

I-29 三次元多層体の動的応答について

北海道開発局土木試験所 正員 吉田 統一
北海道大学 工学部 正員 能町 純雄

1. まえがき

三次元多層体の応力解析についてはすでに多くの研究が行なわれており、また半無限弾性体の動的応答問題についてもすでにいくつかの研究が行なわれている。しかしこれらの組合せである三次元多層体の動的応答問題についての研究は数が少ないように思われる。ここでは円柱座標で表わされる多層体の一層について、深さ方向には変位の一次変化を仮定し、半径方向にはヘルミット変換を適用し、円周方向にはフーリエ変換を適用した平板要素を考えて、多層体の動的応答を検討しようとするものである。

2. 基本式

いま、Fig-1のように境界 j と $j+1$ をもつ厚さ h の平板要素を考え、円柱座標 r, θ, z をとり、それぞれの変位成分を u, v, w 、各応力成分を $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ とすると力のつり合式は慣性力を考えて

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

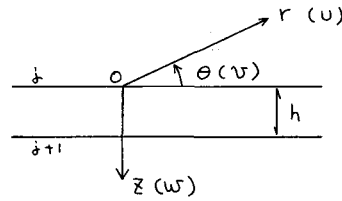


Fig-1

となる。ただし ρ は単位体積重量である。

また、 G :せん断弾性係数、 $\lambda (= 2G\nu/(1-2\nu))$:ラーメの定数、 ν :ポアソン比とすると、フックの法則は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (2G + \lambda) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \\ \sigma_\theta &= \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + (2G + \lambda) \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \right) + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_z &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \right) + (2G + \lambda) \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2) \quad \left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= G \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \\ \tau_{\theta z} &= G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \\ \tau_{rz} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

境界 j と $j+1$ の変位成分をそれぞれ $u_j, u_{j+1}, v_j, v_{j+1}, w_j, w_{j+1}$ で表わし、板厚を h として、変位を次のように仮定する。

$$u = u_j f^{(0)} + u_{j+1} f^{(1)}, \quad v = v_j f^{(0)} + v_{j+1$$

$$+ (2G + \lambda) \frac{\partial^2 U}{r^2 \partial \theta^2} + G \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + (G + \lambda) \frac{\partial^2 W}{r \partial \theta \partial z} - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Big\} f^{(i)} dz = 0, \quad (\lambda = 0, 1) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Q_z f^{(i)} \Big|_0^h - \left\{ 2G \frac{\partial W}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial U}{r \partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right\} f^{(i)} \Big|_0^h + \int_0^h \left\{ (G + \lambda) \left(\frac{\partial^2 U}{r \partial \theta^2} + \frac{\partial U}{r \partial z} \right) + (G + \lambda) \frac{\partial^2 U}{r \partial \theta \partial z} \right. \\ \left. + G \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial W}{r \partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} \right) + (2G + \lambda) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right\} f^{(i)} dz = 0, \quad (\lambda = 0, 1) \quad (8) \end{aligned}$$

ここで周期的な外力を仮定し、定常状態を考えると各変位成分は次のようにおくことができる。

$$U = \tilde{U} e^{i p t}, \quad V = \tilde{V} e^{i p t}, \quad W = \tilde{W} e^{i p t}. \quad (9)$$

ただし p は外力の円振動数である。

式(9)を考慮して、式(6)~(8)に円周方向にはフーリエ変換、半径方向にはハンケル変換を行なうと、次のようになる。

$$\left\{ Q_{am} - 2G \frac{\partial A_m}{\partial z} \right\} f^{(i)} \Big|_0^h + \int_0^h \left\{ -2G \left(\xi^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + 2\rho p^2 \right\} A_m \cdot f^{(i)} dz = 0, \quad (10)$$

$$\left\{ Q_{bm} - 2G \left(\frac{\partial B_m}{\partial z} - \xi W_m \right) \right\} f^{(i)} \Big|_0^h + \int_0^h \left\{ \left[-2(2G + \lambda) \xi^2 + 2\rho p^2 + 2G \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] B_m + 2(2G + \lambda) \xi \frac{\partial W_m}{\partial z} \right\} f^{(i)} dz = 0, \quad (11)$$

$$\left\{ Q_{zm} - (2G + \lambda) \frac{\partial W_m}{\partial z} - \lambda \xi B_m \right\} f^{(i)} \Big|_0^h + \int_0^h \left\{ (G + \lambda) \xi \frac{\partial B_m}{\partial z} - (G \xi^2 - \rho p^2) W_m + (2G + \lambda) \frac{\partial^2 W_m}{\partial z^2} \right\} f^{(i)} dz = 0, \quad (12)$$

上式中 $A_m, B_m, W_m, Q_{am}, Q_{bm}, Q_{zm}$ は $J_m(x)$ を第1種のベッセル関数として

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \int_0^\infty r \left\{ (C_m[\tilde{U}] + S_m[\tilde{V}]) J_m(\xi r) \pm (C_m[\tilde{U}] - S_m[\tilde{V}]) J_{m-1}(\xi r) \right\} dr \\ B_m &= \int_0^\infty r C_m[\tilde{W}] J_m(\xi r) dr \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{am} &= \int_0^\infty r \left\{ (C_m[\tilde{U}_z] + S_m[\tilde{V}_z]) J_m(\xi r) \pm (C_m[\tilde{U}_z] - S_m[\tilde{V}_z]) J_{m-1}(\xi r) \right\} dr \\ Q_{bm} &= \int_0^\infty r C_m[\tilde{W}_z] J_m(\xi r) dr \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\text{ただし } C_m[f] = \int_0^{2\pi} f \cos m\theta d\theta, \quad S_m[f] = \int_0^{2\pi} f \sin m\theta d\theta \quad (15)$$

式(10)~(12)の積分を $i = 0, 1$ について行なうと、層 $(j, j+1)$ では次のようになる。

これにより解を求めることができる。逆変換は次のように表わされる

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \xi \left\{ (A_m + B_m) J_{m+1}(\xi r) \pm (A_m - B_m) J_{m-1}(\xi r) \right\} d\xi \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \\ \tilde{w} &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \xi W_m J_m(\xi r) d\xi \cos m\theta. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

3 多層体の場合

層の境界における力のつり合は

$$\tau_{rz}^{j,j+1} - \tau_{rz}^{j,j+1} = 0, \quad \tau_{\theta z}^{j,j+1} - \tau_{\theta z}^{j,j+1} = 0, \quad \sigma_z^{j,j+1} - \sigma_z^{j,j+1} = 0 \quad (18)$$

となる。(したがって変換された式は式(16)を用いて

$$\left. \begin{aligned} &\frac{2G_{j+1}}{h_{j+1}} (A_m^{j+1} - A_m^j) - \frac{2G_j}{h_j} (A_m^j - A_m^{j-1}) - \frac{h_{j+1}}{3} (G_{j+1}\xi^2 - p_{j+1}^2) (A_m^{j+1} + 2A_m^j) - \frac{h_j}{3} (G_j\xi^2 - p_j^2) (2A_m^j + A_m^{j-1}) = 0. \\ &\frac{2G_{j+1}}{h_{j+1}} (B_m^{j+1} - B_m^j) - \frac{2G_j}{h_j} (B_m^j - B_m^{j-1}) - \frac{h_{j+1}}{3} \{ (2G_{j+1} + \lambda_{j+1})\xi^2 - p_{j+1}^2 \} (B_m^{j+1} + 2B_m^j) - \frac{h_j}{3} \{ (2G_j + \lambda_j)\xi^2 \\ &\quad - p_j^2 \} (2B_m^j + B_m^{j-1}) - 2(G_{j+1} - G_j)\xi W_m^j - (G_{j+1} + \lambda_{j+1})\xi (W_m^{j+1} - W_m^j) - (G_j + \lambda_j)\xi (W_m^j - W_m^{j-1}) = 0. \\ &\frac{1}{2} (G_{j+1} + \lambda_{j+1})\xi (B_m^{j+1} - B_m^j) + (\lambda_{j+1} - \lambda_j)\xi B_m^j + \frac{1}{2} (G_j + \lambda_j)\xi (B_m^j - B_m^{j-1}) + \frac{2G_{j+1} + \lambda_{j+1}}{h_{j+1}} (W_m^{j+1} - W_m^j) \\ &\quad - \frac{2G_j + \lambda_j}{h_j} (W_m^j - W_m^{j-1}) - \frac{h_{j+1}}{6} (G_{j+1}\xi^2 - p_{j+1}^2) (W_m^{j+1} + 2W_m^j) - \frac{h_j}{6} (G_j\xi^2 - p_j^2) (2W_m^j + W_m^{j-1}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

となる。式(19)を各境界で解いて逆変換することにより多層体の動的応答を求める事ができる。

4. 一層の場合

Fig-2に示すような剛体の上に一層のみある簡単な例を考える。

外力として円形基礎から水平力HとモーメントMを受ける場合を考える。m=1のみとなり、層の上面で r < a に対して

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz} &= \frac{H}{\pi a^2} e^{ip^*t} \cos \theta, \quad \tau_{\theta z} = -\frac{H}{\pi a^2} e^{ip^*t} \sin \theta \\ \sigma_z &= \frac{4M}{\pi a^4} r \cdot e^{ip^*t} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

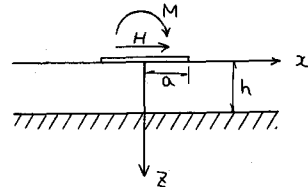


Fig - 2

水平変位と回転角の応答の平均値 U_a, ψ_a を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} U_a &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (U \cos \theta - V \sin \theta) r dr d\theta \\ \psi_a &= \frac{4}{\pi a^4} \int_0^{2\pi} \int_0^a W \cos \theta \cdot r^2 dr d\theta \end{aligned} \right\} (22)$$

平均水平変位 U_a 、平均回転角 ψ_a と水平力 H 、モーメント M との関係を表のように表現する。

$$\begin{bmatrix} U_a \\ \psi_a \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{HH} & C_{HM} \\ C_{MH} & C_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ M \end{bmatrix} \quad (23)$$

ただし $C_{HH} = - \frac{3}{G\pi a^4 t} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{s^2 + b_{11}} + \frac{b_{33} + s^2}{(b_{22} + s^2)(b_{33} + s^2) - b_{23} b_{32} s^2} \right\} \frac{1}{s} J_1(s) J_1(s) ds,$

$$C_{HM} = - \frac{12}{G\pi a^4 t} \int_0^\infty \frac{b_{23}}{(b_{22} + s^2)(b_{33} + s^2) - b_{23} b_{32} s^2} J_2(s) J_1(s) ds,$$

$$C_{MH} = - \frac{48}{G\pi a^4 t} \int_0^\infty \frac{b_{22} + s^2}{(b_{22} + s^2)(b_{33} + s^2) - b_{23} b_{32} s^2} \frac{1}{s} J_2(s) J_2(s) ds,$$

$$C_{HH} = C_{HM}$$

5. 数値計算例

一層の場合の計算例として $t (= h/a) = 1.0, 0.5$, $\nu = 0.0, 0.25$ の4ケースについて静的な場合 ($p=0$) に対する応答倍率を求めた、縦軸には静的な場合に対する応答倍率をとり、横軸には無次元円振動数 $a_0 = a\sqrt{\rho/G}$ をとって図示した。Fig-3は水平力 H による水平変位 U_a の応答倍率 (C_{HH}/C_{Hst}) である。

Fig-4は水平力による回転角 ψ_a の応答倍率 (C_{HM}/C_{Hst}) でこの場合は $\nu = 0.25$ の場合応答は生じない。

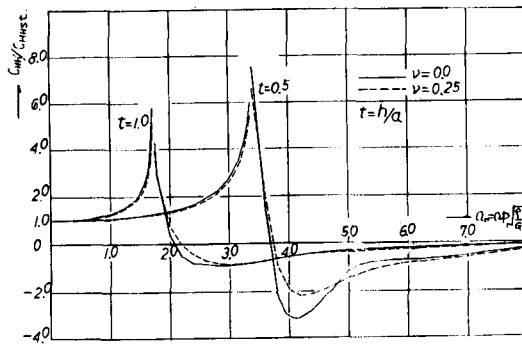


Fig-3 Hによる U_a の応答倍率

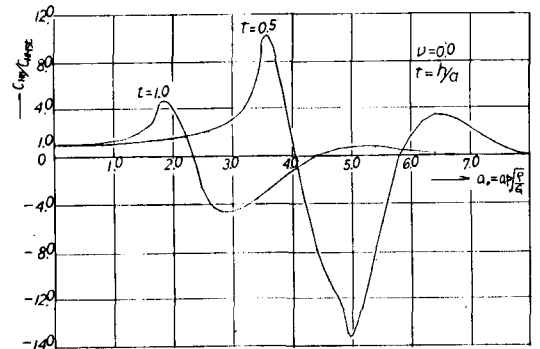


Fig-4 Hによる ψ_a の応答倍率

Fig-5はモーメント M による回転角 ψ_a の応答倍率 (C_{MM}/C_{Mst}) である。

以上、ここでは特別な場合の例として一層でしか分割していない場合についての計算結果を示したが今後より一般の場合について計算を行なう