

I-19 半無限弾性体表面上に剛結された片持ばりの応答について

北海道大学正員 能町純雄
室蘭工業大学正員 松岡健一
専修短期大学正員 〇三上敬司

1. まえがき

本論文は、半無限弾性体表面上に剛結された片持ばりが、その表面を伝搬している水平振動に及ぼす影響について検討した。

i) 上部構造物である片持ばりの応答に関しては、曲げの他にせん断による変形を考慮し、さらに、慣性抵抗については、たわみ角による回転運動をも考慮する場合の Timoshenko Beam 理論を用い、はりの長さ方向に対しては、有限 Fourier 変換を施し、解析している。

ii) 下部の半無限弾性体の応答に関しては、著者らは、回転方向に Fourier 変換、半径方向、長さ方向に Hankel 変換を施して求めたそれぞれの方向変位を用いて、それに Biot の理論を適用し、さらに Weigh のを用いて平均水平変位、平均回転角とそれに及ぼす外力と複素コンプライアンスとで表現することができた。この事は半無限弾性体表面上に剛結している円形基礎に、その表面上を伝搬している水平振動が作用する場合の円形剛体下の弾性体の応答について求めている。

この i), ii) を組み合わせて、地盤-構造物系の動的相互作用の検討してみた。

2. 解析方法

i) Timoshenko Beam 理論による水平振動に対する基礎微分方程式は、

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \rho A \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (y + \bar{u}_1) \right\} \quad (1) \quad V - \frac{\partial M}{\partial z} = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$V = \kappa' G A \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \phi \right) \quad (3) \quad M = -EI \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (4)$$

V はせん断力、 M は曲げモーメント、 y ははりのたわみ、 ϕ は曲げモーメントのみのたわみ角、 $\frac{\partial \phi}{\partial z} - \phi$ はせん断ひずみ、 $\bar{u}_1$ は水平振動の振幅、 I は断面二次モーメント、 A ははりの断面積、 κ' はせん断変形に対する補正係数、 ρ ははりの密度である。

ところで、 $V = V^* e^{i\omega t}$ 、 $y = y^* e^{i\omega t}$ 、 $\phi = \phi^* e^{i\omega t}$ 、 $M = M^* e^{i\omega t}$ 、 $\bar{u}_1 = \bar{u}_1^* e^{i\omega t}$ と式(1),(2),(3),(4)に代入して、 $t_{z=0}^* = t_0^*$ 、 $\phi_{z=0}^* = \phi_a$ 、 $\phi_{z=l}^* = \phi_l^*$ の境界条件のもとで有限 Fourier 変換を施す。式(1),(4)には、cosine 変換、式(2),(3)には、sine 変換を行って、Matrix 表示すれば、

$$\begin{bmatrix} m' & 0 & \rho \omega^2 A & 0 \\ 1 & m' & 0 & \rho \omega^2 I \\ \frac{1}{\kappa' G A} & 0 & m' & 1 \\ 0 & \frac{1}{EI} & 0 & m' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_m[V^*] \\ C_m[M^*] \\ C_m[y^*] \\ S_m[\phi^*] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0^* \\ 0 \\ 0 \\ \phi_a - C_1^m \phi_l^* \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$m' = \frac{\pi \omega l}{L}$$

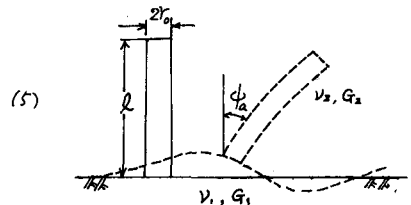


図-1

ここで、有限Fourier変換は次式となる。ただし、片持ばりの長さを l とする。

$$S_m[V^*] = \int_0^l V^* \sin \frac{m\pi}{l} z \, dz, \quad C_m[M^*] = \int_0^l M^* \cos \frac{m\pi}{l} z \, dz$$

$$C_m[y^*] = \int_0^l y^* \cos \frac{m\pi}{l} z \, dz, \quad S_m[\psi^*] = \int_0^l \psi^* \sin \frac{m\pi}{l} z \, dz$$

式(5)を解くと、

$$S_m[V^*] = \left(\frac{l}{\pi}\right) \frac{\left\{m^2 - n_1^2 \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \omega^2\right\} V_0^* + EA \omega^2 \left(\frac{l}{\pi}\right) m \left\{\psi_a - (-1)^m \psi_l^*\right\}}{(m^2 - n_1^2)(m^2 - n_2^2)} \quad (6)$$

$$C_m[M^*] = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{\left\{m^2 V_0^* + \frac{EA \omega^2}{\rho^2} \left\{m^2 + (\rho^2 - \omega^2 \eta^2) \left(\frac{l}{\pi}\right)^2\right\} \psi_a - (-1)^m \psi_l^*\right\}}{(m^2 - n_1^2)(m^2 - n_2^2)} \quad (7)$$

$$C_m[y^*] = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{\left\{\rho^2 \left\{m^2 - \omega^2 \left(\frac{l}{\pi}\right)^2\right\} + \frac{\rho^2}{\rho^2} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2\right\} V_0^* + EA m^2 \left\{\psi_a - (-1)^m \psi_l^*\right\}}{EA(m^2 - n_1^2)(m^2 - n_2^2)} \quad (8)$$

$$S_m[\psi^*] = \left(\frac{l}{\pi}\right) \frac{\left\{\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \rho^2 m V_0^* + EA \left\{m^2 - \omega^2 \eta^2 m \left(\frac{l}{\pi}\right)^2\right\} \psi_a - (-1)^m \psi_l^*\right\}}{EA(m^2 - n_1^2)(m^2 - n_2^2)} \quad (9)$$

ここで、

$$\left. \begin{matrix} n_1^2 \\ n_2^2 \end{matrix} \right\} = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \left\{ \frac{\omega^2(1+\nu^2) \pm \sqrt{\omega^4(1-\nu^2) + 4\omega^2 \rho^2}}{2} \right\}$$

$$\omega^2 = \frac{a_0^2}{2(1+\nu_2)\rho_0^2}, \quad \eta^2 = \frac{2(1+\nu_2)}{K'}, \quad \rho^2 = \frac{A}{I}, \quad a_0^2 = \frac{P}{G} \rho_0^2, \quad \nu_2 \text{ は } II \text{ のポアソン比}$$

式(6)~(9)を長さ方向に関してFourier逆変換すると

$$V^* = \frac{1}{(n_1^2 - n_2^2)} \left[\left\{ f_{\frac{\pi}{2}}^{(3)} - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \omega^2 f_{\frac{\pi}{2}}^{(4)} \right\} V_0^* + \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 EA \omega^2 \left\{ f_{\frac{\pi}{2}}^{(4)} \psi_a + g_{\frac{\pi}{2}}^{(4)} \psi_l^* \right\} \right] \quad (10)$$

$$M^* = \frac{l}{\pi(n_1^2 - n_2^2)} \left[f_{\frac{\pi}{2}}^{(2)} \cdot V_0^* + \frac{EA \omega^2}{\rho^2} \left\{ \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 (\rho^2 - \omega^2 \eta^2) f_{\frac{\pi}{2}}^{(4)} + f_{\frac{\pi}{2}}^{(2)} + \frac{n_1^2 - n_2^2}{\pi} \left(\frac{(\rho^2 - \omega^2 \eta^2)}{n_1^2 n_2^2} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi^2}{l^2 \omega^2} \right) \right\} \psi_a \right. \\ \left. - \frac{EA \omega^2}{\rho^2} \left\{ (\rho^2 - \omega^2 \eta^2) \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 g_{\frac{\pi}{2}}^{(4)} + g_{\frac{\pi}{2}}^{(2)} + \frac{n_1^2 - n_2^2}{\pi} \left(\frac{(\rho^2 - \omega^2 \eta^2)}{n_1^2 n_2^2} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi^2}{l^2 \omega^2} \right) \right\} \psi_l^* \right] \quad (11)$$

$$y^* = \frac{l}{\pi(n_1^2 - n_2^2)} \left[\frac{1}{EA} \left\{ \rho^2 f_{\frac{\pi}{2}}^{(2)} - \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 (\omega^2 \eta^2 - \rho^2) \left(f_{\frac{\pi}{2}}^{(4)} + \frac{n_1^2 - n_2^2}{\pi n_1^2 n_2^2} \right) + \frac{(n_1^2 - n_2^2)\pi}{\omega^2 l^2} \right\} V_0^* + f_{\frac{\pi}{2}}^{(4)} \psi_a - g_{\frac{\pi}{2}}^{(4)} \psi_l^* \right] - \bar{u} \quad (12)$$

$$\psi^* = \frac{1}{(n_1^2 - n_2^2)} \left[\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{\rho^2}{EA} f_{\frac{\pi}{2}}^{(4)} V_0^* + \left\{ f_{\frac{\pi}{2}}^{(3)} - \omega^2 \eta^2 \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 f_{\frac{\pi}{2}}^{(4)} \right\} \psi_a + \left\{ g_{\frac{\pi}{2}}^{(3)} - \omega^2 \eta^2 \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 g_{\frac{\pi}{2}}^{(4)} \right\} \psi_l^* \right] \quad (13)$$

ここで、

$$f_{\frac{\pi}{2}}^{(0)} = \frac{\cos \pi n_1 (1 - \frac{\pi}{l})}{n_1 \sin \pi n_1} - \frac{\cos \pi n_2 (1 - \frac{\pi}{l})}{n_2 \sin \pi n_2}, \quad g_{\frac{\pi}{2}}^{(0)} = f_{1-\frac{\pi}{2}}^{(0)} = \frac{\cos \pi n_1 \frac{\pi}{2}}{n_1 \sin \pi n_1} - \frac{\cos \pi n_2 \frac{\pi}{2}}{n_2 \sin \pi n_2}, \text{ etc}$$

$f_{\frac{\pi}{2}}^{(1)}, g_{\frac{\pi}{2}}^{(1)}, f_{\frac{\pi}{2}}^{(2)}, g_{\frac{\pi}{2}}^{(2)}, f_{\frac{\pi}{2}}^{(3)}, g_{\frac{\pi}{2}}^{(3)}$ は、省略する。

境界条件として、 $z=l$ で $M_l^* = 0$, $z=0$ で $y^* = u_a$ を用いて、 $z=0$ のときの M_0^*, V_0^* を求めると、

$$\begin{bmatrix} V_0^* \\ M_0^* \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{l} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a + \bar{u} \\ \psi_a \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$a_{11} = \frac{(\eta_1^2 - \eta_2^2)\pi}{f_{33}}, \quad a_{12} = \frac{\frac{f_{23}}{f_{11}} g_0^{(2)} - f_0^{(2)}}{f_{33}}, \quad a_{22} = \frac{f_{33}}{(\eta_1^2 - \eta_2^2)\pi}$$

ここで、

$$f_{11} = \frac{\omega^2}{f^2} \left[\left(\frac{l}{\pi} \right)^2 (\delta^2 - \omega^2 \eta^2) f_1^{(0)} + f_1^{(2)} + \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\pi} \left(\frac{\delta^2 - \omega^2 \eta^2}{\eta_1^2 \eta_2^2} \right) \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi^2}{l^2 \omega^2} \right]$$

$$f_{22} = \frac{\omega^2}{f^2} \left[\left(\frac{l}{\pi} \right)^2 (\delta^2 - \omega^2 \eta^2) g_1^{(0)} + g_1^{(2)} + \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\pi} \left(\frac{\delta^2 - \omega^2 \eta^2}{\eta_1^2 \eta_2^2} \right) \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi^2}{l^2 \omega^2} \right]$$

$$f_{33} = \eta^2 f_0^{(2)} + \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 (\delta^2 - \omega^2 \eta^2) (f_0^{(0)} + \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\pi \eta_1^2 \eta_2^2}) + \frac{(\eta_1^2 - \eta_2^2)\pi}{\omega^2 l^2} - \frac{f_1^{(2)}}{f_{11}} g_0^{(2)}$$

$$f_{44} = f_{22} + a_{12} \cdot f_{11}^{(2)}$$

$$f_{55} = a_{22} \cdot f_0^{(2)} + \frac{\omega^2}{f^2} \left[\left(\frac{l}{\pi} \right)^2 (\delta^2 - \omega^2 \eta^2) (f_0^{(0)} - f_{44} \frac{g_0^{(0)}}{f_{11}}) + f_0^{(2)} - f_{44} \frac{g_0^{(2)}}{f_{11}} + \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\pi} \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \frac{(\delta^2 - \omega^2 \eta^2)}{\eta_1^2 \eta_2^2} + \frac{\pi^2}{l^2 \omega^2} \right] (1 - f_{44})$$

ii) 半無限弾性体表面上に剛結された円形剛体が存在する場合、その表面上を水平振動が伝播しているとすの円形剛体下の平均水平変位 u_a 、平均回転角 ϕ_a と水平せん断力 T_0 、回転モーメント M_0 との関係式に複素コンプライアンスを導入して表わすと、次式となる。

C_{HH} : 水平力による複素コンプライアンス

$C_{MH} = C_{HM}$: 水平力による回転力の複素コンプライアンスと回転力による水平力の複素コンプライアンスは Betti の原理より等しい。

C_{HM} : 回転力による複素コンプライアンス

$$\begin{bmatrix} u_a \\ \phi_a \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{HH} & C_{MH} \\ C_{HM} & C_{HM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ M_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式(15)に式(14)を代入して、水平振動の振幅に対する

片持ばり下の水平方向の変位の振幅の絶対値 $|\bar{u} + u_a|/|\bar{u}|$ 、水平振動の振幅に対する片持ばり持地面へ回転角に等しい長さを持つたものの振幅の絶対値 $|\bar{l} \cdot \phi_a|/|\bar{u}|$ を求めると、

$$\frac{|\bar{u} + u_a|}{|\bar{u}|} = \frac{|A_{22}|}{|A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}|}, \quad \frac{|\bar{l} \cdot \phi_a|}{|\bar{u}|} = \frac{|A_{21}|}{|A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}|} \quad (16)$$

ここで、

$$A_{11} = 1 + EA \left(\frac{Q_{11}}{l} C_{HH} + Q_{21} C_{HM} \right), \quad A_{12} = EA \left(\frac{Q_{12}}{l} C_{HH} + Q_{22} C_{HM} \right)$$

$$A_{21} = EA (Q_{11} C_{MH} + l \cdot Q_{21} C_{HM}), \quad A_{22} = 1 + EA (Q_{12} C_{MH} + l \cdot Q_{22} C_{HM})$$

3. 数値計算例

数値計算例におけるパラメーターは、半無限弾性体のポアソン比 $\nu_1 = 0.5$ 、はりのポアソン比 $\nu_2 = 0.0$ 、半無限弾性体のせん断係数 G_1 に対するはりのせん断係数 G_2 との比 $G_2/G_1 = 2.0$ とし、さらに、はりの持地面半径 r_0 に対するはりの高さ l との比 l/r_0 を 4.0、

5.0、6.0 とし、横軸に無次元円振動数 $a_0 = \sqrt{\frac{\rho}{G}} \omega r_0$ に対する $|\bar{u} + u_a|/|\bar{u}|$ の値を 図-2、図-3、図-4 に示している。

図-2 ($l/r_0 = 4.0$) において、 $a_0 = 0.34$ で共振点が現われ、 $|\bar{u} + u_a|/|\bar{u}| = 5.0$ を示している。無次元円振動数 a_0 が大きくなるに従って、無次元円振動数 a_0 の変化に対し、 $|\bar{u} + u_a|/|\bar{u}| = 1.0$ 付近で激しく変動している。

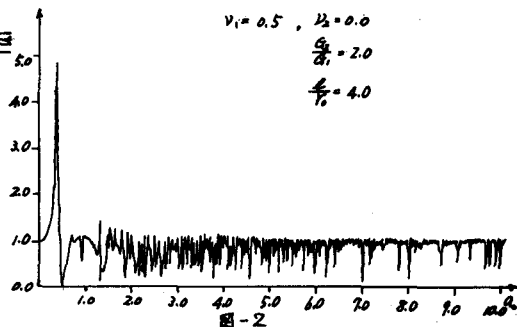


図-2

図-3 ($\ell/r_0 = 5.0$)において, $Q_0 = 0.22$, $Q_1 = 0.42$ で共振点が箇所現われ, その値が, それぞれ, 8.0, 3.0である。 $\ell/r_0 = 4.0$ のときと同様に無次元円振動数 α が大きくなるに従って, $|\bar{u} + u_d|/|\bar{u}| = 1.0$ の付近で着しく上下に変動している。

図-4 ($\ell/r_0 = 6.0$)において, $Q_0 = 0.15$, $Q_1 = 0.3$, $Q_2 = 0.65$ で共振点が3箇所現われ, その値がそれぞれ, 10.0, 4.0, 2.5である。このときも, $\ell/r_0 = 4.0$, $\ell/r_0 = 5.0$ のときと同様な傾向を示している。

4. 結び

本研究は, 半無限弾性体上に伝搬している水平振動がその弾性体上に剛結している片持ばりの応答による影響について, 検討してみた。その結果, 水平振動の振幅に対する片持ばり下の水平方向の変位の振幅の絶対値に関して, 低い無次元円振動数で共振現象がみられ, 片持ばりが地盤の浮動している持地面の半径 r_0 に対するその高さとの比が高くなるに従って, 共振点の数が増加し, 最大ピーク点が高くなっている。このことは, 片持ばりの高さが高くなるに従って, 片持ばりの応答による水平振動に及ぼす影響が大きい, さらに, 無次元円振動数の変化によって, 着しく変動している。

以上のことにより, 構造物と地盤との間の動的相互作用による影響が大きいことを意味していると思われる。

以上の計算は, 北海道大学大型計算機センターの HITAC M-200-H で行った。

参考文献

- 1) 小坪 清真 : 土木振動学, 森北出版
- 2) Luco, J and Westmann, R : "Dynamic Response of Footings" Proceeding of A.S.C.E., P1381, 1971
- 3) Bycroft, G : "Soil Structure Interaction at Highway Frequency Factors", Earthquake Engineering, Vol.5, No.3, P235, 1977
- 4) 能町能雄, 松岡健一, 三上敬司 : 半無限弾性体の水平振動に及ぼす表面上の剛体基礎の複素コンプライアンスに関する考察, 昭和55年度土木学会第35回年次学術講演会講演概要集, I-237, P.470~P.471, 1980
- 5) 岩崎正二, 能町能雄, 高野博 : 固定端に速度入力を与えられた片持ばりの初期応答について, 昭和55年度土木学会第35回年次学術講演会講演概要集, I-242, P.480~P.481, 1980

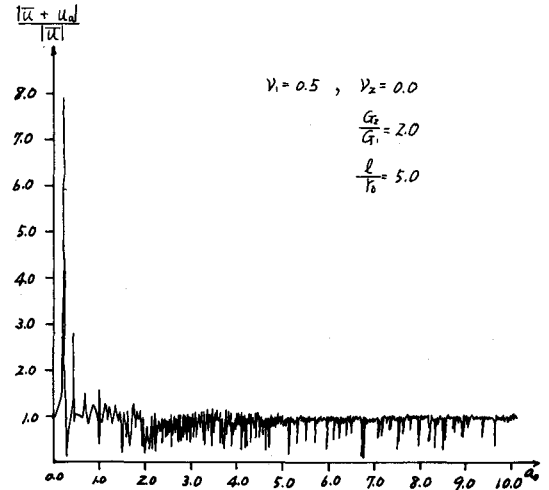


図-3

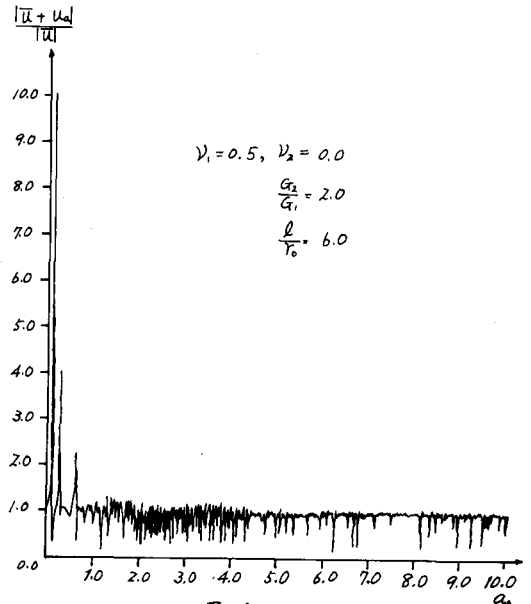


図-4