

I-21 無限弾性体中の円孔に周期的荷重が作用するときの円孔周辺の応力分布

室蘭工業大学 学生員 小島 秀吉
 室蘭工業大学 正員 松岡 健一
 北海道大学 正員 能町 純雄

1. まえがき

これまでに円柱座標で表わされるものの動的な問題に関する研究は、かなり多く行なわれているが、これらは主として円柱や円筒または円孔を有する半無限弾性体の研究がほとんどであり、無限弾性体中の円孔に関する動的な問題の研究は、あまり見受けられない。そこで本論文は、無限弾性体中にある円孔が周期的な外力をうける場合の問題を3次元弾性論により Fourier-Hankel 変換を用い円孔周辺の変位や応力分布の解析を行なったものである。

2. 基礎方程式のフーリエ・ハンケル変換による解

円柱座標で表わされる運動方程式は、座標軸を r , θ , z とし、 σ_r , σ_θ , σ_z をそれぞれ r , θ , z 方向の直応力度、 $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$, τ_{rz} をせん断応力度とすると物体力を無視し、慣性項を考慮すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r \partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} (1)$$

となる。ただし ρ は弾性体の密度、 t は時間、 u , v , w はそれぞれ r , θ , z 方向の変位である。

ここで外力を周期的な外力とし、定常状態に限定するものとする。まず(1)式を円周方向(θ)および軸方向(z)にフーリエ変換、半径方向(r)にハンケル変換を行ないフックの法則より応力成分を変位成分 $\tilde{A}_{mn}$, $\tilde{B}_{mn}$, $\tilde{W}_{mn}$ で表わす。以上より各変位成分のフーリエ・ハンケル変換値を含む3元連立方程式がえられ、これを解くことにより各変位成分のフーリエ・ハンケル変換値が求まり、それらを逆変換することにより、変位および応力のフーリエ変換値を積分定数として含む形で求められ、そ

の解は円孔を例として次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m (\tilde{A}_{mn} + \tilde{B}_{mn}) \cos m\theta e^{inz} dn e^{ipt} \\ v &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (\tilde{A}_{mn} - \tilde{B}_{mn}) \sin m\theta e^{inz} dn e^{ipt} \\ w &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \tilde{W}_{mn} \cos m\theta e^{inz} dn e^{ipt} \end{aligned} \right\} (2)$$

ただしここで、 $C_0 = \frac{1}{2}$, $C_1 = C_2 = \dots = 1$, また p は外力の円振動数である。

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mn} &= \frac{1}{N_{\mu}} \chi_{mp}(N_{\mu}r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mn} + (m+1) A_{mn} \right. \\ &\quad \left. + (m-1) B_{mn} - i \frac{n}{2} E_{mn} \right\} + \frac{\mu n^2}{\rho p^2} \left\{ \frac{1}{N_{\mu}} \chi_{mp}(N_{\mu}r) \right. \\ &\quad \left. - \frac{N_{\mu}}{n^2} \chi_{ms}(N_{\mu}r) \right\} \times \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mn} + (m+1) A_{mn} \right. \\ &\quad \left. - (m-1) B_{mn} + i n E_{mn} \right\} \end{aligned} \quad \dots (3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mn} &= -\frac{1}{N_{\mu}} \chi_{ms}(N_{\mu}r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mn} + (m+1) A_{mn} \right. \\ &\quad \left. + (m-1) B_{mn} + i \frac{n}{2} E_{mn} \right\} + \frac{\mu n^2}{\rho p^2} \left\{ \frac{1}{N_{\mu}} \chi_{ms}(N_{\mu}r) \right. \\ &\quad \left. - \frac{N_{\mu}}{n^2} \chi_{mp}(N_{\mu}r) \right\} \times \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mn} + (m+1) A_{mn} \right. \\ &\quad \left. - (m-1) B_{mn} + i n E_{mn} \right\} \end{aligned} \quad \dots (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{mn} &= G_m(N_{\mu}r) E_{mn} - i \frac{z \mu n}{\rho p^2} \left\{ G_m(N_{\mu}r) \right. \\ &\quad \left. - G_m(N_{\mu}r) \right\} \times \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mn} + (m+1) A_{mn} \right. \\ &\quad \left. - (m-1) B_{mn} + i n E_{mn} \right\} \end{aligned} \quad \dots (5)$$

となり、 n は果数、 $m=0, 1, 2, \dots$ であり、

$$N_\mu^2 = n^2 - \frac{\rho\phi^2}{\mu}, \quad N_\lambda^2 = n^2 - \frac{\rho\phi^2}{2\mu + \lambda} \quad \dots (6)$$

μ, λ は Lamé の弾性定数。また (3)~(5) 式中の関数はハンケル変換の逆変換公式より得られるもので円孔の径を a とすれば、 K を変形オニ種のベッセル関数として次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} G_m(Nr) &= \frac{K_m(Nr)}{K_m(Na)} \\ \chi_{mp}(Nr) &= -\frac{K_{m+1}(Nr)}{K_m(Na)} \\ \chi_{ms}(Nr) &= -\frac{K_{m-1}(Nr)}{K_m(Na)} \end{aligned} \right\} (7)$$

(3)~(5) 式中の係数 $\alpha_{mn}, \beta_{mn}, A_{mn}, B_{mn}, E_{mn}$ は円孔内面 ($r=a$) の変位や応力のフーリエ変換値として与えられるもので、つぎに示ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{mn} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \tau_{r\theta} \Big|_{r=a} \sin m\theta e^{-inz} d\theta dz \\ \beta_{mn} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_r \Big|_{r=a} \cos m\theta e^{-inz} d\theta dz \\ A_{mn} &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (u \cos m\theta + v \sin m\theta) \Big|_{r=a} e^{-inz} d\theta dz \\ B_{mn} &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (u \cos m\theta - v \sin m\theta) \Big|_{r=a} e^{-inz} d\theta dz \\ E_{mn} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} w \Big|_{r=a} \cos m\theta e^{-inz} d\theta dz \end{aligned} \right\} (8)$$

境界条件を満足するように $\alpha_{mn}, \beta_{mn}, A_{mn}, B_{mn}, E_{mn}$ を求め、(3)~(5) 式を (2) 式に適用し、変位成分を求め、フックの法則から応力成分を求めることができる。つまり各応力成分は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2\pi\lambda} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left\{ 2\mu \left(\frac{\partial \tilde{A}_{mn}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{B}_{mn}}{\partial r} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda \Delta \right\} \cos m\theta e^{inz} dn e^{ipt} \right. \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2\pi\lambda} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left\{ 2\mu \left(\frac{m+1}{r} \tilde{A}_{mn} - \frac{m-1}{r} \tilde{B}_{mn} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda \Delta \right\} \cos m\theta e^{inz} dn e^{ipt} \right. \\ \sigma_z &= \frac{1}{2\pi\lambda} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left\{ in 2\mu \tilde{w}_{mn} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda \Delta \right\} \cos m\theta e^{inz} dn e^{ipt} \right. \end{aligned}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2\pi\lambda} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \mu \left\{ \frac{\partial \tilde{A}_{mn}}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{B}_{mn}}{\partial r} - (m+1) \frac{\tilde{A}_{mn}}{r} \right. \right. \\ \left. \left. - (m-1) \frac{\tilde{B}_{mn}}{r} \right\} \sin m\theta e^{inz} dn e^{ipt} \right.$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{2\pi\lambda} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \mu \left\{ -\frac{m}{r} \tilde{w}_{mn} \right. \right. \\ \left. \left. + in (\tilde{A}_{mn} - \tilde{B}_{mn}) \right\} \sin m\theta e^{inz} dn e^{ipt} \right.$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2\pi\lambda} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} C_m \mu \left\{ \frac{\partial \tilde{w}_{mn}}{\partial r} \right. \right. \\ \left. \left. + in (\tilde{A}_{mn} + \tilde{B}_{mn}) \right\} \cos m\theta e^{inz} dn e^{ipt} \right.$$

$$\Delta = \frac{2\mu}{2\mu + \lambda} G_m(Nr) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mn} + (m+1) A_{mn} \right. \\ \left. - (m-1) B_{mn} + in E_{mn} \right\}$$

また、 $\frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{mp} = N G_m(Nr) - \frac{m+1}{r} \chi_{mp}(Nr)$

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{ms} = N G_m(Nr) + \frac{m-1}{r} \chi_{ms}(Nr)$$

$$\frac{\partial G_m(Nr)}{\partial r} = N \chi_{mp}(Nr) + \frac{m}{r} G_m(Nr) \quad \dots (9)$$

3. 境界条件

境界条件を考えるに先立ち、 $\tilde{A}_{mn}, \tilde{B}_{mn}$ については式の仮定から次の適合条件を満足しなければならない。すなわち

$$\begin{aligned} a A_{mn} = \tilde{A}_{mn} \Big|_{r=a} &= \frac{1}{N_\mu} \chi_{mp}(N_\mu a) \\ &\times \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mn} + (m+1) A_{mn} + (m-1) B_{mn} \right. \\ &\quad \left. - in E_{mn} \right\} + \frac{\mu n^2}{\rho\phi^2} \left\{ \frac{1}{N_\mu} \chi_{ms}(N_\mu a) - \frac{N_\mu}{n^2} \right. \\ &\quad \times \chi_{mp}(N_\mu a) \Big\} \times \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mn} + (m+1) A_{mn} \right. \\ &\quad \left. - (m-1) B_{mn} + in E_{mn} \right\} \quad \dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a B_{mn} = \tilde{B}_{mn} \Big|_{r=a} &= -\frac{1}{N_\mu} \chi_{ms}(N_\mu a) \\ &\times \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mn} + (m+1) A_{mn} + (m-1) B_{mn} \right. \\ &\quad \left. + in E_{mn} \right\} + \frac{\mu n^2}{\rho\phi^2} \left\{ \frac{1}{N_\mu} \chi_{ms}(N_\mu a) - \frac{N_\mu}{n^2} \right. \\ &\quad \times \chi_{ms}(N_\mu a) \Big\} \times \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mn} + (m+1) A_{mn} \right. \\ &\quad \left. - (m-1) B_{mn} + in E_{mn} \right\} \quad \dots (11) \end{aligned}$$

円孔面($r=a$)における境界条件は、Fig.1に示すように

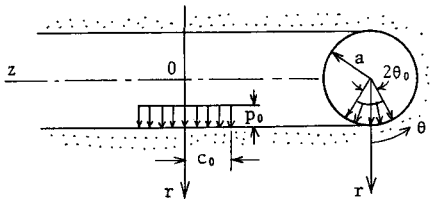


Fig.1. 荷重状態

円孔の内側に、周期的な半径方向の力が作用し、表面のせん断応力 τ_{rz} がないものとして、次のようになる。

$$i) \tau_{rz}|_{r=a} = 0 \quad \therefore \alpha_{mn} = 0 \quad (12)$$

$$ii) \sigma_r|_{r=a} = P_0(\theta, z) \\ \therefore \beta_{mn} = \int_{-c_0}^{c_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} P_0 \cos m\theta e^{inz} dz d\theta \quad (13)$$

$$iii) \tau_{rz}|_{r=a} = 0$$

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{ur}{\rho} \left[\frac{N_{\mu}}{n} \{ \chi_{mp}(Na) + \chi_{ms}(Na) \} - \frac{n}{N_{\mu}} \{ \chi_{mp}(Na) \right. \\ & \quad \left. + \chi_{ms}(Na) \} + 2 \left\{ \frac{N_{\mu}}{n} \chi_{mp}(Na) - \frac{N_{\mu}}{n} \chi_{mp}(Na) \right\} \right] \\ & \quad \times \{ B + 2\mu(m+1)A_{mn} - 2\mu(m-1)B_{mn} + inz\mu E_{mn} \} \\ & \quad + \frac{n}{N_{\mu}} \{ \chi_{mp}(Na) - \chi_{ms}(Na) \} \times \{ 2\mu(m+1)A_{mn} + 2\mu(m-1) \\ & \quad \times B_{mn} \} + i\mu \frac{n^2}{N_{\mu}} E_{mn} \{ \chi_{mp}(Na) + \chi_{ms}(Na) \} \\ & = 0 \quad \dots (14) \end{aligned}$$

以上の条件より未知定数は A_{mn} , B_{mn} , E_{mn} の3つとなり、式(10)、(11)、(14)よりそれらを決定することができる。

4. 数値計算

数値計算例として、簡単な場合の例を示す。外力は円孔軸に対して対称な場合、すなわち荷重状態はFig.1において $\theta_0 = \pi$, $c_0 = a/1$, $p_0 = 1$ であり、したがって $m=0$ の場合として円孔内面の1点($r=a$, $\theta=0$, $z=0$)における変位、応力について円孔の径 a を1とした

Lameの定数 μ , λ を0.4, 密度 ρ を1.0として外力の円振動数を0から1.5まで種々に変化させて数値計算を行なった結果をFig.2からFig.7に示す。

計算において、 n に対しリンソンの公式により適当な区間で500 π まで数値積分し、また計算は空閑工業大学情報処理教育センター、COMMO 700IIで行なった。

Fig.2, 3, 4はそれぞれ半径方向変位 u , 円周方向応力 σ_θ , 軸方向応力 σ_z の実数部であり、Fig.5, 6, 7はその虚数部である。ただし横軸に円振動数をとリ、縦軸に各変位、応力をとっている。

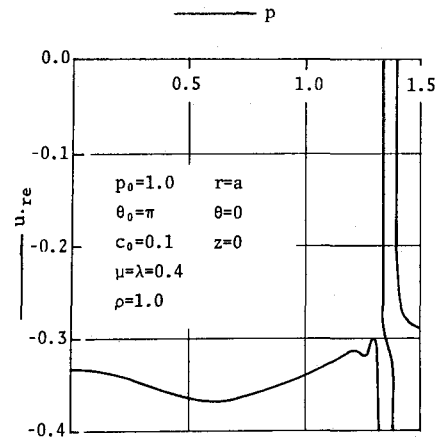


Fig.2 円孔面における u の実数部の変化

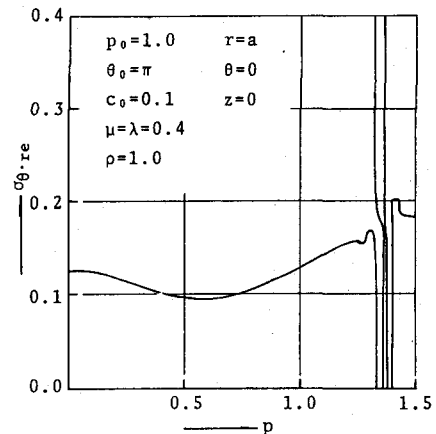


Fig.3 円孔面における σ_θ の実数部の変化

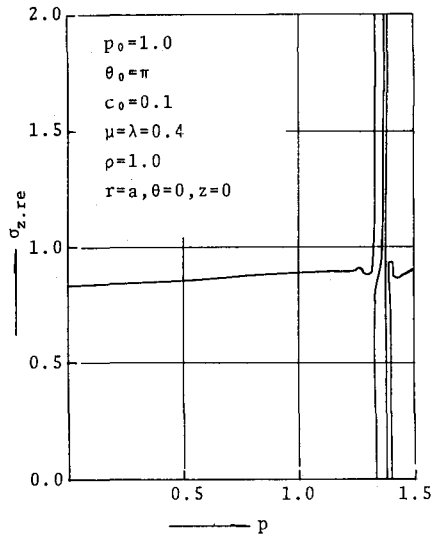


Fig. 4 円孔面における σ_z の実数部の変化

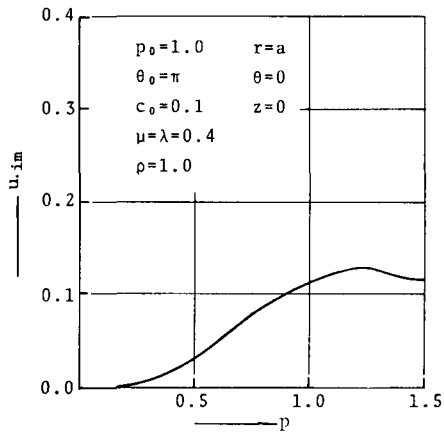


Fig. 5 円孔面における u の虚数部の変化

計算の結果は σ_r を除いて静的状態($p=0$)以外ではみな虚数部分が存在していて変位、応力ともに p が0から1.25付近まで、なめらかに変化しているが $p=1.3$ の近傍で不連続点が存在している。これは一種の固有値と考えられる。

各変位、応力の实数部分のなめらかに変化しているところについて、それらの極値を静的な場合と比較してみると、その比は変位 u について $u/u_{st}=1.11$ また応力 σ_z について $\sigma_z/\sigma_{zst}=0.76$ であり、いずれも $p=0.6$ のあたりで極小値をもっているが応力 σ_z に関しては大きな変動は見られず徐々に増加している。

虚数部分に関しては、みな連続であり $p=1.3$ 付近

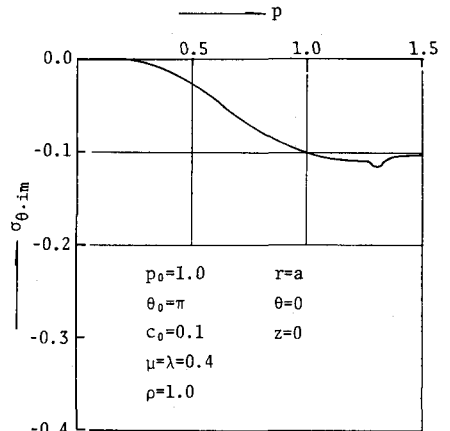


Fig. 6 円孔面における σ_θ の虚数部の変化

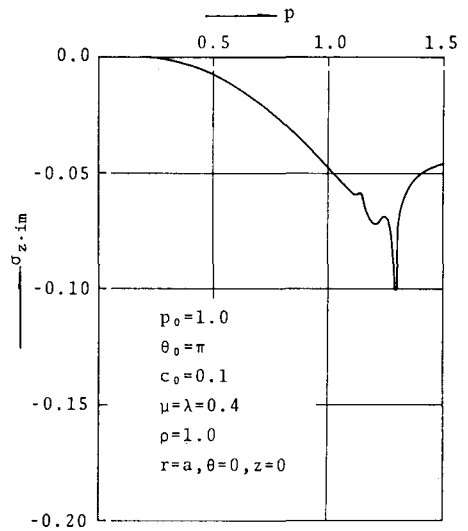


Fig. 7 円孔面における σ_z の虚数部の変化

では変動が見られ、とくに σ_z はそれが著しいが変位 u と応力 σ_θ は比較的なめらかに変化する。

以上、特殊な場合に対する計算のみ示したが、より一般の場合の解析については今後、行なう予定である。

参考文献

- 1) 松岡、能町：弾性媒体中にある円柱を伝わる曲げ振動の伝播速度について、土木学会論文報告集、オ258号
- 2) 松岡、能町：周期的外力をうける二相円柱の動的応答について、土木学会北海道支部論文報告集、オ36号 P95~98、1979