{\lambda_4\times(d_2+d_3+d_7+3d_5+5d_6-d_1-d_4-d_8)+(-)2\delta_1+4\delta_2\right\} \text{ --------- } (9.4)$$

$$v_3=\frac{1}{16}\left\{\lambda_4\times(d_1+d_5+d_8-5d_3-3d_4-d_2-d_6-d_7)+(-)2\delta_1+(-)4\delta_3\right\} \text{ -------- } (9.5)$$

$$v_4=\frac{1}{16}\left\{\lambda_4\times(d_1+d_5+d_8+3d_3+5d_4-d_2-d_6-d_7)+(-)2\delta_1+(-)4\delta_3\right\} \text{ ------ } (9.6)$$

$$v_7=\frac{1}{16}\left\{\lambda_4\times(d_1+d_4+d_5-5d_7-3d_8-d_2-d_3-d_6)+(-)2\delta_1+4\delta_3\right\} \text{ ------ } (9.7)$$

$$v_8=\frac{1}{16}\left\{\lambda_4\times(d_1+d_4+d_5+3d_7+5d_8-d_2-d_3-d_6)+(-)2\delta_1+4\delta_3\right\} \text{ -------- } (9.8)$$

ここで $\lambda_4=(8.1)$式，$d=\sin$の対数表差$=(2.4)$式，$\delta=$四辺形閉合差$=(5.1),(5.2),(5.3)$式

§10. 計算例題

Fig; 3.1 に示す四辺形ABCDについて表10.1の数値が得られた　これをもとに補正値 v_i を求めること

表 10.1

観測角 ＼ 区分	M_1 42°01′12.15″	M_2 38°22′19.10″	M_3 38°28′34.9″	M_4 61°07′52	M_5 30°57′07.10″	M_6 49°26′21.85″	M_7 70°21′59.20″	M_8 29°14′32.85″
$\sin M$	0.66939	0.620764	0.622192	0.875727	0.514319	0.759719	0.941861	0.488506
$\log_{10}\sin M$	$\bar{1}.825679$	$\bar{1}.792926$	$\bar{1}.793924$	$\bar{1}.942369$	$\bar{1}.711233$	$\bar{1}.880653$	$\bar{1}.973987$	$\bar{1}.68887$
$\tan M$	0.901037	0.791794	0.794762	1.813820	0.599720	1.16835	2.80313	0.559854
$\frac{1}{\tan M}$	1.1098323	1.2629547	1.2582383	0.5513226	1.6674448	0.8559079	0.356744	1.7861799
1秒の表差 $d=10^{-6}\times2.1054596\times\frac{1}{\tan M}$ d	d_1 $10^{-6}\times$ 2.33671	d_2 $10^{-6}\times$ 2.6591001	d_3 $10^{-6}\times$ 2.649170	d_4 $10^{-6}\times$ 1.1607875	d_5 $10^{-6}\times$ 3.5107377	d_6 $10^{-6}\times$ 1.802079	d_7 $10^{-6}\times$ 0.7511101	d_8 $10^{-6}\times$ 3.7607734
d^2	d_1^2 $10^{-12}\times$ 5.460214	d_2^2 $10^{-12}\times$ 7.0708133	d_3^2 $10^{-12}\times$ 7.0181017	d_4^2 $10^{-12}\times$ 1.3474276	d_5^2 $10^{-12}\times$ 12.325279	d_6^2 $10^{-12}\times$ 3.247490	d_7^2 $10^{-12}\times$ 0.5641664	d_8^2 $10^{-12}\times$ 14.143414
$3d$	$10^{-6}\times$ 7.01013	$10^{-6}\times$ 7.9773003	$10^{-6}\times$ 7.94751	$10^{-6}\times$ 3.4823625	$10^{-6}\times$ 10.5322131	$10^{-6}\times$ 5.4046237	$10^{-6}\times$ 2.2533303	$10^{-6}\times$ 11.2823202
$5d$	$10^{-6}\times$ 11.68355	$10^{-6}\times$ 13.2955005	$10^{-6}\times$ 13.24585	$10^{-6}\times$ 5.8039375	$10^{-6}\times$ 17.5536885	$10^{-6}\times$ 9.010395	$10^{-6}\times$ 3.7555505	$10^{-6}\times$ 18.803867

観測角について表10.1を準備したので閉合差を求める

$$\delta_1=(5.1)式\ =359°59'59.15''-360°=(-)0.85'' \text{ ------------- } (10.1)$$

$$\delta_2=(5.2)式\ =80°23'31.25''-80°23'28.95''=2.3'' \text{ ----------- } (10.2)$$

$$\delta_3=(5.3)式\ =99°36'26.9''-99°36'32.05''=(-)5.15'' \text{ -------- } (10.3)$$

$$\delta_4=(5.4)式\ =\bar{4}+3.304823-(\bar{4}+3.304818)=0.000005 \text{ --------- } (10.4)$$

最も大事な λ_4を(8.1)式に従って代入計算で求める

$$\lambda_4=\frac{(-)10^{-6}\times0.0337305\times(-)0.85''+(-)10^{-6}\times1.01552415\times2.3''+10^{-6}\times2.2490227\times(-)5.15''-10^{-6}\times10}{\left[10^{-12}\times0.0022785368+10^{-12}\times1.0312893+10^{-12}\times5.058101311+10^{-12}\times5.05810311-10^{-12}\times51.1769065\right]}$$

$$=\frac{10^{-6}\times\{0.0286901+(-)2.33570555+(-)11.582467-10\}}{(-)10^{-12}\times45.085235589}=10^{6}\times0.529874 \quad\text{-------}\quad (10.5)$$

このλ_4，表10.1に掲げたdの諸数値を(9.1),……,(9.8)式に代入するとv_i $(i=1,2,3\cdots8)$を得る

$v_1=\frac{1}{16}\{(-)19.62923414\}=(-)1.2268$秒，$v_2=\frac{1}{16}\{1.54796\}=0.096748$秒

$v_3=\frac{1}{16}\{15.7655\}=0.98534$秒，$v_4=\frac{1}{16}\{31.9158\}=1.99474$秒

$v_5=\frac{1}{16}\{(-)1.90113\}=(-)0.11882$秒，$v_6=\frac{1}{16}\{20.6199\}=1.2887$秒

$v_7=\frac{1}{16}\{(-)26.922\}=(-)1.6826$秒，$v_8=\frac{1}{16}\{(-)7.79645\}=(-)0.487$秒

$\phi_4=(-)10^{-6}\times1.9373853-\{10^{-6}\times3.0626119\}+0.000005=10^{-6}\times0.0000028\fallingdotseq\Delta_4$

$\therefore$ ϕ_4の精度$=\frac{\Delta_4}{d_4}=\frac{10^{-6}\times0.0000028}{10^{-6}\times5}$ …充分な精度を有している これらによって補正putinのMは

$M_8=29^\circ14'32.36''$，$M_7=70^\circ21'57.52''$，$M_6=49^\circ26'23.14''$，$M_5=30^\circ57'6.98''$

$M_1=42^\circ01'10.92''$，$M_2=38^\circ22'19.20''$，$M_4=61^\circ07'54''$，$M_3=38^\circ28'35.89''$

が確定する

§11. 結言

従来三角測量四辺形の厳密解は 測量の都度方程式の数値解で λ_j $(j=1,2,3,4)$ を求めるので その手数で敬遠されたが 筆者の最終的に整理した 補正値 v_i $(i=1,2,3,\cdots\cdots8)$ の式は確定した Form であって $\log_{10}\sin$ の1秒の表差dと 四辺形閉合差δの代数計算で足りることになった 誰が測量しても図形閉合差が制限内であれば Formから直ちに厳密解が得られる。手軽に便利に 応用がなされることを期待するわけであります λ_4の数値計算には入念な注意を施して miss のない様にしなければならない 若しλ_4の計算にmissがあれば(9.1)…(9.8)式で求める補正値v_iは当然正しい値でないが $\phi_1=0$, $\phi_2=0$, $\phi_3=0$ の条件式は右辺 equal zero に近い値で満されるのでλ_4のmissが表らはれない 然し(6.4)式に入れると missは表われて δ_4を打消し得ないので右辺 equal zero にならないのである それはϕ_1，ϕ_2，ϕ_3 の条件式では v_iに含まれる λ_4係数が +，− で相殺される内容になっているからであり (9.1)……(9.8)式中にδ_4が含まれていないことと対応する。この事からも辺条件式は大切なものであると云える (1980.9.11)