

II-20 一般化貯留関数法のパラメータ同定

北大工学部 正員 星 清 学生員 ○ 野田 徹

1. はじめに

貯留関数法は広く実際の流出解析に用いられている。今までに提案されている貯留関数法の代表的なものをあげれば、Prasad の貯留関数法¹⁾と木村の貯留関数法²⁾がある。Prasad モデルは次式で与えられる。

$$S = K_1 Q^p + K_2 dQ/dt \quad \dots (1) \quad dS/dt = R - Q \quad \dots (2)$$

ここで、 S ; 貯留量 Q ; 流量 R ; 降雨量 K_1, K_2, p ; パラメータ。ハイドログラフの上昇部と下降部の特性を考えれば、(1) 式は $S \sim Q$ 曲線の2価性を最も単純化した表現であると理解されよう。一方、木村の貯留関数法は次式で定義される。

$$S_\ell = K Q_\ell^p \quad \dots (3) \quad Q_\ell = Q(t + T_\ell) \quad \dots (4) \quad dS_\ell/dt = R - Q_\ell \quad \dots (5)$$

ここで、 S_ℓ ; みかけの貯留量 Q_ℓ ; 遅滞時間を考慮した流量 T_ℓ ; 遅滞時間 K, p ; パラメータ。木村のモデルの特徴は $S \sim Q$ 曲線の2価性を解消する手段として、遅滞時間 T_ℓ を導入することによって $S_\ell \sim Q_\ell$ 曲線を1価関数で表現しようとするところにある。したがって、この手法の実際の適用にあたっての成否は T_ℓ の決定に依存する。両モデルとも3個のパラメータを有する点では同一である。Prasadモデルでは、 K_1, K_2, p の同時最適化が可能であるが、木村のモデルでは、 T_ℓ が陰形式で(4)式中に含まれているために、一探索毎に T_ℓ を固定して K と p の最適値をさがす2次元探索法をとらざるを得ない。この点で、Prasadモデルの方がより解析が容易であると考えられる。

両モデルを実際の流出解析に適用してパラメータ同定を行なった研究成果を総合してみると、³⁾ Prasadモデルでは、一洪水期間中でもパラメータ K_2 の変動は著しく一定値とはみなしがたい。一方、木村のモデルにおいても、 $S_\ell \sim Q_\ell$ 曲線を1価関数で表現しようとするのはかなり強い制約条件であるために、一定値となる T_ℓ を決定することは容易ではなく、むしろ、 T_ℓ が流量に依存して変化する時1価関数に近づくという報告がある。^{4), 5)} 高水流量計画上から言っても、過去の実績洪水資料から同定されたモデルパラメータと流域特性値(地形量、粗度)ないしは降雨特性値との相互関係を定量化することが望ましい。しかしながら、貯留係数 K_2 ないしは遅滞時間 T_ℓ が流量に依存しているのでは合理的計画洪水流量の策定は困難であると考えられる。

本報告では、以上述べた従来の貯留関数法の問題点を除去すべく、まず、分布定数系モデルである Kinematic Wave 理論を用いて $S \sim Q$ 曲線の構造式を明確にし、次に、一般化貯留関数法を提案して、パラメータ最適化問題をとりあげる。

2. 一般化貯留関数

Kinematic Wave 理論は斜面流出問題に関してよい近似度を与え、しかも、継続時間 T_r をもつ矩形降雨波形 R については、水深 H の斜面上の分布、斜面末端でのハイドログラフ(Q)、および、 $S \sim Q$ 曲線の理論解はよく知られている。⁶⁾ Kinematic Wave モデルに含まれるすべての変数を無次元化した基礎方程式は次式で与えられる。

$$\partial H / \partial T + \partial Q / \partial X = R \quad (0 \leq X \leq 1) \quad \dots (6) \quad Q = H^m \quad \dots (7)$$

ここで、 T ; 時間 X ; 距離 H ; 水深 Q ; 流量 R ; 降雨量 m ; 定数。大文字の諸量はすべて無次元量を表わし、以後の解析においてもこの表示に準ずる。図-1は矩形降雨波形 R に対する斜面末端($X=1$)でのハイドログラフの理論解である。図中の T_c は無次元到達時間であり、 $T_c = R^{(1-m)/m}$ で定義される。また、一般の降雨流出系は $T_r > T_c$ と考えられるのでその条件のもとでの結果のみを示した。図-1に示した条件のもとでの貯留方程式は次式で与えられる。⁶⁾

$$S(T) = \begin{cases} Q^{1/m} - \frac{1}{(m+1)R} Q^{(m+1)/m} & (0 \leq T < T_c) \\ \frac{m}{m+1} Q^{1/m} & (T_c \leq T < T_r) \dots\dots\dots (8) \\ \frac{m-1}{m} Q^{1/m} + \frac{1}{m(m+1)R} Q^{(m+1)/m} & (T \geq T_r) \end{cases}$$

また、図-1に示されるハイドログラフの関数形により dQ/dT を (8) 式の右辺第2項に代入すれば (9) 式が得られる。

$$S(T) = \begin{cases} Q^{1/m} - \frac{1}{m(m+1)R^2} Q^{2/md} \frac{dQ}{dT} & (0 \leq T < T_c) \\ \dots\dots\dots (9) \\ \frac{m-1}{m} Q^{1/m} - \frac{R(m-1)+Q}{m^3(m+1)R^2} Q^{(2-m)/m} \frac{dQ}{dT} & (T \geq T_r) \end{cases}$$

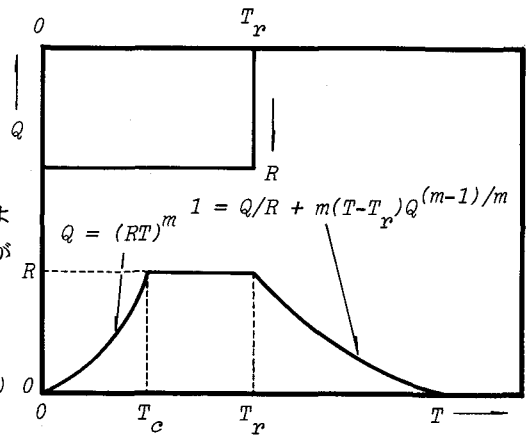


Fig. 1 Hydrograph at X = 1

(1) 式のPrasadモデルと矩形降雨に対応する (9) 式の貯留方程式を比較してみると、パラメータ K_2 は m , R , Q に依存していることがわかる。したがって、前述したように、Prasad モデルの K_2 が一洪水期間中一定値とはならず、流量に依存して変化していると推測されたことが確認されたことになる。任意降雨波形に対応する $S \sim Q$ 曲線の理論解は得られず数値解析によらざるを得ない。また、矩形降雨についても、(9) 式に示されるように、ハイドログラフの上昇部と下降部で貯留方程式の構造が異なるというのでは、たとえば、流出の逐次予測を行なう上でもきわめて不便である。そこで、(9) 式の構造式を統一して、ここでは次の一般化貯留方程式を提案する。

$$S = K_1 Q^{p_1} + K_2 d(Q^{p_2})/dT \dots (10)$$

ここで、 K_1 , K_2 , p_1 , p_2 ; モデルパラメータ。上式を変形すれば、

$$S = K_1 Q^{p_1} + K_2 p_2 Q^{p_2-1} dQ/dT \dots (10a)$$

パラメータ p_2 を新たに導入した理由は、(10a) 式からもわかるように、 K_2 が流量 Q の影響を受けないようにするためと、(10a) 式が (9) 式の一般的表現にほかならないからである。もちろん、 $p_2 = 1$ の場合には Prasad モデルに一致する。

本報告では、(10) 式の一般化貯留関数が矩形降雨波形 R については既知の図-1のハイドログラフと (8) 式の $S \sim Q$ 曲線をどのくらいの精度で近似化可能かを詳査する。このとき、同定されたパラメータ K_1 , K_2 , p_1 , p_2 と指数 m および降雨強度 R の相互関係をできるだけ定量化する目的で種々のハイドログラフと $S \sim Q$ 曲線を用意した。採用した値の組み合わせは表-1に示される。また、図-1の流量と (8) 式の貯留量は $\Delta T = 0.05$ 毎に sampling したものをそれぞれの実測値、 Q_k^* と S_k^* とみなし、標本数を $N = 80$ とする。

Table 1 Adopted values in the experiments (Rectangular Rainfall)

3. パラメータ同定法

パラメータ K_1 , K_2 , p_1 , p_2 の同定は非線形最適化問題となる。今、

$$\begin{cases} x_1 = Q^{p_2} \dots (11a) \\ x_2 = dx_1/dT = p_2 Q^{p_2-1} dQ/dT \dots (11b) \end{cases}$$

Duration ; $T_r = 2$

Rainfall intensity ; $R = 0.5, 1.0(1.0)10.0$ (11 cases)

Exponent (21 cases) ; $m = 1.0(0.05)2.0$

の変数変換を行なうと、(10) 式は次のようになる。

$$S = K_1 x_1^{p_1/p_2} + K_2 x_2 \dots (12)$$

(2) 式の連続式と (12) 式より次の連立微分方程式が得られる。

$$dx_1/dT = x_2 \quad \dots (13a) \quad dx_2/dT = (-K_1 p_1 x_1^{p_1/p_2-1} x_2/p_2 - x_1^{1/p_2} + R)/K_2 \quad \dots (13b)$$

このとき、初期条件は (14) 式で与えられる。

$$x_1|_{T=0} = x_2|_{T=0} = 0 \quad \dots (14)$$

あらかじめ決定されているパラメータ K_1, K_2, p_1, p_2 について (13) 式を Runge-Kutta-Gill 法によって解き、(11a) 式より計算流量 Q_k を得た。このとき、計算時間間隔を $\Delta T = 0.01$ とした。

以下に述べるように、 K_1, K_2, p_1, p_2 の最適値探索に 1 次導関数行列 (感度係数) を用いるのでそれらをここで求めておく。(11a) 式と (12) 式より 各々のパラメータの流量 Q と貯留量 S に及ぼす感度は次式で与えられる。

$$V = \left[\begin{array}{c|c} \mu_1 I & 0 \\ \hline - & - \\ \mu_2 I & K_2 I \end{array} \right] U + [0 \ 0 \ 0 \ v_1 \mid v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5]^T \quad \dots (15)$$

ここで、

$$V = [\partial Q/\partial K_1 \ \partial Q/\partial K_2 \ \partial Q/\partial p_1 \ \partial Q/\partial p_2 \mid \partial S/\partial K_1 \ \partial S/\partial K_2 \ \partial S/\partial p_1 \ \partial S/\partial p_2]^T \quad \dots (16)$$

$$U = [\partial x_1/\partial K_1 \ \partial x_1/\partial K_2 \ \partial x_1/\partial p_1 \ \partial x_1/\partial p_2 \mid \partial x_2/\partial K_1 \ \partial x_2/\partial K_2 \ \partial x_2/\partial p_1 \ \partial x_2/\partial p_2]^T \quad \dots (17)$$

$$0 = [4 \times 4] \text{の零行列} \quad I = [4 \times 4] \text{の単位行列} \quad T = \text{行列の転置} \quad \dots (18)$$

$$\mu_1 = x_1^{1/p_2-1}/p_2, \quad \mu_2 = K_1 p_1 x_1^{p_1/p_2-1}/p_2, \quad v_1 = -x_1^{1/p_2} \ln x_1/p_2^2 \quad \dots (19a)$$

$$v_2 = x_1^{p_1/p_2}, \quad v_3 = x_2, \quad v_4 = K_1 x_1^{p_1/p_2} \ln x_1/p_2, \quad v_5 = -K_1 p_1 x_1^{p_1/p_2} \ln x_1/p_2^2 \quad \dots (19b)$$

(15) 式のベクトル V を求めるには、(17) 式に示されるベクトル U の要素を求める必要がある。そのためには (13a) 式と (13b) 式をそれぞれ、 K_1, K_2, p_1, p_2 で微分すればよい。その結果が (20) 式の線形ベクトル方程式である。

$$\frac{dU}{dT} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline - & - \\ \alpha_1 I & \alpha_2 I \end{array} \right] U + [0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4]^T \quad \text{初期条件: } U|_{T=0} = 0 \quad \dots (20)$$

ここで、

$$\alpha_1 = -[K_1 p_1 (p_1/p_2 - 1) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 + x_1^{1/p_2-1}]/K_2 p_2,$$

$$\alpha_2 = -K_1 p_1 x_1^{p_1/p_2-1}/K_2 p_2, \quad \beta_1 = -p_1 x_1^{p_1/p_2-1} x_2/K_2 p_2,$$

$$\beta_2 = (K_1 p_1 x_1^{p_1/p_2-1} x_2/p_2 + x_1^{1/p_2} - R)/K_2^2, \quad \dots (21)$$

$$\beta_3 = -K_1 x_1^{p_1/p_2-1} x_2 (1 + p_1 \ln x_1/p_2)/K_2 p_2,$$

$$\beta_4 = [K_1 p_1 x_1^{p_1/p_2-1} x_2 (1 + p_1 \ln x_1/p_2) + x_1^{1/p_2} \ln x_1]/K_2 p_2^2$$

(20) 式の感度係数ベクトル U を (13) 式を解くと同時に求める。このとき、変係数の値は計算時間間隔 $\Delta T = 0.01$ で一定値とみなす。また、(20) 式を離散表示した方が計算時間を短縮する⁷⁾

(17) 式の x_1 と x_2 に関する parameter sensitivity が (20) 式より求まると、 Q と S に関する感度係数は (15) 式により容易に求まる。

K_1, K_2, p_1, p_2 の最適値探索は、原理的にはまえもって推定されている K_1, K_2, p_1, p_2 の補正量を $\Delta K_1, \Delta K_2, \Delta p_1, \Delta p_2$ として、新たな推定値 $K_1 + \Delta K_1, K_2 + \Delta K_2, p_1 + \Delta p_1, p_2 + \Delta p_2$ によって計算流量 Q_k ないし計算貯留量 S_k が十分に実測流量 Q_k^* ないし実測貯留量 S_k^* に近づくように $\Delta K_1, \Delta K_2, \Delta p_1, \Delta p_2$ をなんらかの基準により更新することにほかならない。したがって、次式が基礎方程式となる。

$$Q_k^* = Q_k(K_1 + \Delta K_1, K_2 + \Delta K_2, p_1 + \Delta p_1, p_2 + \Delta p_2) \quad (k = 1, 2, 3, \dots, N) \quad \dots (22)$$

$$S_k^* = S_k(K_1 + \Delta K_1, K_2 + \Delta K_2, p_1 + \Delta p_1, p_2 + \Delta p_2) \quad (k = 1, 2, 3, \dots, N) \quad \dots (23)$$

(22) 式と (23) 式を Taylor 展開し、1次までの項をとると次の線形回帰式が得られる。

$$\begin{bmatrix} v_k \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial Q_k / \partial K_1 & \partial Q_k / \partial K_2 & \partial Q_k / \partial p_1 & \partial Q_k / \partial p_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial S_k / \partial K_1 & \partial S_k / \partial K_2 & \partial S_k / \partial p_1 & \partial S_k / \partial p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta K_1 \\ \Delta K_2 \\ \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, N) \quad \dots (24)$$

ここで、

$$v_k = Q_k^* - Q_k(K_1, K_2, p_1, p_2), \quad u_k = S_k^* - S_k(K_1, K_2, p_1, p_2) \quad \dots (25)$$

Q_k と S_k に関する感度係数は (15) 式で与えられるし、残差 v_k と u_k も既知となるから、補正量 $\Delta K_1, \Delta K_2, \Delta p_1, \Delta p_2$ は (24) 式から容易に求まる。探索終了は次の評価基準によればよい。

$$J = J_Q + J_S = \text{Min}_{K_1, K_2, p_1, p_2} \sum_{k=1}^N v_k^2 + \text{Min}_{K_1, K_2, p_1, p_2} \sum_{k=1}^N u_k^2 \quad (N = \text{sample size}) \quad \dots (26)$$

ただし、(24) 式を解くにあたって注意しなければならないことは、 Q_k と S_k に関する 8 個の感度係数の値の order が異なることと、感度係数間に高い相関性が存在することである。このため、(24) 式を単純に解いたのでは探索が発散する方向に進む危険がある。この問題を解決する手段として、感度係数の規準化と直交変換を用いた成分回帰分析法を (24) 式の解法に併用した。⁷⁾

4. 適用例

(10) 式に示される一般化貯留関数法のパラメータ同定過程を述べてきたが、ここで、Kinematic Wave モデルによる結果と比較した解析例を示す。図-2aと図-2b は、それぞれ、矩形降雨 ($T_p = 2, R = 2$) と $m = 1.6$ の場合についてハイドログラフと $S \sim Q$ 曲線を比較したものである。また、図-3a と図-3b は、それぞれ、三角形降雨 ($T_p = 4, R = 2$, ピーク降雨生起時刻 $T_a = 1$) と $m = 1.6$ の場合につき、ハイドログラフと $S \sim Q$ 曲線を Kinematic Wave モデルと一般化貯留関数法で比較した例である。なお、三角形降雨による Kinematic Wave 理論の解は数値解析によった。⁸⁾ 矩形及び三角形降雨波形に対応するハイドログラフ、及び $S \sim Q$ 曲線とも、一般化貯留関数法は、Kinematic Wave 理論による結果を十分な精度で再現していると言えよう。

次に、表-1 に示した種々の矩形降雨波形について同定されたパラメータ K_1, K_2, p_1, p_2 と指数 m および R の関係を考察してみる。パラメータ相互の関数形を理論的に定めることは不可能なので、最小自乗法によって適当な関数形を探索した。その手順を示すと、(a) まず、 K_1, K_2, p_1, p_2 の各パラメータと指数 m との相互関係を 3 種の関数形、 $Y = A + Bm$, $Y = Am^B$, $Y = Ae^{Bm}$ (Y = 各パラメータ) で仮定し、最小自乗基準により誤差自乗和が最小となる関数形を各パラメータについて決定した。(b) 次に、(a) で採用された関数の係数 A, B と降雨量 R との関係式も (a) と同様に最小自乗法によって決定した。Kinematic Wave モデルの結果を (10) 式の一般化貯留関数法で表現して、最適化手法を用いて同定したパラメータ K_1, K_2, p_1, p_2 と以上の方法によって決定された近似式との関係を図示すると図-4 ~ 図-7 となる。これらの図より図中に示される近似式は十分な

精度を有していることがわかる。とくに、 p_1^* と p_2^* の係数の大きさをみてわかるように、パラメータ p_1, p_2 はほとんど降雨量 R の影響を受けず、次式で近似可能である。

$$p_1^* \approx m^{-1}, \quad p_2^* \approx m^{-3/2} \quad \dots (27)$$

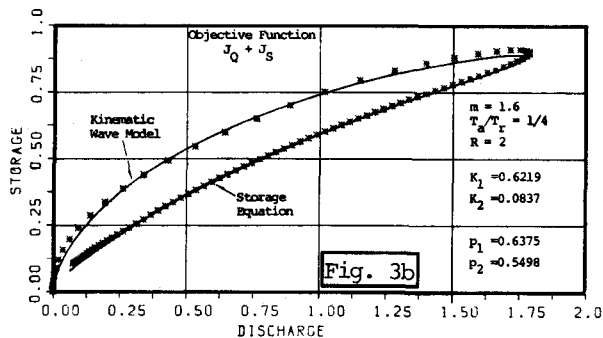
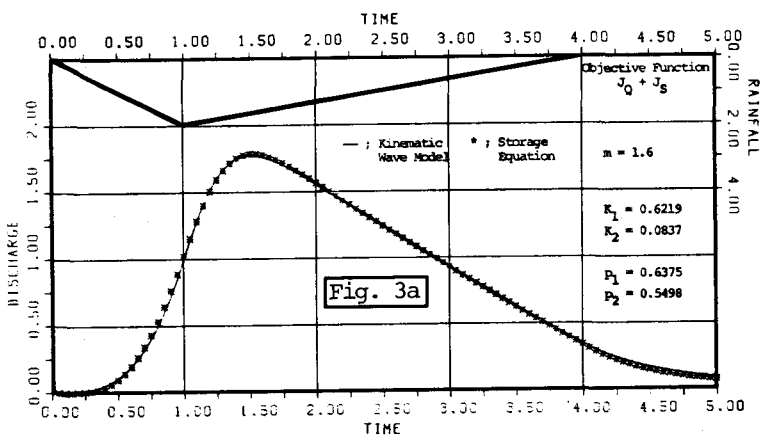
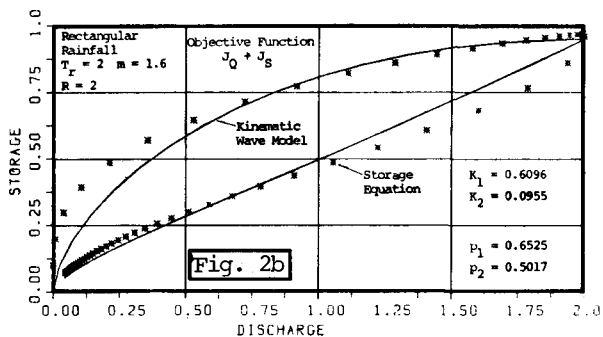
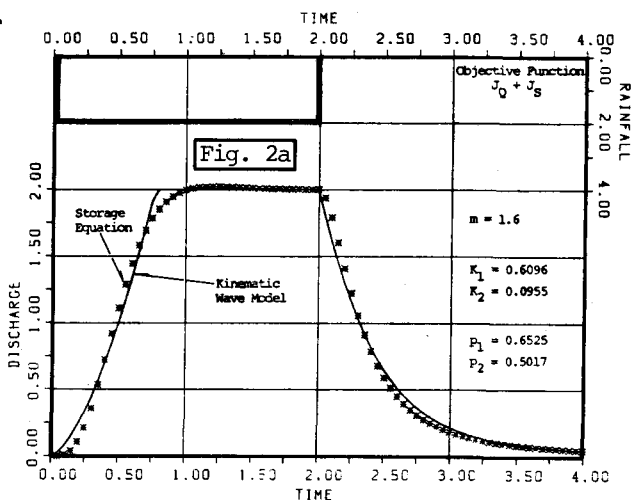
パラメータ K_2 が降雨量 R に強く影響されているが、その変動幅は $0.04 \sim 0.14$ と小さい。一般化貯留関数は $p_2 = 1$ のとき、(1)式に示されるPrasad式に一致するが、同定された値は $p_2 \neq 1$ 。一般化貯留関数法とPrasadモデルの関係は、Prasadモデルの K_2 を K_{p2} とすれば、 $K_{p2} = K_2 p_2 Q^{p_2-1}$ となり、 K_{p2} は一般化貯留関数法の K_2 より変動が大きくなるということが明確となった。

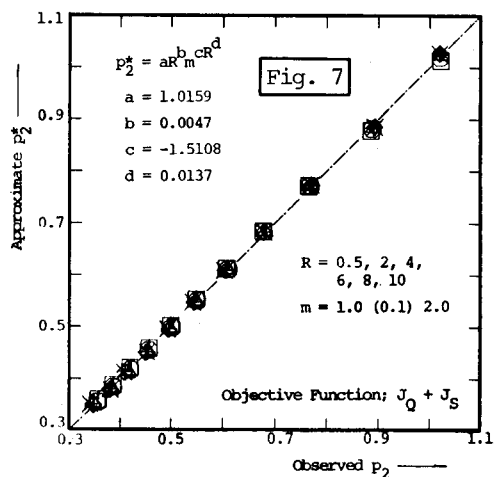
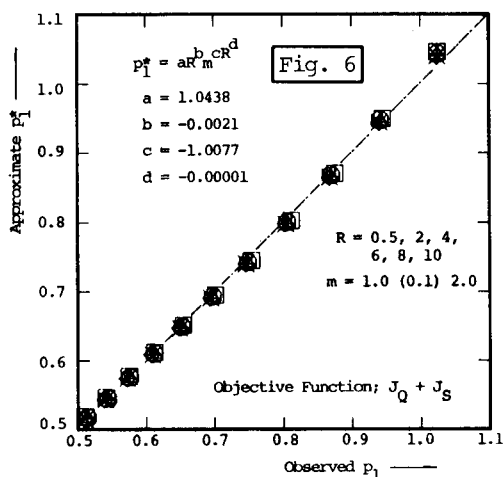
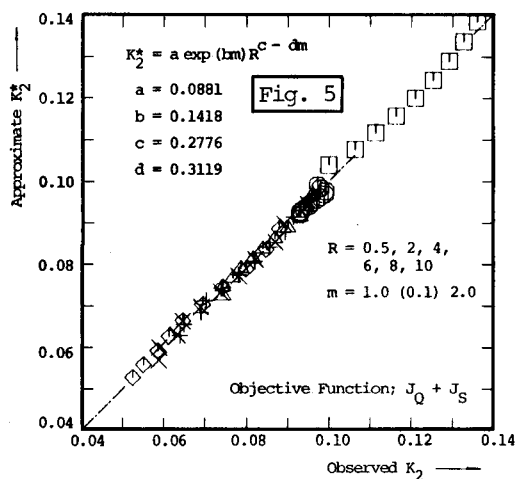
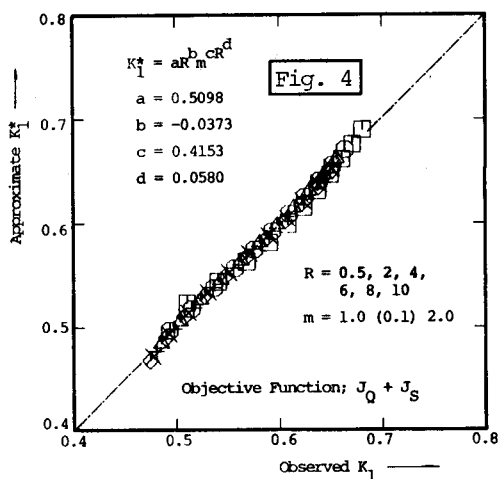
5. おわりに

従来から提案されている貯留関数法ではモデルパラメータと流域特性値ないし降雨特性値との相互関係を定量化することは困難である。その理由として、同定されたパラメータが流量に依存しているために変動が著しいことがあげられる。

このため、貯留関数法は必ずしも流出の計画予測に有効な情報を与えているとはいえない。本報告では、従来の貯留関数法に含まれる問題点を解決すべく一般化貯留関数を提案し、パラメータ同定法を詳述した。理論解が既知の矩形降雨波形に対するKinematic Waveモデルとの適合度をとくに検討し、パラメータと指数 m ないし降雨強度 R との関係式を提案した。今後の研究課題として、任意降雨波形についてもパラメータ相互の関係を定量化する予定である。

最後に、本研究は文部省科学研究費、一般研究C(代表者、北大、藤田 睦博助教)の援助を受けた。記して謝意を表する。





参考文献

- (1) Prasad, R.; A Nonlinear Hydrologic System Response Model, Jour. of Hydraul. Div., Proc. of the ASCE, Vol. 93, No. HY 4, pp. 201 - 221, 1967.
- (2) 木村 俊晃：貯留関数法，水文研究資料，河鍋書店，57 p.，1975.
- (3) 山岡 勲，藤田 睦博，星 清：高水流の研究，河川の機能に関する基礎的研究，北海道開発局，pp. 95 - 125, 1979.
- (4) 青木 佑久，臼井 博美，金箱 貞：貯留関数法における遅滞時間 T_L の一推定法，土木技術資料，Vol. 18, No. 6, pp. 39 - 43, 1976.
- (5) 杉山 博信，角屋 睦：遅滞時間について - 雨水流に関する研究 (1) -，土木学会第32回年次学術講演会講演概要集，II, pp. 221 - 222, 1977.
- (6) 白川 信之，藤田 睦博：流出モデルの集中化に関する研究，土木学会第35回年次学術講演会講演概要集，II, pp. 189 - 190, 1980.
- (7) 星 清，山岡 勲：非線形流出系のパラメータ同定 - 感度解析と成分回帰分析の併用 -，昭和55年度土木学会北海道支部論文報告集第37号，1981.
- (8) Li, R. M., Simons, D. B. and Stevens, M. A.; Nonlinear Kinematic Wave Approximation for Water Routing, Water Resources Research, Vol. 11, No. 2, pp. 245 - 252, 1975.