

II-17 蛇行流路内の交互砂州上を流れる流れ

北海道大学工学部 正 員 長谷川和義
同 上 正 員 山岡 勲
同 上 学生員 ◎岡地 勇治

1. はじめに

交互砂州上の流れの解析は、実際の治水技術の上でも、また、理論上においてもきわめて重要であつて、これまでも、様々な角度から研究が続けられてきた。このうち、流れを力学的にとりあつた研究も多いが、これらは三種類に分類できるように思われる。すなわち、その一は、直線流路における交互砂州の発生理論の中であつかわれているものである。これらの研究は、河床の不安定性の解析を主眼としているため、河床形状に微小な波高をもつ調和波を想定することが多い。これはさらに、ポテンシャル流モデルとせん断流モデルに細分される。その二は、曲線流路内の河床不安定を解析したものであり、やはり微小振幅の河床波上の流れがあつかわれている。その三は、有限振幅をもつ河床波上の流れを解析したものであり、大部分が蛇行水路を対象としていて、必ずしも砂州の存在する場合のみがあつかわれているわけでない。しかし、流路の蛇行にともなつて生ずる河床の洗掘形状が、交互砂州と類似の働きをするため、基本的には砂州上の流れの解析と異ならないものになっている。これらのうち、Gottlieb¹は、弱い蛇行流路内の流れに関して三次元解析をおこない河床形状の理論解を導いている。Engelund²は、同じく蛇行流路内の平衡河床の理論解析を主目的として交互の起伏をもつ河床上の蛇行流に関する二次元解を導いている。

著者ら³は、蛇行流路内に砂州が存在する場合の河床を、単純な関数によって表わし流れを浅水流モデルによって解析し、平面的な流速の偏倚の大小から、蛇行の発達条件を示した。本研究は、直線および蛇行流路内の十分に発達した砂州上の流れを解析しようとするものであり、第三の分類に属するものである。上述のように従来の研究は、流れそのものに注目するというよりも、その解を利用して河床変形や蛇行の発達を論ずることが多かったが、ここでは現実の複雑な形状上の流れを解析し、その性質を調べようとするものである。しかし、用いる方程式は、線形化された二次元浅水流式であり現実の三次元的な流れを表現するのには、自から限界があるものと考えられ、実測流速との比較によって、これらの考察をあわせておこなうことにする。

2. 流れの基礎方程式

2-1 図-1のような蛇行水路に対し、直交曲線座標系を図

$$U \frac{\partial U}{\partial \tilde{s}} + \frac{\tilde{r} + \tilde{n}}{\tilde{r}} V \frac{\partial U}{\partial \tilde{n}} + \frac{UV}{\tilde{r}} = -g \frac{\partial \Xi}{\partial \tilde{s}} - \frac{\tilde{r} + \tilde{n}}{\tilde{r}} \frac{f U^2}{2H} \quad (1)$$

中のように定義すると、流れの定常二次元方程式は、(1)~(3)

式のように表わされる。ここに U, V : それぞれ流れの $\tilde{s}$ および

$$U \frac{\partial V}{\partial \tilde{s}} + \frac{\tilde{r} + \tilde{n}}{\tilde{r}} V \frac{\partial V}{\partial \tilde{n}} - \frac{U^2}{\tilde{r}} = -g \frac{\tilde{r} + \tilde{n}}{\tilde{r}} \frac{\partial \Xi}{\partial \tilde{n}} - \frac{\tilde{r} + \tilde{n}}{\tilde{r}} \frac{f' UV}{2H} \quad (2)$$

$\tilde{n}$ 軸方向の流速成分, $\tilde{r}$: $\tilde{s}$ 軸に

そつて測つた曲率半径, H : 任意点における水深, Ξ : 任意の基準

$$\frac{\partial (HU)}{\partial \tilde{s}} + \frac{\tilde{r} + \tilde{n}}{\tilde{r}} \frac{\partial (HV)}{\partial \tilde{n}} + \frac{HV}{\tilde{r}} = 0 \quad (3)$$

線から測つた水位, f, f' : それぞれ $\tilde{s}$ および $\tilde{n}$ 軸方向の流れに対する摩擦係数, g : 重力加速度。

いま、(1)~(3)式に対して以下のおきかえをおこなう。 $U = U_0(1+u)$, $V = U_0v$, $\Xi = \Xi_0 + H_0\xi$, $H = H_0(1+\xi+\eta)$, $\tilde{r} = H_0r$, $\tilde{s} = H_0s$, $\tilde{n} = \tilde{B}/2 \cdot n$, $F = U_0/\sqrt{gH_0}$, $\epsilon = 2H_0/\tilde{B}$ ただし、 U_0 : 流れの断面全体に対する平均流速, H_0 : 同じく平均水深, Ξ_0 : 平均水位, ξ, η : それぞれ水面および河床高の平均高度からの変位に関する無次元表示, $\tilde{B}$: 流路幅である。また、(1)式における等流関係式 $0 = -\partial(g\Xi_0)/\partial \tilde{s} - (\tilde{r} + \tilde{n})/\tilde{r} f U_0^2/2H_0$ を(1)式から差し引き、その上で $(u, v, \xi, \eta, n/\epsilon r) \ll 1$

とみなして、高次の微小項を省略すると、線形化された基礎式は、(4)～(6)式のように整理される。

2-2 本研究の解析対象は、著者ら⁴によって別途報告されている、直線ならびに蛇行水路内の砂州上の流れであって、蛇行流路の平面形状は、

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \cos \omega s, \quad \frac{1}{R} = \omega \frac{\pi}{\delta} \quad (7)$$

なる関数で表わされる。ここに $\omega = 2\pi/L$, $L = \tilde{L}/H_0$, $\tilde{L}$: 蛇行波長, $R = \tilde{R}/H_0$, $\tilde{R}$: 最小曲率半径。

一方、砂州をともなう河床形状は、 η の実測値を s, n に関して二重フーリエ級数に展開することによって、(8)式にて与えられる。ここに、 i, j は、それぞれ n および s 方向について考えた河床起伏の波数であり、基本周期は n 方向につき4 (川幅の2倍)、 s 方向につき L である。 A_{sij}^k など、フーリエ係数であり、 i, j の波数をもつ正弦(余弦)波の振幅を表わす。

蛇行流路においては、流下距離が n のとり方によって変わるので、本来(8)式のままで表現が不十分であるが、 $n/r \ll 1$ の假定によって、同式をそのまま使用することにする。また、直線流路の s 軸の原点は任意にとり得るので、左岸

に最深点が表われる位置にとることとする。

$$\eta = \sum_{i=1,3,5\ldots} \sum_{j=0,1,2\ldots} \sin \frac{i\pi}{2} n (A_{sij}^1 \sin j\omega s + A_{cij}^1 \cos j\omega s) + \sum_{i=0,2,4\ldots} \sum_{j=0,1,2\ldots} \cos \frac{i\pi}{2} n (A_{sij}^2 \sin j\omega s + A_{cij}^2 \cos j\omega s) \quad (8)$$

3. 基礎式の解

方程式(4)～(6)に対して、(7), (8)式が与えられると、未知数は u, v, ξ の三つとなるので、これらを解くことが可能になる。しかし、厳密解を求めることは非常に難しいので、ここでは近似解法の一つであるGalerkin法による結果を示すことにする。いまの問題の場合、現象が周期的であること、 $n = \pm 1$ において $v = 0$ となることを念頭におくと、近似解関数を(9)～(11)式にて与えるのが妥当であろう。

ただし、 a_{ij}^1 など、未知の定数であり、上付の添字は文字の区別を表わすとともに第二近似の性格を示す。(9)～(11)式を(7), (8)式とともに(4)～(6)式の左辺に代入し(残差となる)、 $\sin(i\pi n/2)$, $\cos(i\pi n/2)$,

$$u = \sum_{i=1,3,5\ldots} \sum_{j=0,1,2\ldots} \sin \frac{i\pi}{2} n (a_{ij}^1 \sin j\omega s + b_{ij}^1 \cos j\omega s) + \sum_{i=0,2,4\ldots} \sum_{j=0,1,2\ldots} \cos \frac{i\pi}{2} n (a_{ij}^2 \sin j\omega s + b_{ij}^2 \cos j\omega s) \quad (9)$$

$$v = \sum_{i=1,3,5\ldots} \sum_{j=0,1,2\ldots} \cos \frac{i\pi}{2} n (c_{ij}^1 \sin j\omega s + d_{ij}^1 \cos j\omega s) + \sum_{i=0,2,4\ldots} \sum_{j=0,1,2\ldots} \sin \frac{i\pi}{2} n (c_{ij}^2 \sin j\omega s + d_{ij}^2 \cos j\omega s) \quad (10)$$

$$\xi = \sum_{i=1,3,5\ldots} \sum_{j=0,1,2\ldots} \sin \frac{i\pi}{2} n (e_{ij}^1 \sin j\omega s + f_{ij}^1 \cos j\omega s) + \sum_{i=0,2,4\ldots} \sum_{j=0,1,2\ldots} \cos \frac{i\pi}{2} n (e_{ij}^2 \sin j\omega s + f_{ij}^2 \cos j\omega s) \quad (11)$$

$\sin(2\pi j s/L)$, $\cos(2\pi j s/L)$ をそれぞれ乗じて、 $n = (-1, 1)$, $s = (-L/2, L/2)$ の範囲で積分したものを0とおく(直交条件)と、未知係数に関して(12)式の連立方程式を得る。同式上付の添字 k は1および2をとり、6元の連立式が二通り存在することを示す。また、 δ_{1j} , δ_{1k}

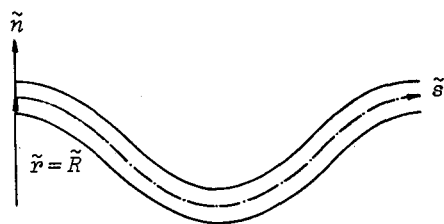
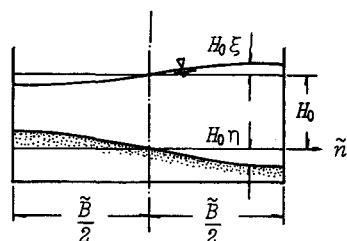


図-1



$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial \xi}{\partial s} + f[u - \frac{1}{2}(\xi + \eta)] = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\epsilon}{F^2} \frac{\partial \xi}{\partial s} - \frac{1}{r} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial s} + \epsilon \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial \eta}{\partial s} = 0 \quad (6)$$

はクローネッカーδを表わす。(12)式の解は、(13)～(20)式にて与えられる。

$$\begin{bmatrix} j\omega & f & 0 & 0 & \frac{j\omega}{F^2} & -\frac{f}{2} \\ f & -j\omega & 0 & 0 & -\frac{f}{2} & -\frac{j\omega}{F^2} \\ 0 & 0 & j\omega & 0 & 0 & -(-1)^i \frac{i\pi\epsilon}{2F^2} \\ 0 & 0 & 0 & j\omega & (-1)^i \frac{i\pi\epsilon}{2F^2} & 0 \\ j\omega & 0 & 0 & (-1)^i \frac{i\pi\epsilon}{2} & j\omega & 0 \\ 0 & j\omega & -(-1)^i \frac{i\pi\epsilon}{2} & 0 & 0 & j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ij}^k \\ b_{ij}^k \\ c_{ij}^k \\ d_{ij}^k \\ e_{ij}^k \\ f_{ij}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{2} \times A_{sij}^k \\ \frac{f}{2} \times A_{sij}^k \\ -\frac{(-1)^{(i+1)/2}}{i} \times \delta_{1j} \times \delta_{1k} \times \frac{4}{\pi R} \\ 0 \\ -j\omega \times A_{sij}^k \\ -j\omega \times A_{sij}^k \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$a_{ij}^k = a_{ij}^k / \Delta, \quad b_{ij}^k = b_{ij}^k / \Delta, \quad c_{ij}^k = c_{ij}^k / \Delta, \quad d_{ij}^k = d_{ij}^k / \Delta, \quad e_{ij}^k = e_{ij}^k / \Delta, \quad f_{ij}^k = f_{ij}^k / \Delta, \quad (13)$$

$$\Delta = 2(j\omega)^2 [4(F^2-1)(j\omega)^2 - (i\pi\epsilon)^2] + 2f^2 [6F^2(j\omega)^2 - (i\pi\epsilon)^2]^2 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} a_{ij}^k &= A_{sij}^k \times [32(F^2-1)(j\omega)^6 - \{8(j\omega)^4 + 6(fF)^2(j\omega)^2 - f^2(i\pi\epsilon)^2\}(i\pi\epsilon)^2] \\ &\quad - A_{sij}^k \times f(j\omega) [4F^2(j\omega)^2 - (i\pi\epsilon)^2] [12(j\omega)^2 + (i\pi\epsilon)^2] \\ &\quad - (-1)^{(i+1)/2} \delta_{1j} \delta_{1k} / i \times 4/\pi R \times 2f(F^2+2)(j\omega)(-1)^i (i\pi\epsilon) [4F^2(j\omega)^2 - (i\pi\epsilon)^2] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} b_{ij}^k &= A_{sij}^k \times f(j\omega) [4F^2(j\omega)^2 - (i\pi\epsilon)^2] [12(j\omega)^2 + (i\pi\epsilon)^2] \\ &\quad + A_{sij}^k \times [32(F^2-1)(j\omega)^6 - \{8(j\omega)^4 + 6(fF)^2(j\omega)^2 - f^2(i\pi\epsilon)^2\}(i\pi\epsilon)^2] \\ &\quad + (-1)^{(i+1)/2} \delta_{1j} \delta_{1k} / i \times 4/\pi R \times (-1)^i (i\pi\epsilon) [4(j\omega)^2 \{4(F^2-1)(j\omega)^2 - 3f^2F^4\} + \{2(fF)^2 - 4(j\omega)^2\}(i\pi\epsilon)^2] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} c_{ij}^k &= -A_{sij}^k \times 2f(j\omega)(-1)^i (i\pi\epsilon) [12(j\omega)^2 + (i\pi\epsilon)^2] \\ &\quad - A_{sij}^k \times (j\omega)(-1)^i (i\pi\epsilon) [16(F^2-1)(j\omega)^4 + 36(fF)^2 - \{4(j\omega)^2 + 6f^2\}(i\pi\epsilon)^2] \\ &\quad - (-1)^{(i+1)/2} \delta_{1j} \delta_{1k} / i \times 4/\pi R \times (j\omega) [(j\omega)^2 \{32(F^2-1)^2(j\omega)^2 + 72f^2F^4\} - \{8(F^2-1)(j\omega)^2 + 12(fF)^2\}] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} d_{ij}^k &= -A_{sij}^k \times (j\omega)(-1)^i (i\pi\epsilon) [16(F^2-1)(j\omega)^4 + 36(fF)^2 - \{4(j\omega)^2 + 6f^2\}(i\pi\epsilon)^2] \\ &\quad + A_{sij}^k \times 2f(j\omega)(-1)^i (i\pi\epsilon) [12(j\omega)^2 + (i\pi\epsilon)^2] - (-1)^{(i+1)/2} \delta_{1j} \delta_{1k} / i \times 4/\pi R \times 4f(F^2+2)(j\omega)^2 (i\pi\epsilon)^2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} e_{ij}^k &= -A_{sij}^k \times F^2(j\omega)^2 [32(F^2-1)(j\omega)^4 + 72(fF)^2(j\omega)^2 - \{8(j\omega)^2 + 12f^2\}(i\pi\epsilon)^2] \\ &\quad + A_{sij}^k \times 4fF^2(j\omega)^3 [12(j\omega)^2 + (i\pi\epsilon)^2] + (-1)^{(i+1)/2} \delta_{1j} \delta_{1k} / i \times 4/\pi R \times 8fF^2(F^2+2)(j\omega)^3 (-1)^i (i\pi\epsilon) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f_{ij}^k &= -A_{sij}^k \times 4fF^2(j\omega)^3 [12(j\omega)^2 + (i\pi\epsilon)^2] \\ &\quad - A_{sij}^k \times F^2(j\omega)^2 [32(F^2-1)(j\omega)^4 + 72(fF)^2(j\omega)^2 - \{8(j\omega)^2 + 12f^2\}(i\pi\epsilon)^2] \\ &\quad - (-1)^{(i+1)/2} \delta_{1j} \delta_{1k} / i \times 4/\pi R \times F^2(-1)^i (i\pi\epsilon) [(j\omega)^2 \{16(F^2-1)(j\omega)^2 + 24(fF)^2\} - 4\{(j\omega)^2 + f^2\}(i\pi\epsilon)^2] \end{aligned} \quad (20)$$

上記の各係数を(9)～(11)式にもどすと、 u 、 v 、 ξ の近似解が定まることになる。これらの式において、 $1/R=0$ とおけば、直線水路内の砂州上の流れを表わすものとなる。

4. 実験の概要

実施した直線および蛇行水路の実験の詳細は、文献4に示すとおりであるが、観測区間における河床の概略の様子と、解析に要する水理量をそれぞれ図-2,5および表-1に掲げる。表から明らかなように

蛇行水路の水路幅・曲率半径比は最大で $\tilde{B}/\tilde{R}=0.449$ に達しており、実施蛇行実験は必ずしも弱蛇行状態のものとはいえない。

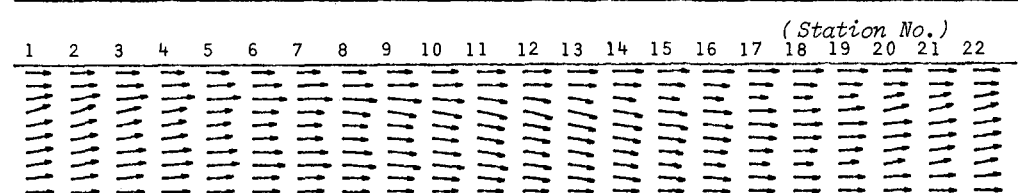
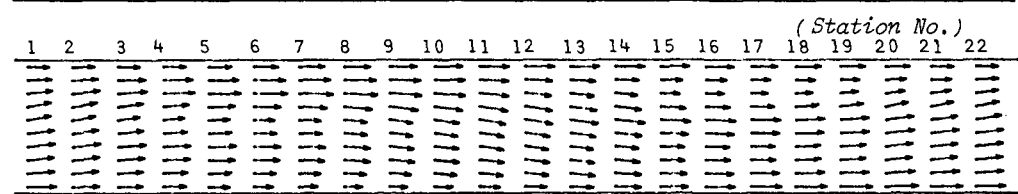
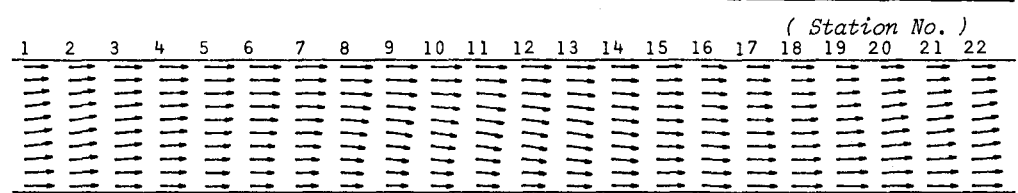
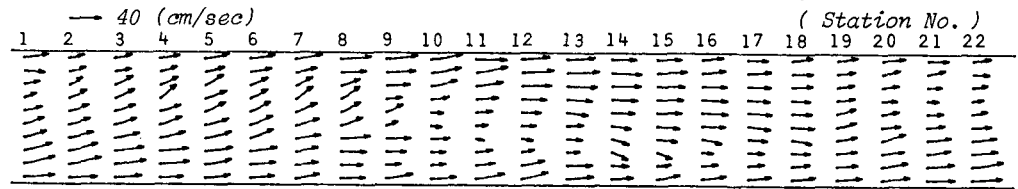
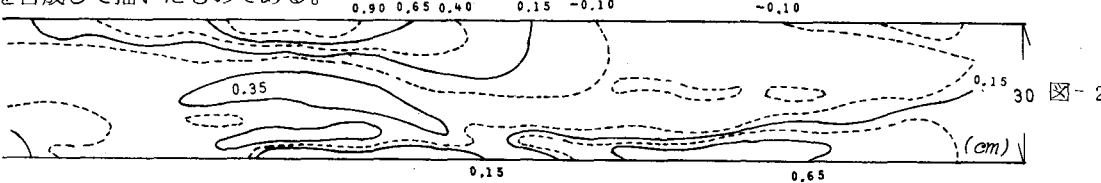
著者³⁾による曲りのみが働く場合の蛇行発達条件式 $\omega < \frac{fF}{\sqrt{2}} \quad (21) \quad \omega > \frac{\pi \epsilon}{2\sqrt{F^2-1}} \quad (F > 1) \quad (22)$ に対し、表の蛇行実験の値を用いると、いずれの条件も満足しないことがわかる。このことは、流路床が水平な場合には、彎曲部外岸側の流速が平均流速より

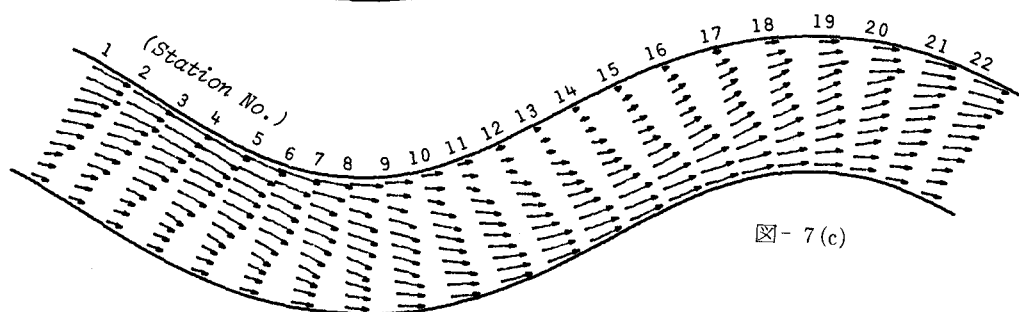
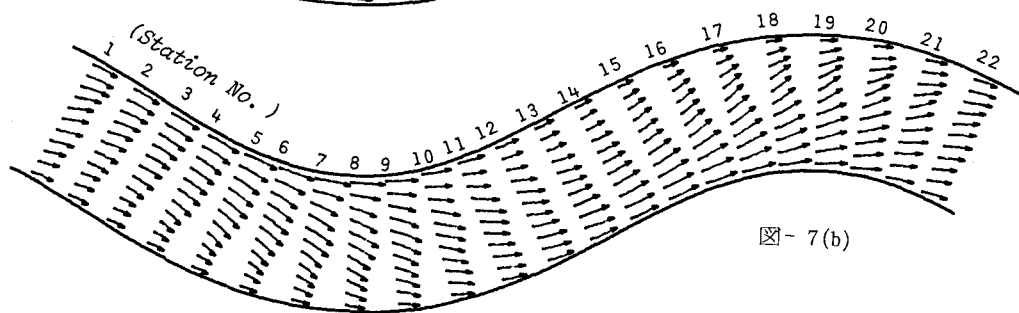
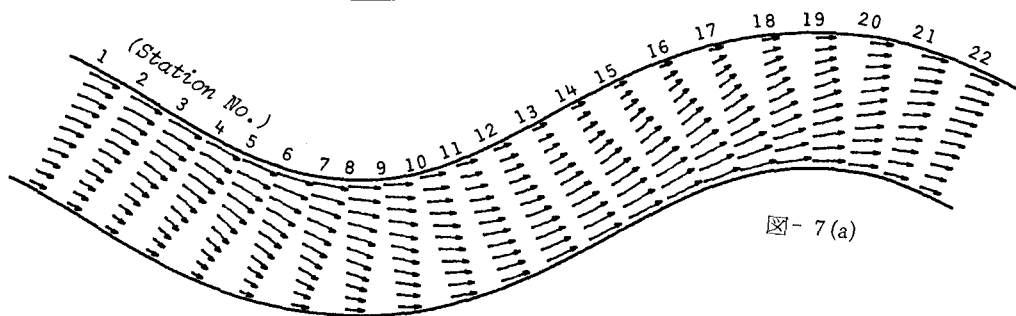
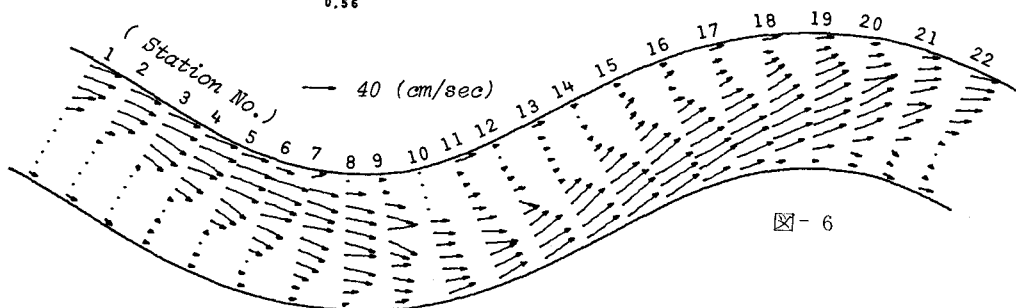
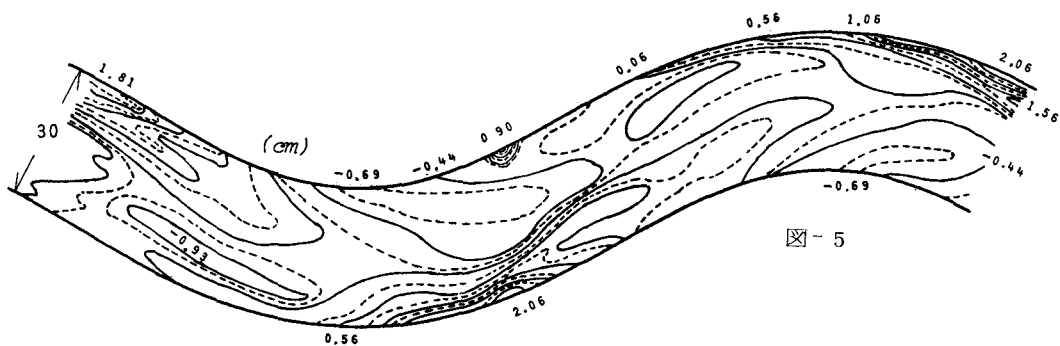
小さく、内岸側が大きくなることを示すものであり、実測値もこの傾向をみせている。一方、砂州波形を(8)式の A_{o11}^1 のみで表現したときの蛇行発達条件は、およそ $\omega < \sqrt{\epsilon f} \quad (23)$ にて表わされる。直線、蛇行の実験値によれば両者ともこの条件を満たしており、砂州によって生ずる深掘れ部で流速が大となることを示す。このことは、実測値にも明らかに認められる。

流速の測定は、回転台座上に設定した直径3mmのプロペラ流速計によっておこない、観測区間を縦断方向に22点(10cm間隔)、横断方向に11点(3cm間隔)、垂直方向に1~5点(3mm間隔)にわたって実施している。図-3、6の流速ベクトルは、 U, V のそれぞれの水深方向平均値を合成して描いたものである。

表-1 実験の主要水理表

	直線水路実験	蛇行水路実験
水路長 (m)	6.8	7.7
水路幅 B (cm)	30	30
蛇行最小曲率半径 R (cm)	—	66.87
蛇行長 L (cm)	220	220
平均河床勾配	1/70.9	1/70.9
平均水深 H_0 (cm)	0.77	0.89
平均流速 U_0 (cm/s.)	32.55	32.21
摩擦係数 f	0.020	0.024
$\omega = 2\pi H_0/L$	0.022	0.025
$\epsilon = 2H_0/B$	0.051	0.059
$F = U_0/\sqrt{gH_0}$	1.185	1.091





5. 理論と実測の比較

5-1 図-4(a)～(c)は、直線水路につき表-1の水理量と、実測河床形状のフーリエ級数を用いて、(13)～(20)式および(9),(10)式から u, v を計算し U, V にもどしてベクトル表示をおこなったものである。ただし、図の(a)は、河床を表すフーリエ級数のうち、最大の値を示す A_{c11}^1 のみを、また、(b)は、 A_c^1 と A_s^1 の合成値を大きいものから順に5番目までとった場合の係数を、(c)は全ての係数を与えた場合の結果である。(a)は、最も単純な河床表現をおこなったものであるが、深掘れ部で U が最大となり、下流の砂州に向って流路を横断するように V が生ずるという流れの基本的特徴は表われている。しかし、実測流速は、深掘れ部の対岸側においてもかなり大きな値を示し、違いがきわだっている。これは、実測河床の特徴である横断方向の偶関数的な波($\cos(i\pi n/2)$)が全て無視された結果によるものと考えられる。(b)、(c)では、上述の波が含まれているためかなり実測値に近づいている。両者の比較では、二つの結果はほとんど変わらず、流れが主要な河床形によってほとんど定まることを示している。しかし、実測値との詳細な比較をおこなうと、理論的に求めた結果が重要な点で異なっていることがわかる。すなわち、実測では<1>砂州をよぎる流れが前縁に至って途切れ、かわって前縁に平行する流れが現われる。<2> U の横断分布の最大と最小のひらきが、かなり大きい。<3>対応する V の値も実測値の方が大きい。<4>測線6～10にみられるように、河床の最浅部で左右岸に向う流れの枝分れが認められる。<5>砂州先端部で、流速の非常に小さい部分が現われる。これに対し、理論値では上述の<2>に比べ、分布形状が必ずしもはつきせず、理論値の V は小さい。<1>、<4>、<5>に相当する流れが認められない。以上の違いは、実際の流れが砂州の前縁部で剝離をおこし、これにそって横断面内に二次流を生じているためと考えられ、理論の二次元的扱いの限界を示すもののように思われる。

5-2 図-7(a)～(c)は、蛇行流路に関する計算結果を示すものであり、直線の場合と同様に(a)は、 A_c^1 と A_s^1 の合成値が最大となる係数のみを与えた場合、(b)は、合成値の大きい順に5番目までの係数を、(c)は全係数を与えた場合の結果である。(a)における流速分布の傾向は、実測の場合にほぼ一致し、もし係数値を全体の波高程度にとれば、この波数のみでもかなりの程度流れを表現できる。しかし、砂州をよぎる部分の違いは、かなり大きく、河床の単純化に起因しているようである。(b)、(c)では、これがかかなり改善され、実測に近づくが、<1>砂州の前縁部で直線の場合と同様な差がみられること、<2>主流部流線の蛇行形状に対する位相のずれが、理論の方で大きくなっていること、<3>水衝部の流れが、実測においては急激に向きを変え、壁を離れて中央に向っているのに対し、理論では壁に平行していること、などの違いが表われている。以上の差異は、やはり理論の二次元的取扱いに起因するものと考えられ、河岸の浸食力などを評価する際には問題となるものといえる。

6. まとめ

現実の交互砂州上の流れを線形二次元浅水流モデルによって解き、実測流速との比較をおこなった結果、以下の事柄が明らかになった。Ⅰ.流れは、河床波の主要振幅成分によって強く規定されており、全振幅の1/10程度以上の振幅をもつ波によって河床を表現すれば、理論値はかなり実測値に近づく。Ⅱ.しかし、流れの三次元的性格が強まる砂州の前縁部や蛇行水路の水衝部においては、理論と実測の隔りが大きくなり、この傾向は河床の精度を上げて変わらない。Ⅲ.理論・実測の差異のうちで、共通する重要な特徴は、理論の V の値が小さめに現われるということであり、河岸の浸食などを考える際には、基本的な問題となる。

謝辞：本研究は、昭和55年度文部省科学研究費補助金(一般D,課題番号565162,代表者長谷川和義)の助成を受けておこなわれたものである。ここに謝意を表する次第である。

参考文献

- 1) Gottlieb, L. : Three-dimensional flow pattern and bed topography in meandering channels, Techn. Univ. of Denmark, Series papper No.11, 1976
- 2) Engelund, F. : Flow and bed topography in channel bends, Proc. of ASCE, Vol.100, No. HY11, 1974
- 3) Hasegawa, K. and I. Yamaoka : The effect of plane and bed forms of channels upon the meander development, Proc. of JSCE, No.296, 1980
- 4) 長谷川他：交互砂州の流路蛇行による変形, 土木学会北海道支部論文報告集, 第37号, 1981