

I-26 クラックを有する板の振動について

北海道大学 工学部 正 員 能 町 純 雄
北海道大学 工学部 正 員 角 田 与史雄
北海道大学 工学部○学生員 伊 藤 千 浩

1. まえがき

本報告は、床版においてクラックの有無による振動の異いようすを、主に固有円振動数によって、比較を行ない、さらに床版上に移動集中荷重がある場合の強制振動のようすを見てみようとするものである。従って、本報告におけるポイントは、実際のクラックをどのようなモデルを用いて表わすか、ということにあると思われるが、この点の詳細については後に述べることにして、ごく簡単に説明しておく。(図-1 参照) それはクラックが生じている状態が次式をもって表わされるとするものである。

$$M = K_1 \Delta \theta, S = K_2 \Delta \omega$$

つまり、クラックが生じるとその両端でせん断力とモーメントが生じ、それによって、その両端のたわみとたわみ角の間で各々差が生じその間に比例関係がある、ということを上式は意味する。又、図を見てわかるように、どちらかといえばこのモデルは曲げひびわれよりも拘束ひびわれを想定していると思われる。

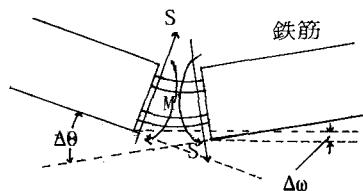


図-1

2. 解析方法 解析には有限帯板法を用いた。

2-1 固有円振動数について

いま図-2の帯板要素において $y = 0$, b におけるたわみを各々 $\bar{w}_{r-1} = \bar{w}_{r-1} \sin p t$, $\bar{w}_{r+1} = \bar{w}_{r+1} \sin p t$, たわみ角を各々 $\bar{\theta}_{r-1} = \bar{\theta}_{r-1} \sin p t$, $\bar{\theta}_{r+1} = \bar{\theta}_{r+1} \sin p t$ とし、一方両端に作用するせん断力、モーメントを S_{r-1} , S_{r+1} , M_{r-1} , M_{r+1} とすると、それらの間の関係を行列を用いて (1) で表わすことができる。

$$\begin{Bmatrix} S_{r-1} \\ M_{r-1} \\ S_{r+1} \\ M_{r+1} \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ \text{sym.} & & k_{33} & k_{34} \\ & & & k_{44} \end{bmatrix} - p^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ \text{sym.} & & m_{33} & m_{34} \\ & & & m_{44} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \bar{w}_{r-1} \\ \bar{\theta}_{r-1} \\ \bar{w}_{r+1} \\ \bar{\theta}_{r+1} \end{Bmatrix} \sin p t \quad (1)$$

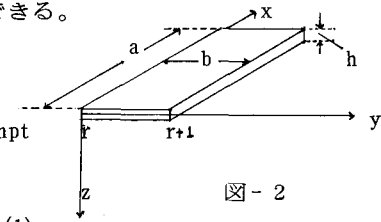


図-2

(1) で与えられる行列の各要素の内容については省略するが (1) をごく簡単に次式のように表わす。

$$\{f\}_e = [K]_e \{\delta\} - p^2 [M]_e \{\delta\} \sin p t \quad (1')$$

ここで $\{f\}$: 要素境界断面力ベクトル, $[K]$: 要素剛性マトリックス, $\{\delta\}$: 要素境界変位ベクトル, $[M]$: 要素質量マトリックス, p : 円振動数である。

さて次に (1) を全要素 N 個にわたり重ね合わせることを考えるが、その際の連続条件は (図-3 参照)

$$S_{r-1} = S_{r+1}, \quad \bar{w}_{r-1} = \bar{w}_{r+1} \quad \dots (2)$$

$$M_{r-1} = M_{r+1}, \quad \bar{\theta}_{r-1} = \bar{\theta}_{r+1}$$

又、両端を単純支持とすると、境界条件は

$$M_{0,1} = M_{N,N+1} = 0 \quad \dots (3)$$

$$\bar{w}_{0,1} = \bar{w}_{N,N+1} = 0$$

従って、系全体の方程式は次のようになる

$$\{0\} = [K] - p^2 [M] \{\delta\} \quad \dots (4)$$

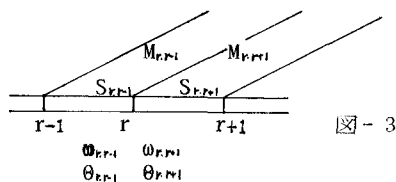


図-3

$\dots (4)$ となる。

(4) 式は $\{\delta\}$ についての同次方程式である。つまり $\{\delta\} \neq \{0\}$ より $|[K] - p^2 [M]| = 0$ の固有方程式となり、 p^2 がその固有値として求まり振動形がその固有ベクトルとして求まることになる。さて次にクラックを有する場合の解析方法について説明すると、まえがきでも簡単に述べたがコンクリート床

版にクラックが生じている状態で版が振動しているとすると図-4の(a),(b)のような状態が生じると考えられるが、まず(a)について説明する。クラックの両端にモーメントMが作用することによって上側鉄筋はそれ自身の縮みと両側コンクリートへのくい込み、下側鉄筋はそれ自身の伸びと両側コンクリートからの抜け出しにより、両側のたわみ角の間に $\Delta\theta$ の差が生じる。(b)については、クラックの両側にせん断力Sが作用することにより、鉄筋に曲げモーメントが作用し、その結果クラックの両側のたわみの間に $\Delta\omega$ の差が生ずる。そこで、以上の関係が次の式で表わされると仮定する。

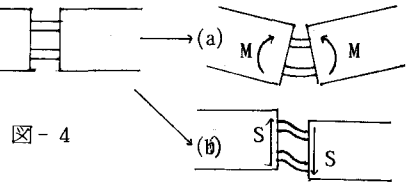


図-4

$$M = K_1 \Delta\theta, \quad S = K_2 \Delta\omega \quad \dots (5)$$

実際には、(a)と(b)の状態が組み合わさって振動しているわけである。

さて次にクラックを有する床版全体についての方程式をつくることを考えるが、クラックが無い場合(Normal)と異なるところは、クラックを有する帯板要素間の連続条件として先の(2)式のかわりに(5)式を用いて、マトリックスを重ね合わせていくところにあるが、最終的にはクラックを有しない場合と同じく、下式のように $\{\delta\}$ についての同次方程式ができる。

$$\{0\} = [K]_c - p^2 [M] \{\delta\} \quad \dots (6)$$

ただクラックを有しない場合についての(4)式と異なるのはクラックの位置において変位ベクトルが、2個(ω, θ)増えるので、マトリックスの次数が $N+2$ になることである。

ところで、いま仮に $K_1=0$ とおいてみると $M=0$ となり、これはクラックを想定した位置において、モーメントの伝達がない、つまりヒンジ状態を表わしていると考えられる。又、さらに $K_2=0$ とおくとせん断力の伝達もなくなり(すなわち $S=0$)、これは破壊状態を表わしていると考えられるので、(6)式中において、 $K_1=0$ 、あるいは $K_2=0$ とおくことによって、ヒンジ状態や破壊状態における固有値、固有ベクトルを求めることができる。

2-2 移動集中荷重がある場合

いま、重さ P_0 の集中荷重が速度 V_0 で床版上を移動したとする。(図-5参照)

この時、 r 点に作用する力を次のように定める。

$$P_r(t) = P_0 \times \frac{V_0 t - l}{b} \quad (l < V_0 t \leq l+b)$$

$$P_r(t) = P_0 \times \frac{(l+2b) - V_0 t}{b} \quad (l+b < V_0 t \leq l+2b)$$

$$P_r(t) = 0 \quad (\text{elsewhere})$$

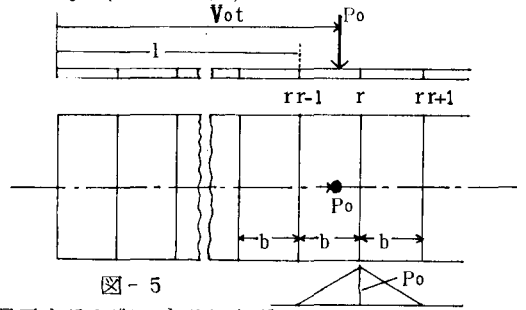


図-5

従って、荷重が作用するようすを床版の一部について図示すると次のようになる。

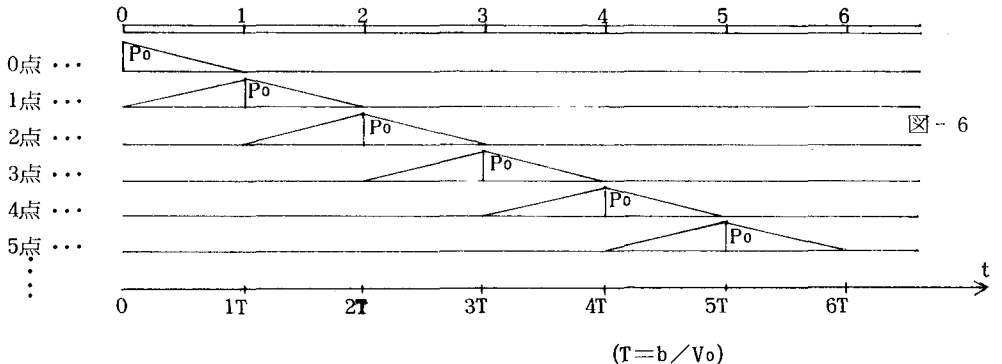


図-6

又、クラックを想定した位置では図-7 のような载荷状態となる。
 さて、いま変位ベクトルを $\{y_i\}$ ($i=1,2,\dots,n$) とし、 $\{y_i\}$ を基準座標 $\{q_j\}$ と基準関数 $[\Phi_{ij}]$ ($i,j=1,2,\dots,n$) で表わすと

$$\{y_i\} = [\Phi_{ij}]\{q_j\} \dots (8) \quad [\Phi_{ij}] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_{n1} & \dots & \Phi_{nn} \end{bmatrix} \quad \{q_j\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}$$

さて (8) 式を振動方程式 $[K]\{y\} + [M]\{\ddot{y}\} = [P]t$ に代入してこの方程式を解くと

$$q_i = C_1 \sin p_i t + C_2 \cos p_i t + \frac{1}{p_i} \int_0^t \{\Phi_{ij}\} \{p_j(\tau)\} \sin(p_i(t-\tau)) d\tau \dots (9)$$

(9) 式はデュアメル積分と呼ばれる式である。そこで、(9) 式において初期条件より C_1, C_2 を決定し積分を実行して、 q_i を求め (8) 式に代入することによって、任意の時間 t における各点の変位が求まり又、ある一点に注目すると、その点の時間的変位曲線が求まることになる。

3. 数値計算

本報告においては、次に述べる値を用いて計算した結果を載せる。床版の寸法は縦4.0m、横20.0m 厚さ0.2mで、20等分 (すなわち一つの帯板要素は4.0m×1.0m×0.2m) で、ヤング係数 $E = 3.0 \times 10^5$ (Kg/cm^2)、ポアソン比1/6、荷重10.0ton、速度15.0m/sec、である。又、x 方向の境界条件を両端単純支持とし、一次モードのみを考慮する。

3-1 固有円振動数について

本報告では次の a, b, c のような、まとめ方をした。

- a : K_1, K_2 の値を変化させた時 (クラックの位置は中央点より左に2.0mのところ)
- b : クラックの位置を変えた時 ($K_1 = 2.0 \times 10^4 (Kg \cdot m / rad)$, $K_2 = 2.0 \times 10^4 (Kg / m)$)
- c : Normal、クラック、ヒンジ、破壊の各状態における固有円振動数

a の計算結果

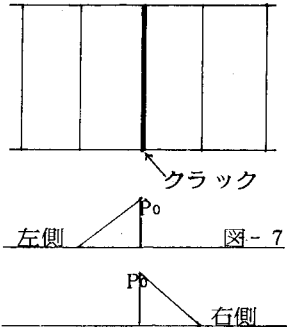
$K_1 (Kg \cdot m / rad)$	2.0×10^4	2.0×10^5	2.0×10^6	2.0×10^7	2.0×10^8
$K_2 (Kg / m)$	2.0×10^4	2.0×10^5	2.0×10^6	2.0×10^7	2.0×10^8
第一次固有円振動数	128.8222	128.7747	128.4954	127.7716	127.0613
第二次固有円振動数	143.6131	143.3298	140.8402	133.2869	131.0419
第三次固有円振動数	168.2549	167.6083	162.6481	154.7683	153.3931

b の計算結果

中央点からの距離	0.0m	1.0m	2.0m	3.0m	4.0m
第一次固有円振動数	128.5614	128.5441	128.4954	128.4231	128.3369
第二次固有円振動数	139.9979	140.2151	140.8402	143.7555	142.6477
第三次固有円振動数	167.0138	165.4572	162.6481	160.5370	160.1352

c の計算結果

状態	Normal	クラック	ヒンジ	破壊
第一次固有円振動数	128.8279	128.4954	128.2499	126.9102
第二次固有円振動数	143.6451	140.8402	140.6745	153.2375
第三次固有円振動数	168.3286	162.6481	162.2057	204.8782
$K_1 (Kg \cdot m / rad)$	————	2.0×10^4	0.0	0.0
$K_2 (Kg / m)$	————	2.0×10^4	2.0×10^4	0.0

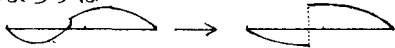


3 - 2 移動集中荷重がある場合

中央点より右に2.0mのところにクラック、ヒンジ、破壊があるとした時の中央点の時間的変位曲線が右の図である。(単位: mm)

4. 考察とあとがき

固有円振動数について。a については K_1, K_2 の値が未知なのでオーダー的に値を変えて計算をしたが、特に大きな変化はないように思われる。次にbの結果についても、特に大きな変化は表われていない。さてcについては、一般にクラックが生じると固有円振動数の値は小さくなると考えられ、さらにクラック-ヒンジ-破壊状態と進むにつれて、その値は減少すると予想されるが、たとえばcの二次の固有円振動数を見てみると破壊状態における値が四つの状態の中で最大となっている。このことを説明するには振動形を考慮する必要があるのではないと思われる。それは、クラックの状態から破壊状態へ移った時の振動形のようなは



となり、この右側の図は破壊状態における、一次の振動形と考えられる。従って、四つの固有円振動数を比較する場合において、破壊状態については二次ではなく一次の値を見るべきである。そこで、このことを考慮して固有円振動数を書き並べてみると

Normal	クラック	ヒンジ	破壊	となり
143.6451	140.8402	140.6745	126.9102	

ほぼ受当と思われる結果が示される。次に移動集中荷重がある場合についてであるが、先にクラック状態においては、変位に比例した力が作用すると仮定したのであるが、そうすると比例定数 K_1, K_2 は一種のパネ定数と考えられるわけで、つまりクラックが生じたということは、そこにパネ機構が発生したと考えることができるのではないと思う。(図-9参照)それを考慮に入れて

計算結果(図-8)を見てみると、ほぼ予想される結果が表われているように思われる。すなわち、荷重がクラック、ヒンジの点を通過すると、そのパネの影響を受けて静的な変位曲線を中心に振動しているのが見られる。以上が本研究によって得られた結果であるが、固有円振動数については、当初、 K_1, K_2 の変化により、固有円振動数の値がかなりの変動を示し、その関係を定式化したいと考えていたけれどもできなかった。しかし、傾向としては期待したものが得られたと思う。又、移動集中荷重がある場合については、クラックを想定したモデルから予想される結果が得られたと思う。

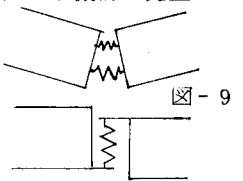


図-9

参考文献

Y.K.Cheun: Finite strip method in structural analysis

小坪 清真: 土木振動学

計算は HITAC-M200H を使用した。

