

I-20 せん断波を受ける無限弾性体中にある厚肉円筒の応力解析について

室蘭工業大学 正員 衣田 健一
北海道大学 正員 能町 純雄

1. まえがき

平面波を受けるトンネルや、埋設円筒構造物の動的問題は、これをモデル化すれば、平面波を受ける円孔を有する無限体や、無限体中にある厚肉円筒の動的問題となる。これらに関する研究は、これまで種々行なわれているが、まず円孔トンネルの問題では、円孔を有する無限弾性体が平面波を受けるときの動的応答解析として、Pao¹⁾、Mow²⁾や平井³⁾によって行なわれている。とくに平井らは、せん断波が円孔の軸線を含む平面に任意の角度で入射するときの問題を、変位ポテンシャルを用いて解析し、動的応力集中係数を求めている。また鶴飼⁴⁾は、埋設円筒の動的問題を、地盤を無限弾性体とし、円筒を荷重集として、これを組合せて解析し、動的応力集中係数を中心として、種々検討している。

著者⁵⁾もこれまで、円柱座標で表わされる波動伝播の問題を解析してきたが、ここではこれを覆工を施したトンネルや埋設円筒に対応するように、せん断波を受ける無限弾性体中の厚肉円筒の問題に適用し、円筒をも三次元弾性体として解析するものである。具体的には、円柱座標で表される三次元波動方程式を、フーリエ・ハンゲル変換を用いて解き、数値計算は弾性体と円筒の弾性定数比、円筒の肉厚などを変化させて行ない、結果も検討した。

2. 波動方程式の解

図-1に示すように、円筒軸方向にZ軸、半径方向にr軸、円周方向にθ軸をとり、Z-Z平面に平行にZ軸とφの角度、r方向からせん断波が入射するとき

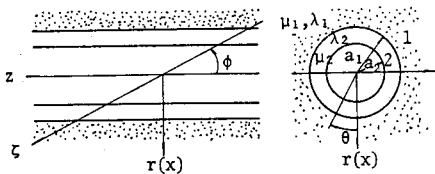


図-1 弾性体中の厚肉円筒

の、波動方程式を満足する変位解は、 u, v, w とされ、 r, θ, z 軸方向の変位成分として、円筒に対して、波動方程式にフーリエ・ハンゲル変換を用いて

$$u = \frac{1}{\pi} \sum_m C_m (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \cos m\theta \cdot e^{i\omega(t - \frac{z \cos \varphi}{V_s})} \quad (1)$$

$$v = \frac{1}{\pi} \sum_m (\tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr}) \sin m\theta \cdot e^{i\omega(t - \frac{z \cos \varphi}{V_s})} \quad (2)$$

$$w = \frac{1}{\pi} \sum_m C_m \tilde{W}_{mr} \cos m\theta \cdot e^{i\omega(t - \frac{z \cos \varphi}{V_s})} \quad (3)$$

ここで、 $C_0 = 1/2$, $C_m = 0$ ($m \neq 0$) であり

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{N_{\mu}} \chi_{mp}^{(k)}(N_{\mu}r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mk} + (m+1) A_{mk} \right. \right. \\ \left. \left. + (m-1) B_{mk} - i \frac{N}{Z} E_{mk} \right\} + \frac{\mu N^2}{\rho \omega^2} \left\{ \frac{1}{N_{\mu}} \chi_{mp}^{(k)}(N_{\mu}r) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{N_{\mu}}{N^2} \chi_{mp}^{(k)}(N_{\mu}r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} \right. \right. \\ \left. \left. - (m-1) B_{mk} + i N E_{mk} \right\} \right] \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{N_{\mu}} \chi_{ms}^{(k)}(N_{\mu}r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mk} + (m+1) A_{mk} \right. \right. \\ \left. \left. + (m-1) B_{mk} + i \frac{N}{Z} E_{mk} \right\} + \frac{\mu N^2}{\rho \omega^2} \left\{ \frac{1}{N_{\mu}} \chi_{ms}^{(k)}(N_{\mu}r) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{N_{\mu}}{N^2} \chi_{ms}^{(k)}(N_{\mu}r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} \right. \right. \\ \left. \left. - (m-1) B_{mk} + i N E_{mk} \right\} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[G_m^{(k)}(N_{\mu}r) E_{mk} - i \frac{2\mu N}{\rho \omega^2} \left\{ G_m^{(k)}(N_{\mu}r) \right. \right. \\ \left. \left. - G_m^{(k)}(N_{\mu}r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} - (m-1) B_{mk} \right. \right. \\ \left. \left. + i N E_{mk} \right\} \right] \quad (6) \end{aligned}$$

上式中、 ω は角速度、 V_s は伝播するせん断波の速度、 μ, λ は Lamé の弾性定数、 ρ は円筒の密度であり

$$\left. \begin{aligned} N &= \omega \cos \varphi / V_s, \quad N_{\mu}^2 = N^2 - \rho \omega^2 / \mu, \\ N_{\lambda}^2 &= N^2 - \rho \omega^2 / (\lambda + \mu) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

である。また式中の関数は、ハンゲル変換の逆変換により与えられる関数で、円筒の内径を a_2 、外径を a_1 、 $a_0 = a_2$ としたとき次のように書ける。

$$G_m^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na_k)}, \quad \chi_{mp}^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m+1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m+1,m}^{(k)}(Na_k)},$$

$$\chi_{ms}^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m+1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m+1,m}^{(k)}(Na_k)},$$

$$R_{j,m}^{(k)}(Nr) = I_j(Nr) K_m(Na_{k+1}) - (-1)^{j+m} J_m(Na_{k+1}) K_j(Nr)$$

$$j = m-1, m, m+1$$

ただし、 I, K は変形が1種および2種の Bessel 関数である。さらに、式中の係数 α, β, A, B, E は円筒の内外面の変位および応力で与えられるもので

$$d_{mk} = \int_0^{2\pi} (\tau_{r\theta})_{r=a_k} \sin m\theta d\theta, \quad \beta_{mk} = \int_0^{2\pi} (\sigma_r)_{r=a_k} \cos m\theta d\theta,$$

$$A_{mk} = \frac{1}{2a_k} \int_0^{2\pi} (u+v)_{r=a_k} \cos m\theta d\theta, \quad (a)$$

$$B_{mk} = \frac{1}{2a_k} \int_0^{2\pi} (u-v)_{r=a_k} \sin m\theta d\theta, \quad (b)$$

$$E_{mk} = \int_0^{2\pi} w_{r=a_k} \cos m\theta d\theta$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

と表わされる。

上式(4)~(6)は円筒に対してのものであるが、円孔を有する無限体の場合は、これらの式で、 $a_1 = \infty$ 、として、 $m=2$ のもののみを考慮することにより同様にえられるものに入射波動を加えることにより与えられるが、こゝでは式(4)~(6)中の関数は

$$G_m^{(1)}(Nr) = \frac{K_m(Nr)}{K_m(Na_2)}, \quad \chi_{mp}^{(1)}(Nr) = -\frac{K_{m+1}(Nr)}{K_m(Na_2)},$$

$$\chi_{ms}^{(1)}(Nr) = -\frac{K_{m-1}(Nr)}{K_m(Na_2)},$$

ととり、入射波動は、円柱座標で表わして

$$u^0 = u_0 \exp[i\omega\{t - (z\cos\varphi - r\sin\varphi\cos\theta)/v_s\}]$$

$$\times \cos\varphi \cos\theta, \quad (8)$$

$$v^0 = -u_0 \exp[i\omega\{t - (z\cos\varphi - r\sin\varphi\cos\theta)/v_s\}]$$

$$\times \cos\varphi \sin\theta, \quad (9)$$

$$w^0 = u_0 \exp[i\omega\{t - (z\cos\varphi - r\sin\varphi\cos\theta)/v_s\}]$$

$$\times \sin\varphi, \quad (10)$$

と取る。

3. 境界条件

せん断波をうける弾性体中の円筒の解は、上を求めた、円孔を有する無限弾性体と、円筒の解を境界の条件を満足するように組合せて行かう。式(4)~(6)

中の係数のうち、 A_{mk}, B_{mk} はまず次の適合条件を満足しはければならない。

$$a_k A_{mk} = \bar{A}_{mr} (r=a_k) \quad (11), \quad a_k B_{mk} = \bar{B}_{mr} (r=a_k) \quad (12)$$

そこで、円孔を有する無限体を表わす全てのものを上添字で、円筒の全てのものを上添字で区別するものとし、弾性体と円筒の境界では変位および応力が連続であるものとすれば、

i) $r=a_1$ において

$$u^{(1)} + u^{(2)} (r=a_1) = u^{(2)} (r=a_1) \quad (13)$$

$$v^{(1)} + v^{(2)} (r=a_1) = v^{(2)} (r=a_1) \quad (14)$$

$$w^{(1)} + w^{(2)} (r=a_1) = w^{(2)} (r=a_1) \quad (15)$$

$$\tau_{r\theta}^{(1)} + \tau_{r\theta}^{(2)} (r=a_1) = \tau_{r\theta}^{(2)} (r=a_1) \quad (16)$$

$$\tau_{r_z}^{(1)} + \tau_{r_z}^{(2)} (r=a_1) = \tau_{r_z}^{(2)} (r=a_1) \quad (17)$$

$$\sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(2)} (r=a_1) = \sigma_r^{(2)} (r=a_1) \quad (18)$$

と満足しはければならない。そこで、Bessel 関数 J_m (第1種 Bessel 関数) は、積分表示で

$$J_m(x) = \frac{i^{-m}}{\pi} \int_0^\pi e^{ix\cos\theta} \cos m\theta d\theta \quad (19)$$

と表わされるので、

$$e^{ix\cos\theta} = 2 \sum_m C_m i^m J_m(x) \cos m\theta \quad (20)$$

従って

$$\exp[i\omega\{t - (z\cos\varphi - r\sin\varphi\cos\theta)/v_s\}]$$

$$= \exp[i\omega(t - z\cos\varphi/v_s)]$$

$$\times 2 \sum_m C_m i^m J_m(\omega r \sin\varphi/v_s) \cos m\theta \quad (21)$$

と取る。この関係を式(8)~(10)に用いるのは、境界条件式(13)~(16)、(18)は、

$$A_{m1}^{(2)} + B_{m1}^{(2)} = A_{m2}^{(2)} + B_{m2}^{(2)} + u_0 \pi \cos\varphi i^{m-1}$$

$$\times \{J_{m-1}(\omega a_1 \sin\varphi/v_s) - J_{m+1}(\omega a_1 \sin\varphi/v_s)\} \quad (22)$$

$$A_{m1}^{(2)} - B_{m1}^{(2)} = A_{m2}^{(2)} - B_{m2}^{(2)} - u_0 \pi \cos\varphi i^{m-1}$$

$$\times \{J_{m-1}(\omega a_1 \sin\varphi/v_s) + J_{m+1}(\omega a_1 \sin\varphi/v_s)\} \quad (23)$$

$$E_{m1}^{(2)} = E_{m2}^{(2)} + u_0 \pi \sin\varphi i^m J_m(\omega a_1 \sin\varphi/v_s) \quad (24)$$

$$\alpha_{m1}^{(2)} = \alpha_{m2}^{(2)} + \frac{\mu_1}{2v_s} u_0 \pi \sin 2\varphi \cdot i^m \omega$$

$$\times \{J_{m+2}(\omega a_1 \sin\varphi/v_s) - J_{m-2}(\omega a_1 \sin\varphi/v_s)\} \quad (25)$$

$$\beta_{m1}^{(2)} = \beta_{m2}^{(2)} + \frac{\mu_1}{2v_s} u_0 \pi \omega \sin 2\varphi \cdot i^{m-1} \times$$

$$\{J_{m+2}(\omega a_1 \sin\varphi/v_s) - J_{m-2}(\omega a_1 \sin\varphi/v_s)\} \quad (26)$$

と取る。また、

$$T_{r2})_{r=a_2} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} C_k T_{rk} \omega = M_2$$

$$T_{rk} = \frac{2}{k+1} \left[\frac{1}{N_k a_k} G_m^{(k)}(N_k a_k) \alpha_{mk} - \frac{\mu N^2}{\rho \omega^2} \left\{ 2 \frac{N}{N_k} \right. \right. \\ \times (\chi_{\text{top}}^{(k)}(N_k a_k) + \frac{\mu}{N_k a_k} G_m^{(k)}(N_k a_k)) - \left(\frac{N}{N_k} + \frac{N_k}{N} \right) \\ \times (\chi_{\text{top}}^{(k)}(N_k a_k) + \frac{\mu}{N_k a_k} G_m^{(k)}(N_k a_k)) \{ \beta_{mk} + 2\mu(k+1) \\ \cdot A_{mk} - 2\mu(k-1) B_{mk} + 2\epsilon' \mu N E_{mk} \} + \epsilon' \frac{2\mu \mu N}{N_k^2 a_k} \\ \times G_m^{(k)}(N_k a_k) \{ (k+1) A_{mk} + (k-1) B_{mk} \} + \mu \left(\frac{N^2}{N_k} \right. \\ \left. \left. + N_k \right) (\chi_{\text{top}}^{(k)}(N_k a_k) + \frac{\mu}{N_k a_k} G_m^{(k)}(N_k a_k)) E_{mk} \right\} \quad (27)$$

とすれば、式(17)は

$$T_{m1}^{(2)} = T_{m2}^{(1)} + \frac{\mu_1}{2V_2} \pi U_0 \omega \omega = 2\varphi \cdot \epsilon' \cdot \mu \\ \times \{ T_{m1}^{(1)}(\omega a_1, \omega a_2 \varphi / V_2) - T_{m1}^{(1)}(\omega a_1, \omega a_2 \varphi / V_2) \} \quad (28)$$

ii). $r=a_2$ において

円筒の内面は中空であるとする。

$$T_{r0}^{(2)}|_{r=a_2} = 0 \quad \therefore \alpha_{m2}^{(2)} = 0 \quad (29)$$

$$\sigma_r^{(2)}|_{r=a_2} = 0 \quad \therefore \beta_{m2}^{(2)} = 0 \quad (30)$$

$$T_{r0}^{(2)}|_{r=a_2} = 0 \quad \therefore T_{m2}^{(2)} = 0 \quad (31)$$

を満足しなければならない。

以上の条件を満足するように、各係数を求めることにより、各変位応力成分を求めることができる。

4. 数値計算例

例として、ポアソン比0.25、弾性係数比 $E_2/E_1 = 10, 100$ 、内外径比 $a_1/a_2 = 1.1, 1.2$ 、 $\varphi = 0$

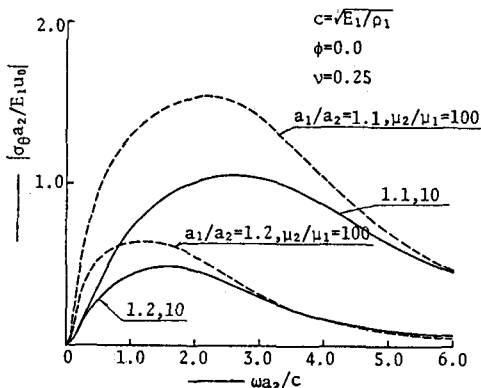


図-2 角速度 ω と応力 C_ϕ の関係 ($\varphi=0$)

の場合と $\varphi = \pi/4$ の場合の結果を示す。

図-3は、 $\varphi = 0$ の場合の結果で、 $r=a_2, \theta=\pi/2$ における C_ϕ の値である。この計算例の範囲では、 ω

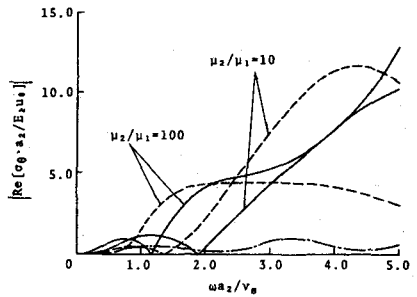
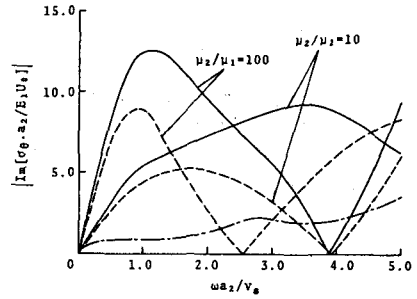


図-3 ω と C_ϕ ($r=a_2$)の関係 ($\varphi=0$)

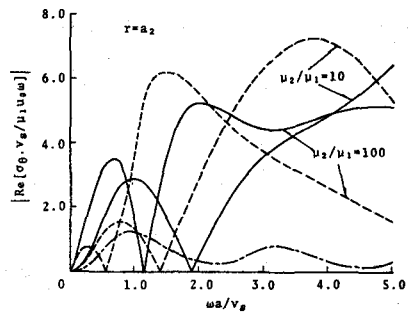
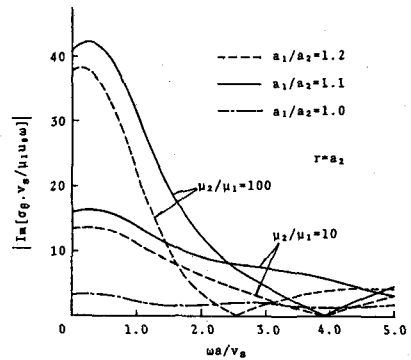


図-4 ω と動的応力集中係数 C_ϕ の関係 ($\varphi=\pi/4$)

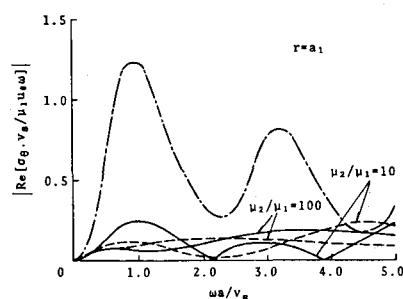
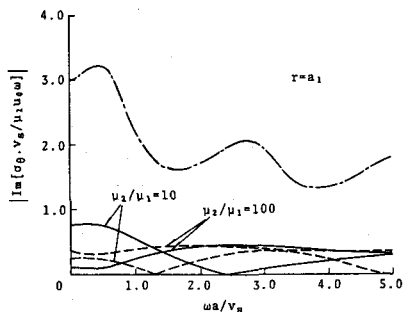


図-5 ωと動的応力集中係数の関係 (φ=π/4)

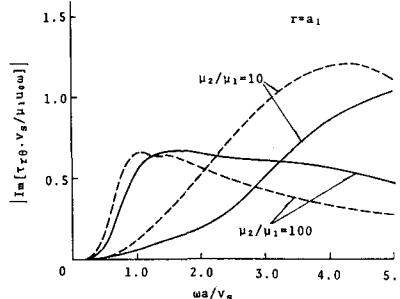
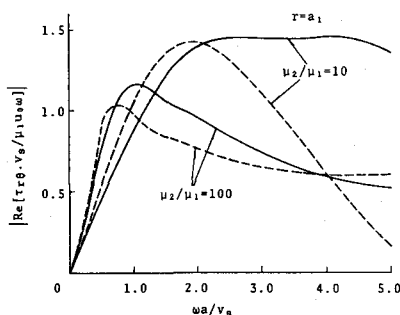


図-6 ωとτr₀の関係 (φ=π/4)

必ずしも小さくは
ないことを示
している。

図-4, 5は、こ
の場合の動的応力
集中係数も示した
ものである。

図-4は $r=a_2$
 $\theta=\pi/2$ の場合
のものであるが、
 $Im[\sigma_0]$ は ω のあ
まり大きくない範
囲では、それと
同様の関係が、
明らかであるが、
 ω が大きな範囲
では、 $Re[\sigma_0]$ は
やはりかなり複雑
に変化している。

が大きくなるに従って、極値を示した後ゆるやかに減
少している。また同一内外径比では、弾性係数比の大き
なものは、やはり円筒の弾性係数の大きなものは、弾
力も大きくなっており、同一弾性係数比では、内外径
比の大きなものは、やはり円筒の肉厚の大きなものは
弾力は小さく弱っている。

図-3～6は、同一条件で $\varphi=\pi/4$ の場合の結果
である。

図-3は、図-2と同様 $r=a_2$ 、 $\theta=\pi/2$ にお
ける σ_0 の値を示したものであるが、円孔を有する無限
体の場合の値を图中に一点鎖線で示してある (図-4
も同様)。いずれの場合も ω の変化について、かなり
複雑に変化しており、一定の結果を述べるには問題
もあるが、 $Im[\sigma_0]$ は、ほぼ $\varphi=0$ と同様に、同一弾
性係数比では円筒の肉厚の厚いものほど弾力は小さい。
(しかし、 $Re[\sigma_0]$ は ω の値によつて、これらの大小順
係は異なる。また、円筒の存在 (ない円孔を有する無
限体の場合と比較すると、いずれも、多くの部分で、
円筒が存在するとき円筒部の応力は、当然のこと
から円筒が存在しないとき円孔部の応力より大きい
が、弾性係数比程大きくはなっていない。すなわち、

図-5は $r=a_1$ 、 $\theta=\pi/2$ の無限弾性体の σ_0 の動
的応力集中係数も示したものであるが、図から明らか
なように、 ω はとんどの部分で、円孔を有する無限
体と比較して、小さくなるを示している。しかし、肉厚
比や弾性係数比に対しては、あまり一定の傾向はない
ようである。

図-6は、 $r=a_1$ 、 $\theta=\pi/2$ における $\tau_{r\theta}$ の動的
応力集中係数も示したものである。この場合も ω に対
して一定の傾向はない。

5. まとめ

以上の若干の結果から、無限弾性体中の円筒の存在
により、必ずしもかなり減りうるが円筒部の厚さ、弾
性係数の違いによる影響は、せん断波の伝速度に
よってかなり異なることがわかった。

参考文献

- 1) Pao, Y. H. ; J. Appl. Mech. 29, 299, 1962
- 2) How, C. C. and Meite, L. J. ; J. Appl. Mech. 30, 599, 1963
- 3) 平井・佐武 ; 土木学会第34回年次学術講演会、講演要
集、第1部、493, (1979), 4) 鶴岡・山口 ; 土木学会論文
集、Vol. 19, No. 4, 93, (1979), 5) 能町・松岡・山下 ; 土木学会
論文集、第243号、1, 1980,