

II-19 貯留関数法における確率応答に関する研究

北海道大学工学部 正 員 藤田睦博
 同 上 正 員 山岡 勲
 同 上 学生員 ○羽山芳則

1. はじめに

貯留関数法は、流出現象の非線形性を容易にモデル内に取り入れることができ、実績もある方法で、広く実際に用いられているものである。本研究は、貯留関数法を用いて、空間的に均一だが時間的に不規則に変動する降雨とその流出量の確率応答特性を吟味しようとするものである。ここでは、直接、降雨量に乱数を発生させた数値実験の結果と、Brasらの近似理論¹⁾を用いて導びいた確率微分方程式の解を比較検討した。

2. 理 論

一定勾配の斜面上の流れの連続の式、運動の式として次式を与える。

$$\partial y / \partial t + \partial q / \partial x = r(t) \quad \dots (1) \quad q = a y^m \quad \dots (2)$$

ここで、 y : 水深、 q : 流出量、 r : 降雨量、 a, m : 流域定数

藤田は、Kinematic waveモデルをlumpingすることにより、次の貯留関数を提案している。²⁾

$$dS/dT + Q = R(T) \quad S = KQ^{1/m} \quad K = m/(m+1) \quad \dots (3)$$

ここで、 S : 貯留量、 Q : 流出量、 R : 降雨量

但し、 S, Q, R, T は無次元量で、次元のある量と次の関係がある。

$$s = s^* S \quad r = r^* R \quad q = q^* Q \quad t = t^* T \quad \dots (4)$$

ここで、小文字量は、通常の次元をもつ量である。 $*$ 印の量は、規準化量で次に与える。

$$r^* = \bar{r} \quad t^* = (l \cdot \bar{r}^{1-m} / a)^{1/m} \quad q^* = a(\bar{r} \cdot t^*)^m \quad s^* = \bar{r} \cdot l \cdot t^* \quad \dots (5)$$

l : 斜面長 $\bar{r}$: 平均有効雨量

m は、 $1 \leq m \leq 2$ の範囲の値をとるものとする。これらの基礎式より、貯留量、流出量の確率応答特性を吟味するのであるが、 $m = 1$ の場合、(3) 式が線形となり、諸量を解析的に解くことができる。

2.1 $m = 1$ の場合 (線形系)

(3) 式より、 S, Q が解かれ、結局、次のような諸量が求められる。

但し、ここで、降雨 $R(T)$ は、互いに独立な白色雑音で次のような統計量をもつ。 $\delta(\tau)$: デルタ関数

$$E\{R(T)\} = \bar{R} = 1, \text{Var}\{R(T)\} = \sigma_R^2, \quad C_{RR}(\tau) = \sigma_R^2 \delta(\tau) \quad \dots (6)$$

平均値

$$E\{Q\} = (1 - \exp(-T/K)) \quad \dots (7) \quad E\{S\} = K(1 - \exp(-T/K)) \quad \dots (8)$$

自己相関関数・分散

$$C_{QQ}(T_1, \tau) = \sigma_R^2 \{ \exp(-\tau/K) - \exp(-(2T_1 + \tau)/K) \} / (2K) \quad \dots (9)$$

但し、ここで、 $\tau = T_2 - T_1$ であり、 $\tau = 0$ とすると分散が得られる。

$$\text{Var}\{Q\} = \sigma_R^2 (1 - \exp(-2T/K)) / (2K) \quad \dots (10)$$

$$\text{同様に} \quad C_{SS}(T_1, \tau) = (K\sigma_R^2/2) \{ \exp(-\tau/K) - \exp(-(2T_1 + \tau)/K) \} \quad \dots (11)$$

$$\text{Var}\{S\} = K\sigma_R^2 (1 - \exp(-2T/K)) / 2 \quad \dots (12)$$

2.2 $m \neq 1$ の場合 (非線形)

この場合、(3) 式は、非線形となり、解析解を求めることは困難である。

一方、Brasらは、べき乗型の確率変数 $X_T^m = (\bar{X}_T + \tilde{X}_T)^m$ を

$$\tilde{X}_T^m = \alpha \bar{X}_T + \beta \tilde{X}_T \quad \dots (13)$$

と、近似仮定して、両者の誤差自乗平均が最小となるときの α 、 β を次式のように提案している。

但し、 X_T は独立な正規性の雑音として、

$$E\{X_T\} = \bar{X}_T \quad E\{\tilde{X}_T\} = 0 \quad E\{\tilde{X}_T^2\} = \sigma_X^2 \quad \dots (14)$$

を満足している。

$$\alpha = \bar{X}_T^{m-1} \cdot \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{i=0}^{2k-1} (m-i) \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1)}{(2k)!} \cdot V_T^{2k} \right\} \quad \dots (15)$$

$$\beta = \bar{X}_T^{m-1} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{i=0}^{2k-2} (m-i) \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1)}{(2k-1)!} \cdot V_T^{2k-2} \right\} \quad \dots (16)$$

V_T は、変動係数で $V_T = \sigma_X / \bar{X}_T$

但し、図-1、図-2は、 $\alpha/\bar{X}_T^{m-1} \sim V_T$ 、 $\beta/\bar{X}_T^{m-1} \sim V_T$ の関係を示したものであるが、いずれも $V_T > 0.5$ の範囲で n を大きくとっても収束せず、(13)式の仮定は、適用限界が $V_T \leq 0.4$ に限られるが、この限界内において、貯留量、流出量の平均、分散を求める式を導びくことができる。以下に示すのが、その手法である。

確率微分方程式

(3)式において、 $S = S_T = \bar{S}_T + \tilde{S}_T$ 、 $R = R_T = \bar{R}_T + \tilde{R}_T$ とおくと(13)式より、

$$\begin{aligned} d(\bar{S}_T + \tilde{S}_T)/dT &= (\bar{R}_T + \tilde{R}_T) - (1/K)^m (\bar{S}_T + \tilde{S}_T)^m \\ &= (\bar{R}_T + \tilde{R}_T) - (1/K)^m (\alpha \bar{S}_T + \beta \tilde{S}_T) \quad \dots (17) \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{S}_T$ 、 $\bar{R}_T$ は、貯留量、降雨量の平均値、 $\tilde{S}_T$ 、 $\tilde{R}_T$ は、その変動量であり、

$$E\{\tilde{S}_T\} = 0 \quad E\{\tilde{S}_T^2\} = \sigma_{S \cdot T}^2 \quad E\{\tilde{R}_T\} = 0 \quad E\{\tilde{R}_T^2\} = \sigma_R^2 \quad \dots (18)$$

(17)式の両辺の期待値をとると、

$$d\bar{S}_T/dT = \bar{R}_T - (1/K)^m \alpha \bar{S}_T \quad \dots (19)$$

(17)式から(19)式の辺々をひいて、

$$d\tilde{S}_T/dT = \tilde{R}_T - (1/K)^m \beta \tilde{S}_T \quad \dots (20)$$

$\beta = \text{const}$ として(20)式を解き、両辺を2乗して期待値をとると、貯留量の分散の式が得られる。

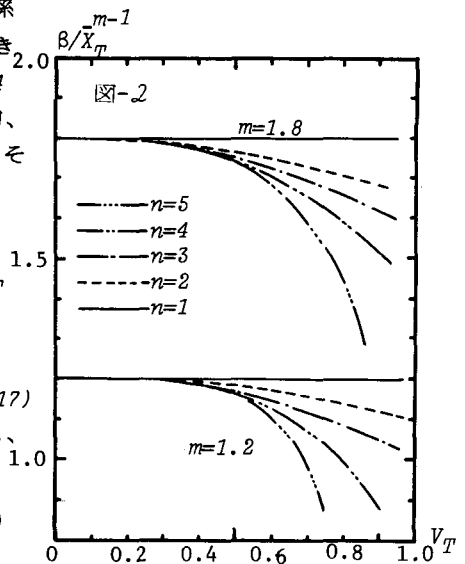
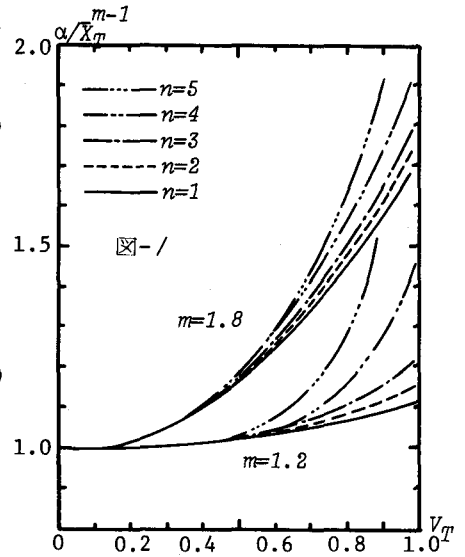
$$E\{\tilde{S}_T^2\} = \sigma_{S \cdot T}^2 = \exp\{-2\int_0^T (1/K)^m \beta d\tau_1\} \cdot \left(\int_0^T \exp\{2\int_0^{\tau_1} (1/K)^m \beta d\tau_2\} \cdot \sigma_R^2 d\tau_2 \right) \quad \dots (21)$$

$\beta \neq \text{const}$ である場合を考え β を時間の関数として(21)式の両辺を T で微分して

$$\begin{aligned} d\sigma_{S \cdot T}^2/dT &= -2(1/K)^m \beta \cdot \exp\{-2\int_0^T (1/K)^m \beta d\tau_1\} \cdot \left(\int_0^T \exp\{2\int_0^{\tau_1} (1/K)^m \beta d\tau_2\} \cdot \sigma_R^2 d\tau_2 \right) \\ &\quad + \exp\{-2\int_0^T (1/K)^m \beta d\tau_1\} \cdot \exp\{2\int_0^T (1/K)^m \beta d\tau_2\} \cdot \sigma_R^2 \quad \dots (22) \end{aligned}$$

(22)式と、(21)式の両辺に $2(1/K)^m \beta$ を乗じたものを辺々加えると、結局、次式を得る。

$$d\sigma_{S \cdot T}^2/dT + 2(1/K)^m \beta \sigma_{S \cdot T}^2 = \sigma_R^2 \quad \dots (23)$$



この式中の β には、 $\bar{S}_T$ を含むので、(19) 式より、

$$d\bar{S}_T/dT + (1/K)^m \alpha \bar{S}_T = \bar{R} \quad \dots (24)$$

を連立させる。

ここで、(15)、(16) 式中の $\{ \}$ の採用項数を一項、二項とすることによってそれぞれ第一近似式、第二近似式として区別する。

第一近似式

$$\begin{cases} d\sigma_{S \cdot T1}^2/dT + 2(1/K)^m \bar{S}_{T1}^{m-1} \sigma_{S \cdot T1}^2 = \sigma_R^2 \\ d\bar{S}_{T1}/dT + (1/K)^m \bar{S}_{T1}^m = \bar{R} \end{cases} \quad \dots (25)$$

第二近似式

$$\begin{cases} d\sigma_{S \cdot T2}^2/dT + 2(1/K)^m \bar{S}_{T2}^{m-1} \{ m + \\ m(m-1)(m-2)/2 \cdot \sigma_{S \cdot T2}^2 / \bar{S}_{T2}^2 \} \cdot \sigma_{S \cdot T2}^2 = \sigma_R^2 \\ d\bar{S}_{T2}/dT + (1/K)^m \bar{S}_{T2}^m \{ 1 + m(m-1)/2 \cdot \sigma_{S \cdot T2}^2 / \bar{S}_{T2}^2 \} = \bar{R} \end{cases} \quad \dots (26)$$

同様に、流出量についても考えると、

$$\begin{aligned} (3) \text{ 式より、} \quad \bar{Q}_T + \tilde{Q}_T &= (1/K)^m (\bar{S}_T + \tilde{S}_T)^m \\ &= (1/K)^m (\alpha \bar{S}_T + \beta \tilde{S}_T) \end{aligned} \quad \dots (27)$$

$$\text{両辺の期待値をとると、} \quad \bar{Q}_T = (1/K)^m \alpha \bar{S}_T \quad \dots (28)$$

$$(27) \text{ の両辺を 2 乗して、期待値をとると } \quad \bar{Q}_T^2 + E\{\tilde{Q}_T^2\} = (1/K)^{2m} (\alpha^2 \bar{S}_T^2 + \beta^2 E\{\tilde{S}_T^2\}) \quad \dots (29)$$

この式から、(28) 式を 2 乗したものを辺々ひくと、次式が得られる。

$$E\{\tilde{Q}_T^2\} = \sigma_{Q \cdot T}^2 = (1/K)^{2m} \beta^2 \sigma_{S \cdot T}^2 \quad \dots (30)$$

(28)、(30) 式より、流出量の平均、分散を得ることができる。貯留量の場合と同様に、これを第一近似式、第二近似式に分けると、次のようになる。

$$\begin{cases} \sigma_{Q \cdot T1}^2 = (1/K)^{2m} \bar{S}_{T1}^{2m-2} \sigma_{S \cdot T1}^2 \\ \bar{Q}_{T1} = (1/K)^m \bar{S}_{T1}^m \end{cases} \quad \dots (31)$$

$$\begin{cases} \sigma_{Q \cdot T2}^2 = (1/K)^{2m} \bar{S}_{T2}^{2m-2} \cdot \{ m + \\ m(m-1)(m-2)/2 \cdot \sigma_{S \cdot T2}^2 / \bar{S}_{T2}^2 \} \cdot \sigma_{S \cdot T2}^2 \\ \bar{Q}_{T2} = (1/K)^m \bar{S}_{T2}^m \{ 1 + m(m-1)/2 \cdot \sigma_{S \cdot T2}^2 / \bar{S}_{T2}^2 \} \end{cases} \quad \dots (32)$$

なお、(25)(26) 式、(31)(32) 式において、添字の 1 は 第一近似値、添字の 2 は 第二近似値を示している。(25)(26)(31)(32) 式を解くと、過渡状態の平均、分散がわかる。次に定常状態の平均、分散について検討する。(定常状態については、添字の T をとり、過渡状態と区別する。)

(25) 式において、微分項を 0 とおくと、

$$\bar{S}_1 = K \quad \dots (33)$$

$$\sigma_{S1}^2 = K^m \sigma_R^2 / (2\beta) \quad \dots (34)$$

したがって、(31) 式より、

$$\bar{Q}_1 = \bar{R} \quad \dots (35) \quad \sigma_{Q1}^2 = \sigma_R^2 \beta / (2K^m) \quad \dots (36)$$

3. 数値計算の結果及びその検討

図-3～図-6は、降雨量 $R(T)$ の分散 σ_R^2 を0.01として、 m の値を変化させて、貯留量、流出量の平均、分散(第一近似解)を示したものである。 $m=1$ のときは、直接、(7)(8)(10)(12)式の値を示している。第二近似解についても同様の計算を行なったが、第一近似解と一致した結果を得た。ここで、注目されることは、貯留量の分散が m の値が増加するにともないピークをもつようになることである(図-4参照)。図-6を子細に観察すると、 m の値が増加するにつれて $T=1$ の近傍に若干のピークを見ることができ、貯留量の分散に比較すると、顕著でない。藤田は、(1)(2)式を、(4)(5)式の規準化量を用いて無次元化した式

$$\partial Y / \partial T + \partial Y^m / \partial X = R(T) \quad 0 \leq X \leq 1 \quad \dots(37)$$

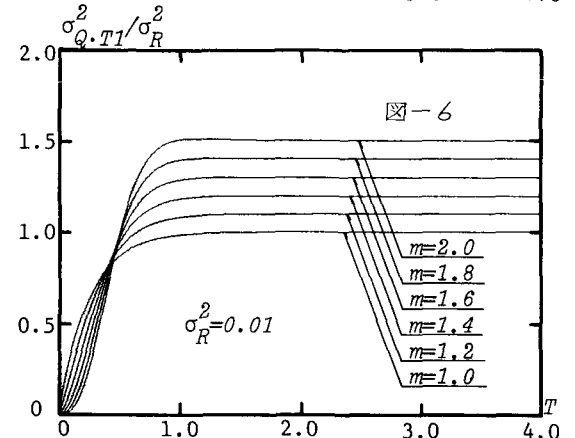
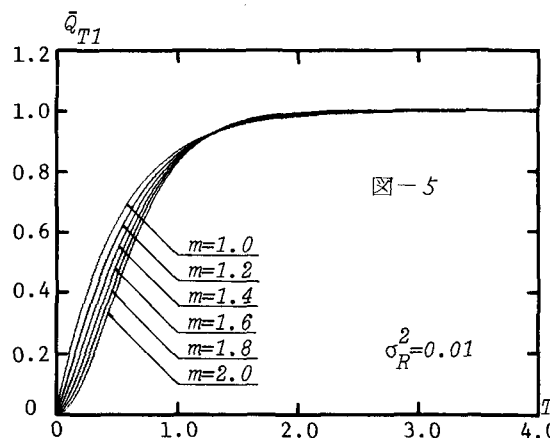
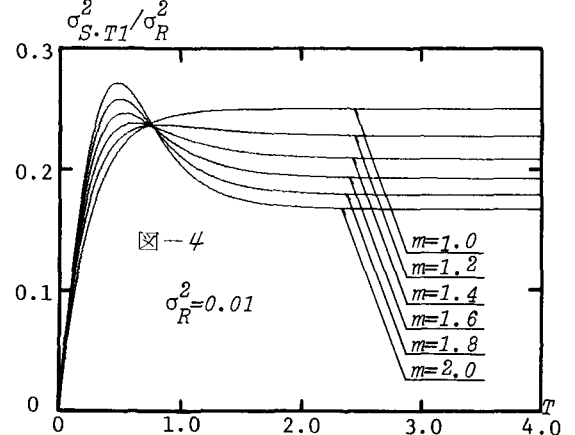
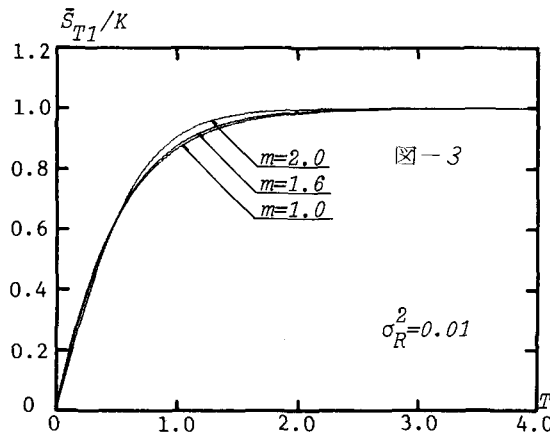
の $R(T)$ に、直接、平均1、分散 σ_R^2 の独立な白色雑音を与えて、(37)式の解 $Y(X, T)$ を求め、 $Y(X, T)$ の時刻 T 毎のアンサンブル平均として定義した水深 Y の分散 σ_Y^2 にも、 $T=1$ (到達時間に相当している)の近傍で、ピークをもつことを確かめている³⁾(この手法で各統計量を求める方法をここでは、シミュレーション法と呼び、(25)(26)式より統計量を求める場合と区別する。その具体的な手法の説明については後述する)。なお、水深 Y と貯留量 S の間には、次のような関係がある。

$$S(T) = \int_0^1 Y(X, T) dX \quad \dots(38)$$

Y, S ともに明瞭なピークが見られることは興味深い。また、貯留量の分散は、定常状態において、 m の値が増加するにともない減少しており、水深 Y の分散も同様の傾向になっている。一方、流出量の分散 σ_Q^2 は、定常状態において m の値が増加するにつれて増加し、 σ_S^2 とは逆の傾向となっている。このことは、(34)(36)式を書きなおした次の式からもわかる。

$$\sigma_{S1}^2 / \sigma_R^2 = 1 / \{2(m+1)\} \quad \dots(39)$$

$$\sigma_{Q1}^2 / \sigma_R^2 = (m+1) / 2 \quad \dots(40)$$



一方、貯留量、流出量の平均値についてみると、 $\bar{S}_{T1}/K$ は m の値によってほとんど変化せず、 $\bar{Q}_{T1}$ は $T < 1$ の範囲で m の値によって変化している。次に (25) (31) 式の解と、(3) 式の $R(T)$ に直接、白色雑音を与えて求めたシミュレーション法の解を比較してみよう。図-7~図-10は、 $m=2.0$ 、 $\sigma_R^2=0.01$ の例を示すが、両者の解はほとんど一致していると言える。

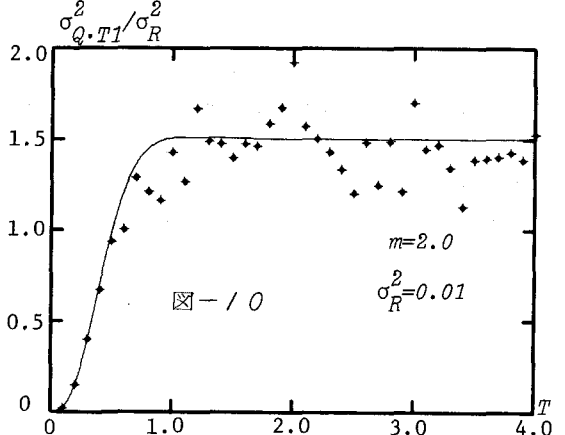
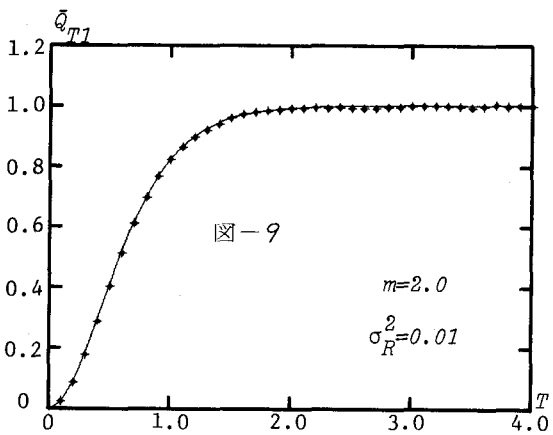
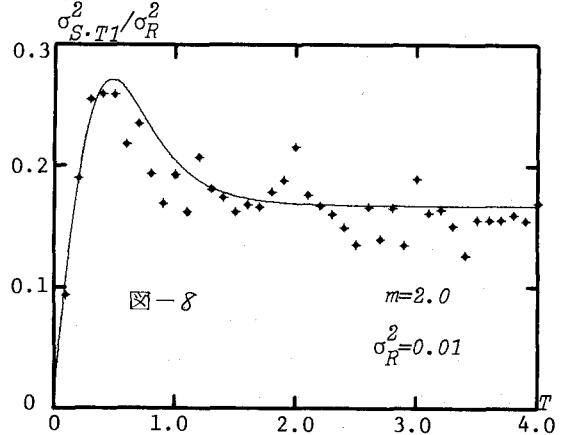
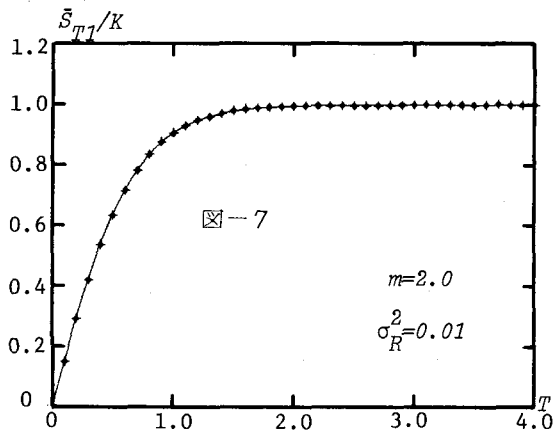
図-11は、シミュレーション法の手法を説明したもので、 $R(T)$ に直接、白色雑音を与えて (3) 式又は (37) 式を解いて、 $S(T)$ 又は $Y(X,T)$ を求め、各時刻毎にアンサンブル平均として、平均、分散を求めている。ここでは、 $N=500$ とした。

図-12、図-13は、それぞれ $\sigma_R^2=0.01$ のときのシミュレーション法により求めた貯留量 S の標準化した3次、4次モーメントを示したものである。3次モーメントは0、4次モーメントは3近傍を変動しており、Brasらは正規性の雑音であるとの仮定のもとに、(15) (16) 式を導びいたが、その仮定を満足している。

次に $S(T)$ の変動係数について検討する。 $m=1$ の場合、(8) (12) 式より、

$$(\sigma_{ST}/\bar{S}_T)/\sigma_R = \sqrt{1 - \exp(-4T)} / (1 - \exp(-2T)) \dots (41)$$

降雨量 $R(T)$ の平均値が1であることを考慮すると、 R の変動係数は σ_R に等しくなるので、(41) 式の左辺は貯留量、降雨量の変動係数の比を示すものと解釈できる。図-14の鎖線は(41)式をプロットしたものである。図に示すように貯留量の変動係数は $T=0$ で無限大となる。 $m \neq 1$ の場合については、基本方程式が非線形となり解析的に解を得ることができないが、 $m=1$ の場合と同様に $T=0$ で無限大となるものと思われる(第一近似解)。したがって、 $T \geq 0$ の全ての区間で(15) (16) 式の適用範囲である $V_T \leq 0.4$ を満足することはできない。しかしながら、シミュレーション法と、第一、第二近似解による貯留量の変動係数を比較したところ、都合の悪い結果は得られなかった。例えば、図-14



は $m = 1.6$, $\sigma_R^2 = 0.04$ として、シミュレーション法(※印)と 第一近似解(実線)、第二近似解(破線)を比較したものである。定常状態になると、第一、第二近似解は一致しているが、 T の小さい範囲で差が現われている。シミュレーション法による値とは第二近似解が適合している。

以上においては、無次元表示した貯留量、流出量の平均、分散を求めたが、これらの結果を実際に用いるには、(4)(5)式を考慮して、次元のある量との間には次の関係がある。

$$\left\{ \begin{array}{l} E\{r\} = \bar{r} \cdot \bar{R} \quad \sigma_r^2 = \bar{r}^2 \cdot \sigma_R^2 \\ E\{s\} = (l^{1+m} \cdot \bar{r}/a)^{1/m} \cdot \bar{S} \\ \sigma_s^2 = (l^{1+m} \cdot \bar{r}/a)^{2/m} \cdot \sigma_S^2 \\ E\{q\} = l \cdot \bar{r} \cdot \bar{Q} \quad \sigma_q^2 = l^2 \cdot \bar{r}^2 \cdot \sigma_Q^2 \end{array} \right. \quad \dots (42)$$

(42)式を用いることにより、雨量の測定値に含まれる誤差(不確定性)がどのように流出量に影響を与えているかを検討することができる。

本研究は文部省科学研究費補助金(一般研究C 代表 藤田睦博)を受けたものである。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Bras, R.L. and Georgakakos, K.P.: Real time non-linear filtering techniques in streamflow forecasting: A statistical linearization approach, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics 1980
- 2) 藤田睦博: 斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究、土木学会論文報告集投稿中
- 3) Fujita, M., Michiguchi, T. and Yamaoka, I.: Stochastic response in a nonlinear run-off system, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics 1980

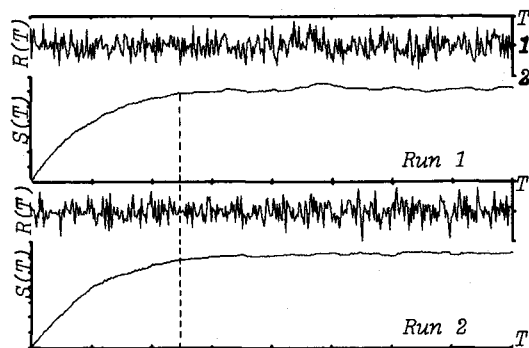


図-1 / 1

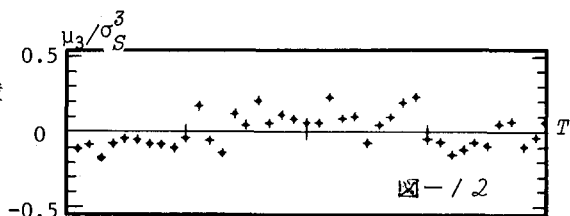
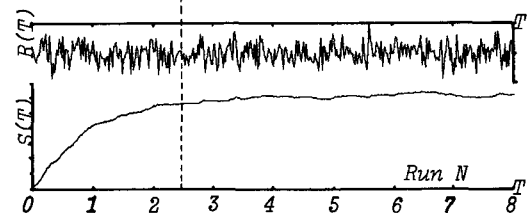


図-1 / 2

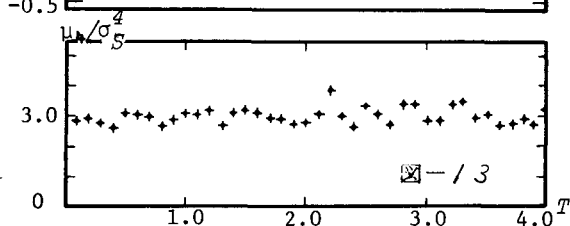


図-1 / 3

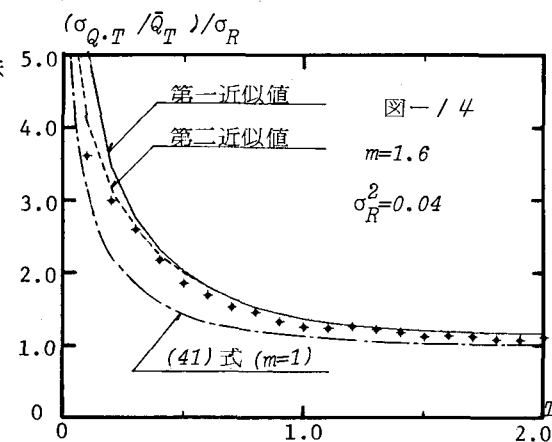


図-1 / 4