

I-12 部分分布荷重を担う矩形中等厚板の一解法について

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. 結 言

矩形厚板の解析に関する研究は、古くより、数多くの研究者によって取り扱われている。たとえば、Woinowsky-Krieger¹⁾, Love²⁾, Reissner³⁾, Kromm⁴⁾, Mindlin⁵⁾ 及び Pao⁶⁾ などがその代表的解析方法を見出している。その後、多くの研究者によつて、これらの解法の改良が試みられ、現在では、Amis-Tsui-myam⁷⁾ あるいは堀川・園田⁸⁾ に見受けられるように、直交異方性矩形厚板の解析方法にまで研究が進展している。厳密な3次元弾性論による解法及び3次元弾性論とReissner理論との併用による堀川・園田の解法を除いて、前述の解析方法を弾性論的視点より見れば、Loveの解法が最も正確な解析方法と思われる。

Loveの解法は、平面応力解、一般化平面応力解及び荷重条件に関する特殊解の三つの解より構成されており、いずれの解もつり合い方程式及び適合条件式を厳密に満足しているが、三つの解のうち、最後の特殊解が与えられた荷重条件を満足するようにつり合い方程式及び適合条件式より直接導出することが、一般的には、至ずかしいとされていた。この難点が、古くよりある解法の割には、余り採用されなかった一つの原因となっていたが、この難点は、今から27年前に、秦⁹⁾ が loading function を導入して解決した。Loveの解法に見受けられるもう一つの難点は、曲げに関する境界条件が薄板理論と同様に、二つの条件でしか規定できない点である。通常の厚板理論においては、三つの条件が規定され、境界条件をより正確に満足できることを考えれば、Loveの解法におけるこの二つ目の難点は、厚板理論における一つの短所とも考えられる。

本報告において述べる矩形中等厚板の一解析方法は、本質的にはLoveの解法に負うものであるが、一つの難点とされている特殊解については、3次元応力解の一部を当て、もう一つの難点については、板の中央面に対して反対称一般化平面応力解を追加し、任意の荷重条件に対処でき、さらに、曲げに関する境界条件を三つ規定できるように試みた解法であり、Loveの解法の一つの改良方法と考えられる。この解法は、もちろん、Loveの解法の長所に違背するものではなく、四つの解、すなわち、平面応力解、一般化平面応力解、3次元応力解及び板の中央面に対して反対称一般化平面応力解は、すべてのつり合い方程式及び適合条件式を厳密に満足しており、また、変位成分あるいは応力成分に関する何んらの仮定も含んでいない。

2. 平面応力解

解の形式は、文献(2)に詳述されているので省略し、図-1に示した矩形厚板が $x=0$ 及び $y=0$ に関して対称な荷重を担い、 $x=\pm a/2$ の両辺が単純支持されているものとする。変位及び応力成分は次式となる。

$$Ez = \sum_{n=1}^{\infty} (d_n) \sin d_n x \{ (1+\nu) P_2^{(n)} \cosh d_n y + P_2^{(n)} x \times [\{ 2-\nu(d_n z)^2 \} \cosh d_n y + (1+\nu) d_n y \sinh d_n y] \} \quad (1)$$

$$Ev = \sum_{n=1}^{\infty} (d_n) \cos d_n x \{ (1+\nu) P_2^{(n)} \sinh d_n y - P_2^{(n)} x \times [\{ 1+\nu \{ (d_n z)^2 - 1 \} \} \sinh d_n y - (1+\nu) d_n y \times \cosh d_n y] \} \quad (2)$$

$$Ew = -\nu z \sum_{n=1}^{\infty} (d_n^2) \cos d_n x \cdot 2 P_2^{(n)} \cosh d_n y \quad (3)$$

$$\sigma_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} (d_n^2) \cos d_n x [P_2^{(n)} \cosh d_n y + P_2^{(n)} \{ 2-\nu x \times (d_n z)^2 / (1+\nu) \} \cosh d_n y + d_n y \sinh d_n y] \quad (4)$$

$$\sigma_{yy} = - \sum_{n=1}^{\infty} (d_n^2) \cos d_n x [P_2^{(n)} \cosh d_n y + P_2^{(n)} \{ d_n y x$$

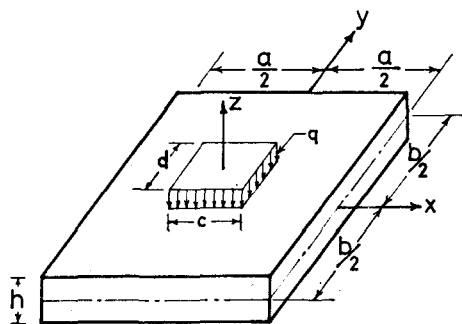


図-1 座標系

$$x \cdot \sinh di y - \nu (di z)^2 \cosh di y / (1 + \nu) \} \dots \dots \dots (5)$$

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^{\infty} (di^2) \cdot \sin di x \{ P_i^{(v)} \sinh di y + P_i^{(w)} [1 - \nu (di z)^2 / (1 + \nu)] \sinh di y + di y \cosh di y \} \dots \dots (6)$$

また、応力は、次のように定義される。

$$T_{xx} = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \sigma_{xx} dx, \quad T_{yy} = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \sigma_{yy} dx, \quad S_{xy} = -S_{yx} = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \sigma_{xy} dx, \quad Q_x = 0, \quad Q_y = 0 \dots \dots \dots (7)$$

3. 一般化平面応力解

この解の形式も文献(2)に詳述されているので、変位及び応力成分を示せば、たとえば、次の通りである。

$$Eu = (1 + \nu) \sum_{i=1}^{\infty} (di) \sin di x \{ Q_i^{(v)} \cosh di y + Q_i^{(w)} [di y \sinh di y - (2 - \nu) (di z)^2 \cosh di y / 3(1 - \nu)] \} \dots \dots (8)$$

$$Ev = -(1 + \nu) \sum_{i=1}^{\infty} (di) \cos di x \{ Q_i^{(v)} \sinh di y + Q_i^{(w)} [di y \cosh di y + \{1 - (2 - \nu) / 3(1 - \nu)\} (di z)^2 \} x \times \sinh di y \} \dots \dots \dots (9)$$

$$Ew = (1 + \nu) \sum_{i=1}^{\infty} \cos di x \{ Q_i^{(v)} \cosh di y + Q_i^{(w)} [di y \sinh di y - \{ (di z)^2 - 2\nu (di z)^2 \} / 2(1 - \nu)] x \times \cosh di y \} \dots \dots \dots (10)$$

$$\sigma_{xx} = (h^2 - 4z^2) / \{ 4(1 - \nu) \} \sum_{i=1}^{\infty} (di^3) \sin di x Q_i^{(v)} \cosh di y \dots \dots \dots (11)$$

$$\sigma_{yy} = -(h^2 - 4z^2) / \{ 4(1 - \nu) \} \sum_{i=1}^{\infty} (di^3) \cos di x Q_i^{(v)} \sinh di y \dots \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \sigma_{xx} dx, \quad Q_y = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \sigma_{yy} dx, \quad T_{xx} = 0, \quad T_{yy} = 0, \quad S_{xy} = -S_{yx} = 0 \\ M_x &= \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} x \sigma_{xx} dx, \quad M_y = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} x \sigma_{yy} dx, \quad M_{xy} = -M_{yx} = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} (-2x \sigma_{xy}) dx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

4. 板の中央面に対して反対称の一般化平面応力解

この解の形式は、文献(4)に示されており、変位及び応力成分は、たとえば、次の通りである。

$$Eu = (1 + \nu) (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin kn z \sum_{i=1}^{\infty} (lin) \sin di x Ei \cosh lin y \dots \dots \dots (14)$$

$$Ev = -(1 + \nu) (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin kn z \sum_{i=1}^{\infty} (di) \cos di x Ei \sinh lin y, \quad w = 0 \dots \dots \dots (15)$$

$$\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin kn z \sum_{i=1}^{\infty} (di \sin) \cos di x Ei \cosh lin y, \quad \sigma_{zz} = 0 \dots \dots \dots (16)$$

$$\sigma_{xy} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} / 2 \sin kn z \sum_{i=1}^{\infty} (di^2 + lin) \sin di x Ei \sinh lin y \dots \dots \dots (17)$$

$$\sigma_{xz} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} / 2 kn \cos kn z \sum_{i=1}^{\infty} (lin) \sin di x Ei \cosh lin y \dots \dots \dots (18)$$

ここで

$$kn = n\pi/h, \quad di = i\pi/a, \quad lin = \sqrt{di^2 + kn^2}, \quad n = 1, 3, \dots, \quad i = 1, 3, \dots \dots (19)$$

5. 3次元応力解

一般化された Neuber の解⁽¹⁰⁾を用いることにすると、次の通りである。

$$2Gu = -\text{grad} (\bar{\Phi}_0 + \bar{\Psi}) + 4(1 - \nu) \bar{\Psi} + 2\nu \text{rot rot } \bar{\Psi} \dots \dots \dots (20)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} u &= (u, v, w), \quad r = (x, y, z), \quad \bar{\Psi} = (\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2, \bar{\Psi}_3), \quad \bar{\Psi} = (\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2, \bar{\Psi}_3) \\ \nabla^2 \bar{\Phi}_0 &= 0, \quad \nabla^2 \bar{\Psi} = 0, \quad \nabla^2 \bar{\Psi} = 0, \quad \nabla^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

応力成分が $\sigma = 0$ 及び $\gamma = 0$ に関して対称であることに留意して、式(21)より変位ポテンシャルを求める、次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}_0 &= -\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos di x \cos \beta_s y (C_{is}^{(v)} \cosh \pi is z + \bar{C}_{is}^{(w)} \sinh \pi is z) \\ \bar{\Psi}_3 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos di x \cos \beta_s y (C_{is}^{(v)} \sinh \pi is z + \bar{C}_{is}^{(w)} \cosh \pi is z) \\ \bar{\Psi}_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sin di x \sin \beta_s y (C_{is}^{(v)} \cosh \pi is z + \bar{C}_{is}^{(w)} \sinh \pi is z) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

ここで

$$\beta_s = 2s\pi/h, \quad \pi is = \sqrt{di^2 + \beta_s^2}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \dots \dots (23)$$

式(20)の解には、他の変位ポテンシャル $\bar{\Psi}_1, \dots, \bar{\Psi}_2$ が含まれているが、荷重条件を満たすだけの特殊

解としては、式 (22) の三つの変位ポテンシャルで十分である。式 (22) を式 (20) に代入すると、変位成分は次のように求められる。

$$2G u = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sin d_n x \cos s y \left\{ (d_n C_{is}^{(u)} - 2\beta_s \bar{C}_{is}^{(u)}) \cosh \eta_{is} z + (d_n \bar{C}_{is}^{(u)} - 2\beta_s C_{is}^{(u)}) \sinh \eta_{is} z + \right. \\ \left. - C_{is}^{(u)} d_n z \sinh \eta_{is} z - \bar{C}_{is}^{(u)} d_n z \cosh \eta_{is} z \right\} \dots \dots \dots (24)$$

$$2G v = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos d_n x \sin s y \left\{ (\beta_s C_{is}^{(v)} + 2d_n \bar{C}_{is}^{(v)}) \cosh \eta_{is} z + (\beta_s \bar{C}_{is}^{(v)} + 2d_n C_{is}^{(v)}) \sinh \eta_{is} z + \right. \\ \left. - C_{is}^{(v)} \beta_s z \sinh \eta_{is} z - \bar{C}_{is}^{(v)} \beta_s z \cosh \eta_{is} z \right\} \dots \dots \dots (25)$$

$$2G w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos d_n x \cos s y \left\{ \eta_{is} C_{is}^{(w)} + (3-4\nu) C_{is}^{(w)} \right\} \sinh \eta_{is} z + \left\{ \eta_{is} \bar{C}_{is}^{(w)} + (3-4\nu) \bar{C}_{is}^{(w)} \right\} \times \\ \times \cosh \eta_{is} z - C_{is}^{(w)} \eta_{is} z \cosh \eta_{is} z - \bar{C}_{is}^{(w)} \eta_{is} z \sinh \eta_{is} z \dots \dots \dots (26)$$

また、たわみ成分は、変位成分より必ずみ成分を求め、Hooke の法則を用いると、たとえば、次式となる。

$$\sigma_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (\eta_{is}) \cos d_n x \cos s y \left\{ \eta_{is} C_{is}^{(u)} + 2(1-\nu) C_{is}^{(u)} \right\} \cosh \eta_{is} z + \left\{ \eta_{is} \bar{C}_{is}^{(u)} + 2(1-\nu) \bar{C}_{is}^{(u)} \right\} \times \\ \times \sinh \eta_{is} z - C_{is}^{(u)} \eta_{is} z \sinh \eta_{is} z - \bar{C}_{is}^{(u)} \eta_{is} z \cosh \eta_{is} z \dots \dots \dots (27)$$

$$\sigma_{zz} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sin d_n x \cos s y \left\{ d_n \eta_{is} C_{is}^{(u)} - \beta_s \eta_{is} C_{is}^{(u)} + (1-2\nu) d_n C_{is}^{(u)} \right\} \sinh \eta_{is} z + \left\{ d_n \eta_{is} \bar{C}_{is}^{(u)} - \beta_s \eta_{is} \bar{C}_{is}^{(u)} + \right. \\ \left. + (1-2\nu) d_n \bar{C}_{is}^{(u)} \right\} \cosh \eta_{is} z - C_{is}^{(u)} d_n \eta_{is} z \cosh \eta_{is} z - \bar{C}_{is}^{(u)} d_n \eta_{is} z \sinh \eta_{is} z \dots \dots \dots (28)$$

以上の四つの解において、 E は縦弾性係数、 ν はせん断弾性係数、 ν はポアソン比を表わすものとする。

6. 荷重条件及び境界条件

図-1 に示した様に、荷重は垂直荷重の場合を考えると、荷重条件は次の通りである。

$$\begin{aligned} z = h/2 \text{ において } \quad \sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0, \quad \sigma_{zz} = -p(x, y) \\ z = -h/2 \text{ において } \quad \sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0 \end{aligned} \dots \dots \dots (29)$$

$$\text{ここで } p(x, y) = \begin{cases} p & [-c/2 < x < c/2 \text{ かつ } -d/2 < y < d/2] \\ 0 & \text{[上記以外の領域]} \end{cases} \dots \dots \dots (30)$$

式 (24) の荷重条件より、3次元応力解に含まれていた任意定数は、次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} C_{is}^{(u)} &= - \frac{C_{is}}{\eta_{is}} Q_{is} (S_{is} \cosh S_{is} - 1 + 2\nu), \quad C_{is}^{(v)} = - \frac{C_{is}}{\eta_{is}} Q_{is}, \quad C_{is}^{(w)} = 0 \\ \bar{C}_{is}^{(u)} &= - \frac{C_{is}}{\eta_{is}^2} P_{is} (S_{is} \tanh S_{is} - 1 + 2\nu), \quad \bar{C}_{is}^{(v)} = - \frac{C_{is}}{\eta_{is}} P_{is}, \quad \bar{C}_{is}^{(w)} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

そこで

$$\left. \begin{aligned} Q_{is} &= \frac{\sinh S_{is}}{2(\sinh S_{is} \cosh S_{is} + S_{is})}, \quad P_{is} = \frac{\cosh S_{is}}{2(\sinh S_{is} \cosh S_{is} - S_{is})}, \quad S_{is} = \frac{\eta_{is} h}{2} \\ C_{is} &= p \left\{ 4 \left(\frac{d}{c} \right) \frac{\partial}{\partial x} \sin \frac{i\pi c}{2a} + \frac{8 \partial}{\partial x^2} \sin \frac{i\pi c}{2a} \sin \frac{s\pi d}{c} \right\} \\ S_{is} &= \begin{cases} 1 & [s=0] \\ 0 & [s \geq 1] \end{cases}, \quad \bar{S}_{is} = \begin{cases} 1 & [s \geq 1] \\ 0 & [s=0] \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots \dots (32)$$

また、境界条件は、 $x = \pm a/2$ の2辺が単純支持、 $y = \pm b/2$ の2辺が自由の場合を考えると、次の通りである。

$$x = \pm a/2 \text{ において } \quad T_{xx} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \partial v / \partial z = 0, \quad M_x = 0 \dots \dots \dots (33)$$

$$y = \pm b/2 \text{ において } \quad T_{yy} = 0, \quad S_{yx} = 0, \quad M_y = 0, \quad Q_y = 0, \quad M_{yx} = 0 \dots \dots \dots (34)$$

式 (33) の境界条件は、変数 d_i を持つ三角関数の性質により、恒等的に満足されている。式 (34) の最初の二つの条件より、平面応力解と3次元応力解を結合して、任意定数は次の様に求められる。

$$P_i^{(u)} = - \frac{\sinh \xi_i'}{3\xi_i' + \sinh \xi_i' \cosh \xi_i'} \left\{ 1 - \frac{\nu (d_i h)^2}{12(1+\nu)} + \xi_i' \cosh \xi_i' \cdot \frac{4\nu}{h} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1)^s C_{is}}{\eta_{is}} Q_{is} \sinh S_{is} \right\}$$

$$z'_i = d_i b / 2$$

$$P_i^{(3)} = \frac{\sinh z'_i}{z'_i + \sinh z'_i \cosh z'_i} \cdot \frac{4\nu}{h} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s e_{is}}{\pi_{is}^3} Q_{is} \sinh z_{is} \quad \left. \vphantom{\sum_{s=0}^{\infty}} \right\} \dots (35)$$

式(34)の第3, 4及び第5の三つの条件より, 三つの解を結合して任意定数を求めると次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} Q_2^{(1)} &= \frac{12}{h^3 d_i^2} \cdot \frac{\sinh \eta_{in}}{\Delta_3 \sinh z'_i} \left[4d_i^2 + k_n^2 \{ 1 + \nu - (1-\nu) z'_i \coth z'_i + \frac{2-\nu}{20} (d_i h)^2 \} \right] \sum_{s=0}^{\infty} \pi_{is} \\ Q_2^{(2)} &= \frac{12(1-\nu) k_n^2}{h^3 d_i^2} \cdot \frac{\sinh \eta_{in}}{\Delta_3 \sinh z'_i} \sum_{s=0}^{\infty} \pi_{is}, \quad E_{is} = -\frac{2k_n^2}{\Delta_3} \sum_{s=0}^{\infty} \pi_{is} \end{aligned} \right\} \dots (36)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \Delta_3 &= \sinh \eta_{in} [4d_i \sinh \coth \eta_{in} - \coth z'_i \{ 4d_i^2 + (3+\nu) k_n^2 \} + k_n^2 z'_i (1-\nu) \operatorname{cosech}^2 z'_i] \\ \pi_{is} &= \frac{(-1)^s e_{is}}{\pi_{is}^2} \left[\left(\frac{\beta_s}{\pi_{is}} \right)^2 + 4\nu \left(\frac{d_i}{\pi_{is}} \right)^2 \right] /_{is} (z_{is} \cosh z_{is} - \sinh z_{is}), \quad \eta_{in} = \frac{\sinh b}{2} \end{aligned} \right\} \dots (37)$$

したがって, 式(31), (35)及び式(36)において, 平面応力解, 一般化平面応力解, 3次元応力解及び板の中央面に対して反対称の一般化平面応力解に含まれていくすべての任意定数が求められたことになる。

7. 数値計算例

計算例として, 図-1に示した矩形中等厚板が中央に部分分布荷重を担った場合について解析した。 $b/a = 1.0$, $c = d = a/4$, $\nu = 0.17$ として, h/a の比を種々変えて計算した。図-2には, せん断応力 σ_{yz} の分布を示した。 $h/a = 2/8$ の場合においては, 板の中央面($z=0$)に対してほぼ対称の放物線分布となり, 薄板理論による解析と同じ傾向を示している。図-3には, $x=0$, $y=0$ における垂直応力 σ_{yy} の分布を示した。 $h/a = 1/5$ の場合においては, 非線形分布が強く現われ, 値も小さいが, $h/a = 1/8$ の場合においては, 圧縮側がわずかに凸, 引張側がわずかに凹の曲線を示しているが, ほぼ直線分布に近い。図-4には, $x=0$, $y=a/4$ における σ_{yy} の分布を示した。応力の値を図-3におけるそれより2オーダー下げて書いてあるので, $h/a = 1/8$ の場合においても見掛上, 非線形分布が強く現われているが, 図-3と同じオーダーで書くとほとんど直線分布となる。図-5には, $x=0$, $y=0$ における垂直応力 σ_{zz} の分布を示した。 $h/a = 1/2$ の場合は, 中等厚板理論による解析では不適当であるが, 参考のため示した。 $h/a = 1/8$ の場合においては, 図-3の σ_{yy} より, さらに直線分布に近い分布を示している。図-6には, $x=0$, $y=a/4$ におけるせん断応力 σ_{yz} の分布を示した。 $h/a = 1/8$ の場合は, 図-2の σ_{yz} と同様に板の中央面に対してほぼ対称の放物線分布を示している。図-7には, $x=0$, $y=a$ における σ_{yy} の値を示した。

厳密な3次元弾性論による解析によれば, この値は, 理論的に消失すべきものであるが, 本解法においては, 境界条件を応力成分の代りに合応力で規定しているため, 理論的にも値が残ることになるが, 実際に数値上どの程度の値が残るかを図示したものである。 $h/a = 1/5$ と $h/a = 1/8$ の場合を比較すると, 板厚が小さい程値も小さくなっており, 図-3の $x=0$, $y=0$ における値と比較すると3オーダー落ちており, 工学的には, 十分な精度と思われる。図-8には, $x=0$, $y=a$ における σ_{yz} の値を示した。この値も厳密には消失しななければならないが, 図-6の値と比較すると2オーダー値が落ちており, 数値的には十分な精度と思われる。

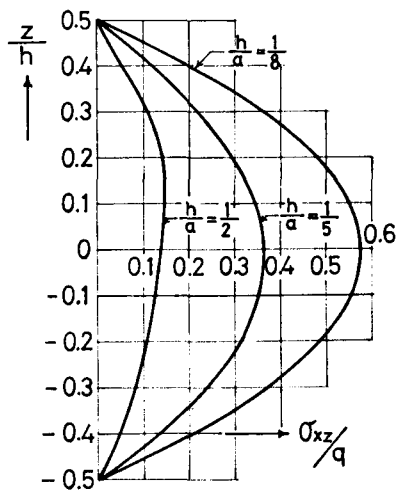


図-2 $x=a/4$, $y=0$ における σ_{yz} の分布

8. 結 語

矩形中厚板の一解法について述べ、例題として、相対する2辺単純支持、他の2辺自由の矩形厚板が中央に部分分布荷重を担った場合について解析した。この解法は、もちろん、他の周辺条件、たとえば、全周辺単純支持あるいは全周辺固定の境界条件を持つ、矩形厚板の解析にも応用することができ、また、四極座標系において四つの解が求められていれば、円形厚板あるいは扇形厚板の解析にも応用できる解法である。荷重条件に関する特殊解は、垂直荷重あるいはせん断荷重の場合に関しても、単に3次元応力解の任意定数を与えられ、荷重条件に応じて決めればよいだけであり、Loveの解法に比較してはるかに容易に求められる。また、自由辺の曲げに関する境界条件は、Loveの解法によれば、薄板理論と同様に曲げモーメントと反力との二つの条件で規定しなければならないが、この解法においては、通常の厚板理論と同様に曲げモーメント、捩りモーメント及びせん断力の三つの条件を規定することができる。この

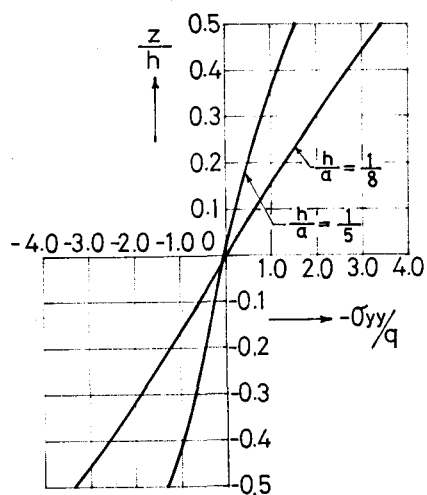


図-3 $x=0, y=0$ における σ_{yy} の分布

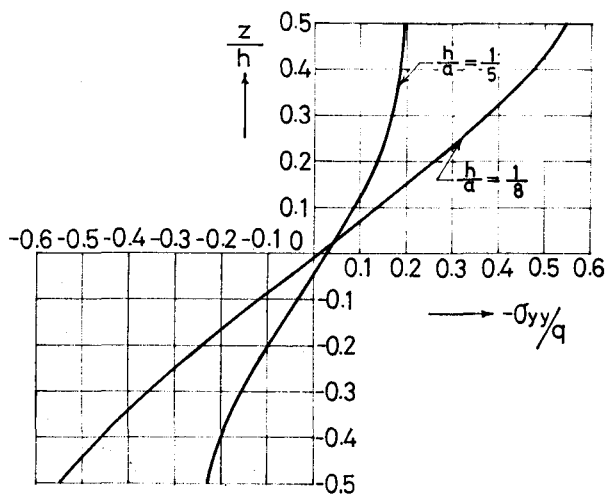


図-4 $x=0, y=a/4$ における σ_{yy} の分布

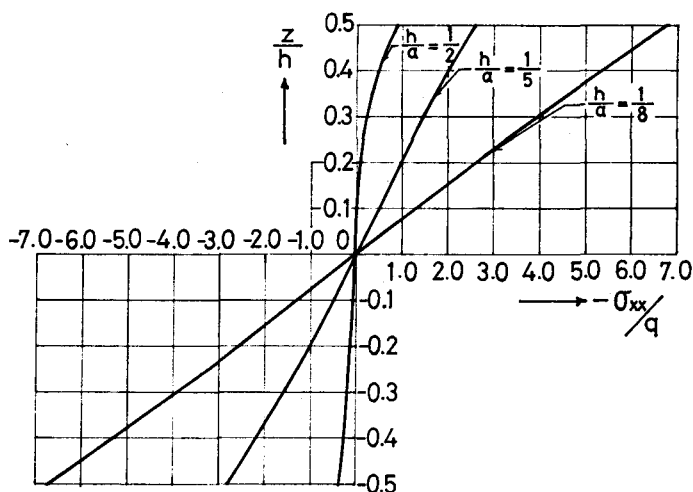


図-5 $x=0, y=0$ における σ_{xx} の分布

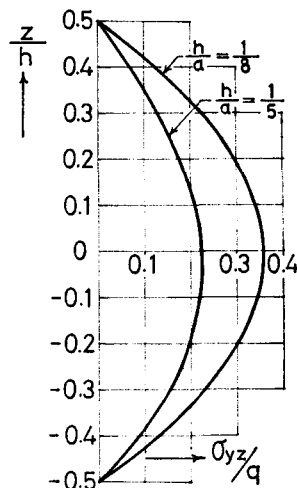


図-6 $x=0, y=a/4$ における σ_{yz} の分布

自由面における境界条件の相異が、自由面を離れた板の内部におけるせん断力及び撓りモーメントに少なからぬ影響を与える当然のことではあるが、三つの条件を規定した方が、厳密な三次元弾性論により解析した結果と良く一致することは、扇形中等厚板の解析においすでに示したところであり、本解法は、明らかに Love の解法を改良した解法と考えられる。

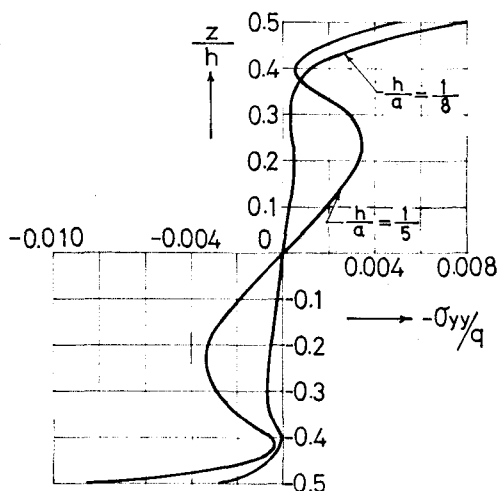


図-7 $x=0, y=a$ における σ_{yy} の値

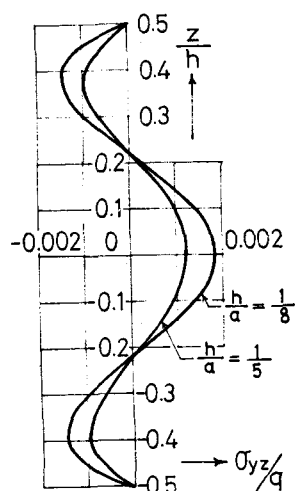


図-8 $x=0, y=a$ における σ_{yz} の値

薄板理論の板厚に関する適用限界については、一般的に、 $h/a \leq 0.10$ とされているが、部分分布荷重の様な局所的な荷重の場合には、載荷領域及びその近傍における応力の値を正確に算出することは、薄板理論によつては困難であり、また、厚板理論によつても必ずかしいようである。載荷領域を離れた位置における応力については、 $h/a \leq 0.12$ の場合においても、薄板理論により十分な正確さで算出できることは、第7章において示唆したが、もし、数値計算が可能であれば、厳密な三次元弾性論による解析、中等厚板理論による解析及び薄板理論による解析の三者を、種々の荷重条件及び境界条件を持った板について行い、その適用性を広汎に検討しなければ、明言できないように思われる。

参考文献

- 1) Woinowsky-Krieger, S.: Der Spannungszustand in dicken elastischen Platten, Ing.-Arch., Band IV, Heft 3, S. 203-226, 1933
- 2) Love, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Chap. XXII, 4th ed., Dover Pub., 1944
- 3) Reissner, E.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. Appl. Mech., Vol. 12, pp. A69-A77, 1953
- 4) Kromm, A.: Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik, Ing.-Arch., Band 21, S. 266-286, 1953
- 5) Mindlin, R. D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31-38, 1951
- 6) Panc, V.: Theories of Elastic Plates, Chaps. 2-6, Noordhoff, 1975
- 7) Ambartsumyan, S. A.: 異方弾性板の理論, 第2及び第3章, 森北出版, 1975 (邦訳)
- 8) 堀川都志雄・園田忠一郎: 自由面を有する直交異方性厚板の一解法, 土木学会第35回年次学術講演会, 第1部, 昭和55-9
- 9) Hata, K.: On the thick plate problem, Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Univ., Vol. 9, No. 3, pp. 428-477, 1953 and Vol. 9, No. 4, pp. 487-563, 1954
- 10) 奈 謹一: ミニ元応力問題の解法について, 北海道大学工学部研究報告, 第13号, pp. 13-44, 昭30