

I-27 和分変換による単純トラス橋、動的応答解析 — 薄肉弾性はり理論とを比較 —

北見工業大学 正員 大島 俊之
北大工学部 正員 能町 純雄

1. まえがき

トラス橋の振動解析において、最近、簡略法として、その固有振動数を計算することなどを目的として、トラスの立体的構造を等価な薄肉弾性はりに置換し、それらに属する連立の振動方程式を誘導し、解析する手法が用いられている^{1), 2)}。一方、本来は一種の構造物はアイスクリーンの格点において部材が結合された骨組構造であるため、高次の振動モードになると、上記仮定との間違、その挙動に差異が生じてくることが予想され、その程度はどのようなものがあるかを確認しておくことが、必要になるものと思われる。

本論文では、上路単純トラス橋を対象として解析を行ない、床版・床組は等価、等方性板と仮定し、これに帯板要素法を適用する。またトラス構造については、主構、上下僅構、対傾構について格点の動的フリー面式を考える際、各節点の質量は橋軸方向には格点に集中する Lumped Mass、またそれに直角な横断面内では、Consistent Mass として取り扱う方法による。

主構と床版・床組との結合状態については、理論的には一体として取り扱われることは少ないが、実際には弾性的に結合されており、本研究では比較のため、両者一体として基礎式を誘導した。しかし数値計算の結果からはこのことは動的性状にはあまり影響しないことが明らかとなった。

2. 解析理論

(a) 床版・床組のモデル化

床版・床組については、等方性板と仮定し、帯板要素法³⁾を適用して、図1のような一枚の帯板要素について、次のような関係式を用いる。

$$G_h V_p^T [K^S] \{U\}^T + P_h [M^S] \{\ddot{U}\}^T = \{F\}^T \quad (1)$$

$$\text{すなわち、} \{U\}^T = \{U_1, V_1, W_1, \theta_1, U_2, V_2, W_2, \theta_2\},$$

$$\{F\}^T = \{T_1, S_1, R_1, M_1, T_2, S_2, R_2, M_2\}, \quad \cdot \text{ は 時間}$$

に属する微分をあらわす。 $[K^S]$ 、 $[M^S]$ は (8×8) の対称行列で、これは板の剛性、質量マトリクスを意味し、以下のような内容である。

$$K_{11}^S = -\frac{b}{3} D_x^2 + \frac{1}{b V_p^2}, \quad K_{12}^S = \frac{-1+3\nu}{4} D_x, \quad K_{16}^S = -\frac{(1+\nu)}{4} D_x,$$

$$K_{15}^S = -\frac{b}{6} D_x^2 - \frac{1}{b V_p^2}, \quad K_{22}^S = -\frac{1-\nu}{6} D_x^2 b + \frac{1}{b}, \quad K_{25}^S = -K_{16}^S,$$

$$K_{26}^S = -\frac{1-\nu}{12} D_x^2 b - \frac{1}{b}, \quad K_{55}^S = K_{11}^S, \quad K_{56}^S = -K_{12}^S, \quad K_{66}^S = K_{22}^S$$

$$K_{33}^S = r_p^2 \left\{ \frac{13}{35} D_x^2 b - \frac{12}{5b} D_x^2 + \frac{12}{b^3} \right\},$$

$$K_{34}^S = r_p^2 \left\{ \frac{11b^2}{210} D_x^2 - (\nu + \frac{1}{5}) D_x^2 + \frac{6}{b^2} \right\},$$

$$K_{37}^S = r_p^2 \left\{ \frac{9}{20} D_x^2 b + \frac{12}{5b} D_x^2 - \frac{12}{b^3} \right\}, \quad K_{47}^S = -K_{38}^S,$$

$$K_{44}^S = r_p^2 \left\{ \frac{b^2}{105} D_x^2 + \frac{4}{15} b D_x^2 + \frac{4}{b} \right\}, \quad K_{55}^S = K_{11}^S,$$

$$K_{56}^S = -K_{12}^S, \quad K_{66}^S = K_{22}^S, \quad K_{77}^S = K_{33}^S,$$

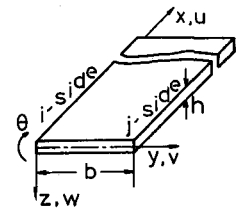


図1 帯板要素

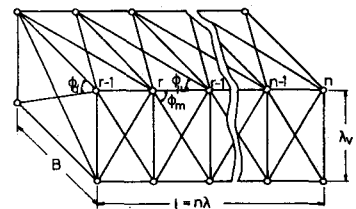
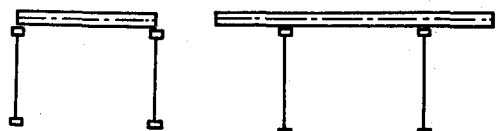


図2 クロスタイプモデルトラス



(a) (b)

図3 (a) 門型トラス (b) πトラス

$$k_{q8}^s = \left\{ -\frac{b^3}{140} D_x^q + \frac{b}{15} D_x^2 + \frac{2}{6} \gamma_r^2, k_{38}^s = r_p^2 \left\{ -\frac{13}{420} b^2 D_x^q - \frac{1}{5} D_x^2 + \frac{6}{b^2} \right\}, k_{78}^s = -k_{34}^s, k_{88}^s = k_{44}^s \right.$$

$$\gamma_p^2 = 2/(1-\nu_s), r_p^2 = h^2/12, m_{11}^s = b/3, m_{15}^s = b/6, m_{22}^s = m_{11}^s, m_{26}^s = m_{15}^s, D_x = d/dx, \\ m_{47}^s = -m_{38}^s, m_{48}^s = -b^3/140, m_{33}^s = 13b/35, m_{34}^s = 11b^2/210, m_{37}^s = 9b/70, m_{44}^s = b/105, \\ m_{38}^s = -13b^2/420, m_{55}^s = m_{11}^s, m_{66}^s = m_{11}^s, m_{77}^s = m_{33}^s, m_{78}^s = -m_{34}^s, m_{88}^s = m_{44}^s, \\ \nu_s, \rho_s, h, G_s \text{ はそれぞれ床板のポアソン比, 密度, 厚さ, せん断弾性係数を表わす。}$$

(b) トラス構造のモデル化

図2のFなクロスゲイアポータル型式のトラスを考え, 格点 i と j に對稱構を考へる。中量方向中央に對して左右對称な一軸對稱断面構造を考へ, 格点 r (上弦桁位置), 格点 r' (下弦桁位置)に於ける水平橋軸と中量方向, 及び鉛直 q 三方向に於ける動的フリス式を求めると次のようになる。

$$[K^t] \{U^t\} + [M^t] \{\ddot{U}^t\} = \{F^t\} \quad (2)$$

左に $\{U^t\} = \{U_r, U_{r'}, W_r, U_l, U_{l'}, W_{l'}\}$, $\{F^t\} = \{T_r^t, S_r^t, R_r^t, 0, 0, 0\}$,
また $[K^t]$ は剛性マトリックスであり, E の内容は

$$k_{11}^t = -K_d^u \Delta_r^2 + 2K_d^u \alpha_m^2 + 2K_d^u \alpha_{2u}^2 - K_d^u \alpha_{2u}^2 a (\Delta_r^2 + 2), k_{12}^t = K_d^u \alpha_{2u} \beta_{2u} a \Delta_r, k_{13}^t = k_{24}^t \\ = k_{46}^t = k_{15}^t = 0, k_{14}^t = -K_d^u \alpha_m^2 (\Delta_r^2 + 2), k_{16}^t = -K_d^u \alpha_m \beta_m \Delta_r, k_{22}^t = K_d^u (1+a) + K_d^u \alpha_d^2 \\ + K_d^u \beta_{2u}^2 \{2 + (\Delta_r^2 + 2)a\}, k_{23}^t = K_d^u \alpha_d \beta_d, k_{25}^t = K_d^u \alpha_d^2 a, k_{26}^t = -K_d^u \alpha_d \beta_d a, \\ k_{33}^t = K_d^u + K_d^u \beta_d^2 + 2K_d^u \beta_m^2, k_{34}^t = -K_d^u \alpha_m \beta_m \Delta_r, k_{35}^t = K_d^u \alpha_d \beta_d a, k_{36}^t = -K_d^u - K_d^u \beta_d^2 a \\ - K_d^u \beta_m^2 (\Delta_r^2 + 2), k_{45}^t = K_d^u \alpha_{2e} \beta_{2e} a \Delta_r, k_{47}^t = -K_d^u \Delta_r^2 + 2K_d^u \alpha_{2e}^2 - 2K_d^u \alpha_m^2 + K_d^u \alpha_{2e}^2 (\Delta_r^2 + 2), \\ k_{48}^t = -K_d^u \alpha_d \beta_d, k_{55}^t = K_d^u \beta_{2e}^2 \{2 + (\Delta_r^2 + 2)a\} + K_d^u \alpha_d^2 + K_d^u (1+a), k_{56}^t = K_d^u + K_d^u \beta_d^2 - 2K_d^u \beta_m^2, \\ \text{また } K \text{ 上へ添字 } u, m, d, \text{ 下へ添字 } u, m, d \text{ はそれぞれ主構, 上橋構, 下橋構, 対稱構に関するものを表し, } K \text{ 下へ添字 } u, d, u, d \text{ はそれぞれ上弦桁, 斜桁, 垂直桁, 下弦桁に関するものを表し, } K, \alpha, \beta \text{ は部材断面種 } A \text{ と部材長さ } l, \text{ 及び部材}$$

$$\text{軸線と水平軸となす角を次式に代入して得られる。} \quad \begin{pmatrix} \Delta_r f_r = f_{r+1} - f_{r-1} \\ \Delta_r^2 f_r = f_{r+1} - 2f_r + f_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$K = EA/l, \alpha = \cos \phi, \beta = \sin \phi.$$

a は鉛直曲げ振動を 1 , ねじり振動を -1 とする。

$[K^t]$ は $k_{21}^t = -k_{12}^t, k_{31}^t = -k_{13}^t, k_{52}^t = -k_{25}^t$ を除く対称な内容となる。

$[M^t]$ の内容は 2×2 は省略するが, 質量に関する対角マトリックスであり, 格点に結合されている部材 E , 橋軸方向には Lumped Mass, 橋断面方向には Consistent Mass とし分布している質量をみなして求める。

(c) 境界条件

本論文では主として, 鉛直曲げ振動の場合について考える。この場合は水平な中量方向の変位 W が無視できるものと考えられるので, トラス構造の上下橋構と対稱構の影響を無視して, 図3のような(a)門型トラス, (b)πトラスの形式について考える。床板とトラスの結合はトラス上弦桁格点 u の部材力 Q_u , 床板中央面の離散化した断面力 Q とつりあうものとし, 格点位置 u の力 Q_u を考へる。またフーリエ展開の項数をトラスの格点数(橋軸方向)と同数にとることにすれば, 帯域要素に関するフーリエ変換とトラスに関する積分変換を合成して取り扱うことが可能となり, 全構造系に対する解を同時に求めることもできる。

$$T_{0,1}^s(r) = T_{0,0}^s(r), R_{0,1}^s(r) = R_{0,0}^s(r), M_{0,1}^s(r) = 0 \quad (3)$$

ただし, 下添字 $(0,1)$ は床板の節線番号, $(0,0)$ はトラスの上, 下弦桁位置を示す。記号の上の $\bar{}$ は橋面長 l に関する積分を意味する。

以上より, 全構造系に対するフーリエ変換後の基礎式は次のように書ける。

$$[K] \{U\} + [M] \{\ddot{U}\} = \{F\} \quad (4)$$

(d) 動的応答解析

式(4)について単一集中荷重が等速度 V で進行する場合を仮定し、初期値零の条件により解析する。

固有振動 ω については、変位に固有振動を仮定し、

$$([K] - \omega_m^2 [M]) \{u\} = 0, \quad \text{ただし } \{u\} \neq 0 \quad (5)$$

より、 ω_m が求められ、位相速度が計算される。

強制振動については、荷重を変位でワトルの振動位相と同一位相と仮定し、荷重速度が位相速度と異なる場合、

$$\{u\} = ([K] - \mu_m^2 [M])^{-1} \{P\} \quad (6)$$

ただし μ_m は波数を表わす。

また、一般解において、初期変位・初期速度が零の条件より、未知係数を決定して、式(4)に対する変位の関数係数の動的応答値が求められる。

この結果をフーリエ変換し、変位が求まり、これを式(1)、(2)に代入して、応力、格変力などの応答値が求められる。

本論文ではこれらに関して、概略の説明にとめたが、くわしくは文献(7)、(8)を参照していただきたい。

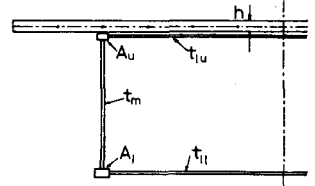


図4. 換算薄肉弾性はり

3. 薄肉弾性はり理論との比較 (図4参照)

式(2)において、図2のトラス構造が二軸対称断面の場合として考える。式(2)全体を入で割り、格間長を無限小に近づけると、

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 u_r}{\lambda^2} = u'', \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta u_r}{\lambda} = 2u', \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\Delta^2 + 6)u_r = 6u$$

の関係が成り、また u_r と v_r の変位の対称性は、

$$u_r' = -u_r, \quad v_r' = -v_r, \quad w_r' = w_r$$

ただし右肩の添字は x に関する微分を表わす。

鉛直曲げ振動の場合には $\alpha = 1$ で、水平中量方向変位 v が無視し得るものとすれば、文献(1)の換算板厚の式

$$t_m = \frac{E}{G} \frac{\lambda \cdot \lambda}{\frac{(1.5)^3}{2A_d^3}}, \quad t_{eu} = \frac{E}{G} \frac{B \cdot \lambda}{\frac{(1.5)^3}{2A_d^3}}, \quad t_{ee} = \frac{E}{G} \frac{B \cdot \lambda}{\frac{(1.5)^3}{2A_d^3}}$$

を用いて、式(2)の α が1と α が3の式を書き換えて

$$-EA u u''' + 2 \frac{G}{\lambda} t_m u' - G t_m u'' = -m_{11} \ddot{u} \quad (7)$$

$$G t_m u' - \frac{G \lambda}{2} \frac{t_m}{\lambda^2} w = -m_{33} \ddot{w} \quad (8)$$

これら u を消去すれば、文献(2)の式(13)と同型のTimoshenkoはりに関する微分方程式が得られる。

ねじり振動の場合にも $\alpha = 1$ で、上述と同様にして、式(2)の α が1、 α が2、 α が3の式を変形することにより、文献(2)の式(15)と同様の二軸対称箱型断面ばりのねじり振動に関する微分方程式が得られる。

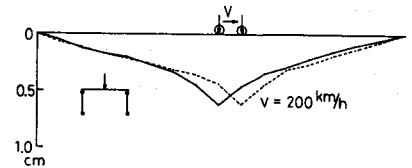
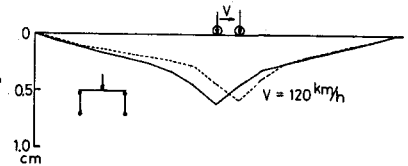


図5. 床板左端の動的応答値(30 cm)

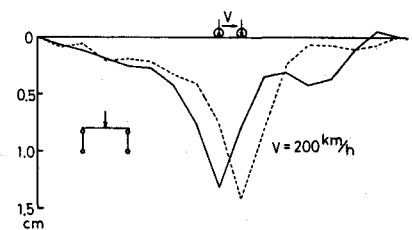
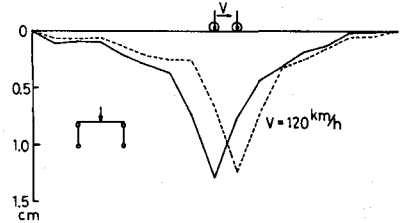


図6. 床板左端の動的応答値(20 cm)

4. 数値計算例

数値計算例として、図5と図6にはI型トラスの床版 α と β の動的応答値を床版厚 $h=30\text{ cm}$ と $h=20\text{ cm}$ の場合についてそれぞれ示している。この計算には、荷重は中央に対して対称とし、鉛直曲げ振動のみを取り扱う。上下橋構と対側橋構の影響は無視した。主構間隔は 8 m とし、これを8等分割、張出部は 2 m とし、2等分割に帯板要素としている。橋軸方向格間数 $n=16$ とする。

床版に関する弾性定数、密度は $E_s = 3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\nu_s = 0.18$, $G_s = E_s / 2(1 + \nu_s)$, $\rho_s g = 2.5 \text{ t/m}^3$ 。

また主構トラスの部材断面積は $A_u = 250 \text{ cm}^2$, $A_d = 180 \text{ cm}^2$, A_g は $h=30\text{ cm}$ のとき 166 cm^2 , 20 cm のとき 170 cm^2 。 $\lambda = 5\text{ m}$, $\lambda_u = 12\text{ m}$, $\lambda_d = 13\text{ m}$ 。 $E_t = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\rho_t g = 7.85 \text{ t/m}^3$, 荷重は 20 t 。

図7と図8にはI型トラスと π トラスの位相速度分散曲線を橋軸 α 振動に対して示している。図中Timoshenko Beamとあるのは床版を含めたトラス構造を合成換算弾性ばりと置きかえて、曲げ振動について、固有位相速度を計算した結果である。

波数の少ない範囲で両者は一致しているが、 $m=2$ 付近から少しずつ差が生じている。たとえば $C_s^2 = G_s / \rho_s$ 。

5. あとがき

以上、上路単純トラス橋の動的応答解析、および薄肉弾性ばり理論との比較について簡単に検討を加えた。

本論文の数値計算では高周波の振動が生じる範囲まで応答計算を行なったがいずれも、換算弾性ばりとの差異は顕著ではないが、図7および図8からその一端を見ることはできる。

しかし一般の走行速度の範囲ではSubcritical Speedの状態にあるので、一次曲げ振動モードが卓越し、換算弾性ばりによる結果は妥当なものとなることを予想される。

参考文献

- 1) 小松、西村：薄肉弾性ばり理論によるトラスの立体解析，土木学会論文報告集，第238号，1975. 6
- 2) 小松、西村：平行弦トラス橋の立体振動特性について，土木学会論文報告集，第297号，1980. 5
- 3) 中村：断面変形を考慮した薄肉ばり振動解析，土木学会論文報告集，第223号，1974. 3
- 4) 林、石通口、田中：断面変形を考慮した薄肉弾性ばり理論によるトラスの立体解析，土木学会論文報告集，第249号，1976. 5
- 5) 林、田中、石通口：断面変形を考慮した薄肉弾性ばり理論によるトラス橋の立体振動解析，土木学会論文報告集，第261号，1977. 5
- 6) 小坪、高西、島野、松下：高橋脚3スパン連続トラス橋の地震応答解析，土木学会論文報告集，第266号，1977. 10
- 7) 能町、大島、岸：走行荷重による橋桁のハワースワクトルについて，土木学会論文報告集，第35号，1979.
- 8) 能町、他：上路単純トラス橋の側向空気振動発生振特性の解析，同上，第36号，1980.

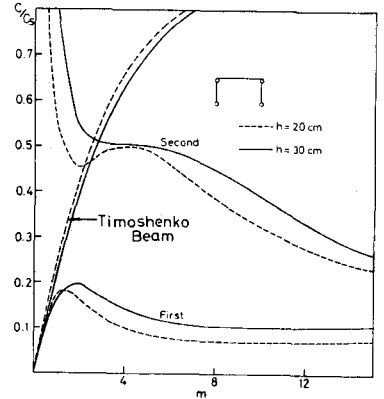


図7. 位相速度分散曲線

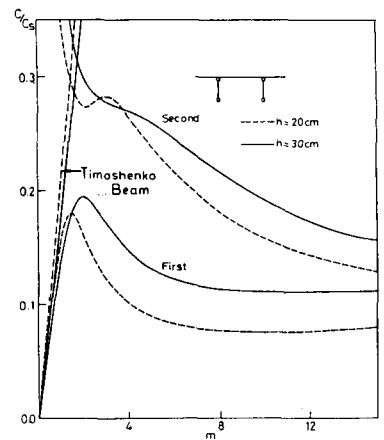


図8. 位相速度分散曲線