

I-11 側圧を受ける短円筒並びに長円筒の3次元応力解析について

北見工業大学 正員 O三宅 和子
北見工業大学 正員 奥村 勇

1. まえがき

近年、円筒座標系における非軸対称問題の研究は数多く見受けられるようになったが、有限円筒の非軸対称問題に関する研究は、特殊な荷重条件における短円筒についての吉野・宇津木¹⁾らの研究が見受けられるだけで、あまり見当たらないようである。

本研究は、側面に部分的内圧あるいは外圧を受ける短円筒および長円筒の3次元応力問題を拡張されたNeuberの解を用いて解析し、変位および応力性状を明らかにしたものである。両端面自由の円筒を対象に考えると、短円筒の場合は、端面の境界条件を応力成分で規定しなければならないので解法が複雑になるが、端面およびその近傍での変位および応力特性を正確に把握することができない。また、長円筒の場合には、端面の直応力に関する条件を合応力で規定できるため解法および数値計算が短円筒に比較してはるかに容易になるが、端面およびその近傍における変位および応力成分は、境界条件を合応力で規定した影響を受け、正確に算出することはおぼつかしい。このように短円筒の解法と長円筒の解法には境界条件の規定の仕方に相違があり、長円筒の解析はSaint-Venantの原理を容認した上で弾性論的に正しいものであるので、本来ならば、有限円筒を解析する際には、短円筒としての解法を用いるのが望ましい。しかしながら、短円筒としての解析は、解法および数値計算が長円筒のそれらに比較して複雑となるのみでなく、円筒の長さが長くなるにつれ、数値計算が困難となる。したがって、有限円筒の解析において、長円筒としての解析が適用できる円筒の長さを知ることは工学的に有用であると思われるので、有限円筒を短円筒としての解析および長円筒としての解析の両者を行い、有限円筒を長円筒として解析できる長さに関する適用限界の一つの目安を与えた。

2. つり合い方程式の解と変位ポテンシャル

物体力が0の場合の弾性体のつり合い方程式の解として拡張されたNeuberの解を用いると変位ベクトルを次のように表わすことができる。

$$2GU = -\text{grad}(\Phi_0 + W\bar{\varpi}) + 4(1-\nu)\bar{\varpi} + 2\text{rot } Q \quad \text{----- (1)}$$

ここで、 $U = (U_r, U_\theta, U_z)$, $W = (V, 0, Z)$, $\bar{\varpi} = (\varpi_r, \varpi_\theta, \varpi_z)$,

$$Q = (0, 0, Q_z), \quad \nabla^2 \Phi_0 = 0, \quad \nabla^2 Q_z = 0, \quad \nabla^2 \bar{\varpi} = 0$$

また、 G, ν はそれぞれせん断弾性係数およびポアソン比を表わし、 ∇^2 は円筒座標系におけるラプラス演算子である。

図-1に示したように応力場が $Z=0$ に関して対称となることを考慮して、式(1)より変位ポテンシャルを求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\theta z} &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cos n\alpha z \{ A_{mn}^{(1)} J_m(\alpha_m r) + A_{mn}^{(2)} Y_m(\alpha_m r) \} \\ \Phi_z &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \sin n\alpha z \{ C_{mn}^{(1)} J_m(\alpha_m r) + C_{mn}^{(2)} Y_m(\alpha_m r) \} \\ Q_z &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin m\theta \cos n\alpha z \{ B_{mn}^{(1)} J_m(\alpha_m r) + B_{mn}^{(2)} Y_m(\alpha_m r) \} \\ \Phi_{\theta r} &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cos n\beta z \{ D_{mn}^{(1)} I_m(\beta_m r) + D_{mn}^{(2)} K_m(\beta_m r) \} \\ \Phi_r &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cos n\beta z \left\{ \left(\frac{\beta}{2}\right) \{ F_{mn}^{(1)} I_{m-1}(\beta_m r) + F_{mn}^{(2)} I_{m+1}(\beta_m r) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + E_{mn}^{(1)} K_{m-1}(\beta_m r) + E_{mn}^{(2)} K_{m+1}(\beta_m r) \right\} \right\} \\ \Phi_\theta &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin m\theta \cos n\beta z \left\{ \left(\frac{\beta}{2}\right) \{ -F_{mn}^{(1)} I_{m-1}(\beta_m r) + F_{mn}^{(2)} I_{m+1}(\beta_m r) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - E_{mn}^{(1)} K_{m-1}(\beta_m r) + E_{mn}^{(2)} K_{m+1}(\beta_m r) \right\} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (2)}$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\theta z} &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cos n\alpha z \{ A_{mn}^{(1)} J_m(\alpha_m r) + A_{mn}^{(2)} Y_m(\alpha_m r) \} \\ \Phi_z &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \sin n\alpha z \{ C_{mn}^{(1)} J_m(\alpha_m r) + C_{mn}^{(2)} Y_m(\alpha_m r) \} \\ Q_z &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin m\theta \cos n\alpha z \{ B_{mn}^{(1)} J_m(\alpha_m r) + B_{mn}^{(2)} Y_m(\alpha_m r) \} \\ \Phi_{\theta r} &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cos n\beta z \{ D_{mn}^{(1)} I_m(\beta_m r) + D_{mn}^{(2)} K_m(\beta_m r) \} \\ \Phi_r &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cos n\beta z \left\{ \left(\frac{\beta}{2}\right) \{ F_{mn}^{(1)} I_{m-1}(\beta_m r) + F_{mn}^{(2)} I_{m+1}(\beta_m r) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + E_{mn}^{(1)} K_{m-1}(\beta_m r) + E_{mn}^{(2)} K_{m+1}(\beta_m r) \right\} \right\} \\ \Phi_\theta &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin m\theta \cos n\beta z \left\{ \left(\frac{\beta}{2}\right) \{ -F_{mn}^{(1)} I_{m-1}(\beta_m r) + F_{mn}^{(2)} I_{m+1}(\beta_m r) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - E_{mn}^{(1)} K_{m-1}(\beta_m r) + E_{mn}^{(2)} K_{m+1}(\beta_m r) \right\} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (3)}$$

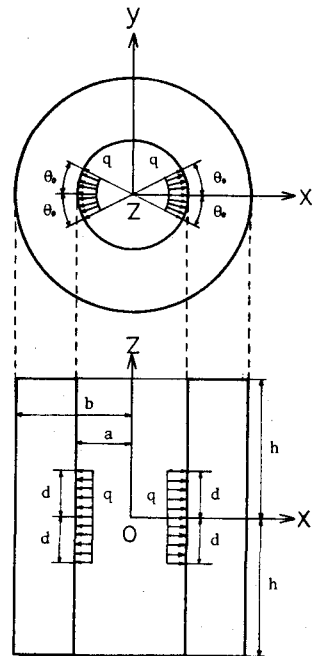


図-1 有限円筒

$$\Phi_r^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \{ D_{m0}^{\omega} r^m + D_{m0}^{\omega} r^{-m} \}, \quad \Phi_r^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \{ F_{m0} r^{m+1} + E_{m0} r^{-m+1} \}, \quad \left. \begin{aligned} \Phi_\theta^0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin m\theta \{ F_{m0} r^{m+1} - E_{m0} r^{-m+1} \} \\ \Phi_r^{\infty} &= A_{00} r + B_{00}/r, \quad \Phi_\theta^{\infty} = C_{00} \theta \end{aligned} \right\} \text{----- (4)}$$

$$\Phi_r^{\infty} = A_{00} r + B_{00}/r, \quad \Phi_\theta^{\infty} = C_{00} \theta \text{----- (5)}$$

ここで、 $D_{m0}^{\omega}, D_{m0}^{\omega}, \dots, C_{00}$ は境界条件によって決定される未知定数、 α_{ms}, β_n および m は助変数である。

3. 変位および応力成分

変位成分は次式により求められる。

$$\text{式(2)からは, } 2Gu_r^1 = -2\alpha_2 \partial \Phi_r / \partial r - 2\alpha_2 \partial \Phi_\theta / \partial r + (2/r) \partial \Phi_\theta / \partial \theta, \quad 2Gu_\theta^1 = -(2/r) \partial \Phi_r / \partial \theta - (1/r) \partial \Phi_\theta / \partial \theta - 2\alpha_2 \partial \Phi_r / \partial r, \quad \left. \begin{aligned} 2Gu_z^1 &= -2\alpha_2 \partial \Phi_r / \partial z - \alpha_2 \partial \Phi_\theta / \partial z + (3-4\nu) \Phi_r \\ 2Gu_\theta^1 &= -2\alpha_2 \partial \Phi_r / \partial \theta - \alpha_2 \partial \Phi_\theta / \partial \theta \end{aligned} \right\} \text{----- (6)}$$

$$\text{式(3)からは, } 2Gu_r^2 = -r \partial \Phi_r / \partial r - \alpha_2 \partial \Phi_r / \partial r + (3-4\nu) \Phi_r, \quad 2Gu_\theta^2 = -2\alpha_2 \partial \Phi_r / \partial \theta - (1/r) \partial \Phi_\theta / \partial \theta + 4(1-\nu) \Phi_\theta, \quad \left. \begin{aligned} 2Gu_z^2 &= -r \partial \Phi_r / \partial z - \alpha_2 \partial \Phi_r / \partial z \\ 2Gu_\theta^2 &= -r \partial \Phi_r / \partial \theta - \alpha_2 \partial \Phi_\theta / \partial \theta \end{aligned} \right\} \text{----- (7)}$$

$$\text{式(4)からは, } 2Gu_r^0 = -r \partial \Phi_r^0 / \partial r - \alpha_2 \partial \Phi_r^0 / \partial r + (3-4\nu) \Phi_r^0, \quad 2Gu_\theta^0 = -2\alpha_2 \partial \Phi_r^0 / \partial \theta - (1/r) \partial \Phi_\theta^0 / \partial \theta + 4(1-\nu) \Phi_\theta^0, \quad \left. \begin{aligned} 2Gu_z^0 &= 0 \\ 2Gu_\theta^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (8)}$$

$$\text{式(5)からは, } 2Gu_r^\infty = -r \partial \Phi_r^\infty / \partial r + (3-4\nu) \Phi_r^\infty, \quad 2Gu_\theta^\infty = 0, \quad 2Gu_z^\infty = -2\alpha_2 \partial \Phi_r^\infty / \partial z + (3-4\nu) \Phi_r^\infty \text{----- (9)}$$

肩添字 1, 2, 0 および ∞ は、変位ポテンシャル Φ の形によって便宜的に付したもので、それらをそれぞれ相加したものが求める変位成分となる。また、応力成分は円筒座標系における応力とひずみの関係より求められる。

一例として、 σ_{zz} について示すと次のようになる。

$$\sigma_{zz}^1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{ms} \cos m\theta \{ J_m(\alpha_{ms} z) [C_{ms}^{\omega} \{ \alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z - 2(1-\nu) \cosh \alpha_{ms} z \} + A_{ms}^{\omega} \alpha_{ms} \cosh \alpha_{ms} z] \\ + Y_m(\alpha_{ms} z) [C_{ms}^{\omega} \{ \alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z - 2(1-\nu) \cosh \alpha_{ms} z \} + A_{ms}^{\omega} \alpha_{ms} \cosh \alpha_{ms} z] \} \text{----- (10)}$$

$$\sigma_{zz}^2 = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cos \beta_n z \left(\frac{\beta_n^2}{2} \right) \{ 2D_{mn}^{\omega} J_m(\beta_n r) + 2D_{mn}^{\omega} K_m(\beta_n r) + F_{mn}^{\omega} \} 2(m+\nu) J_m(\beta_n r) + \beta_n r J_{m+1}(\beta_n r) \\ + F_{mn}^{\omega} \} 2\nu J_m(\beta_n r) + \beta_n r J_{m+1}(\beta_n r) \} - E_{mn}^{\omega} \{ 2(m+\nu) K_m(\beta_n r) - \beta_n r K_{m+1}(\beta_n r) \} - E_{mn}^{\omega} \} 2\nu K_m(\beta_n r) \\ - \beta_n r K_{m+1}(\beta_n r) \} \} \text{----- (11)}$$

$$\sigma_{zz}^0 = 4\nu \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \{ F_{m0}(m+1) r^m - E_{m0}(m-1) r^{-m} \} \text{----- (12)}$$

$$\sigma_{zz}^\infty = 4\nu A_{00} + 2(1-\nu) C_{00} \text{----- (13)}$$

4. 境界条件

図-1に示すような有限円筒の側面に部分的内圧あるいは外圧を受ける場合の境界条件は次のようである。

$$r=a \text{ において } \sigma_{rz}=0, \sigma_{r\theta}=0, \sigma_{rr}=-\varepsilon_1 P(\theta, z) \text{----- (14)}$$

$$r=b \text{ において } \sigma_{rz}=0, \sigma_{r\theta}=0, \sigma_{rr}=-\varepsilon_2 P(\theta, z) \text{----- (15)}$$

$$z=\pm h \text{ において } \sigma_{rz}=0, \sigma_{\theta z}=0, \sigma_{zz}=0 \text{----- (16)}$$

ここで、

$$P(\theta, z) = \begin{cases} 2 \begin{cases} 0 < \theta < \theta_0, \pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0, \\ 2\pi - \theta_0 < \theta < 2\pi \end{cases} \text{ かつ } -d < z < d \\ 0 \text{ [上記以外の領域]} \end{cases} \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \begin{cases} 1 & \text{[内圧を受ける場合]} \\ 0 & \text{[外圧を受ける場合]} \end{cases} \\ \varepsilon_2 &= \begin{cases} 0 & \text{[内圧を受ける場合]} \\ 1 & \text{[外圧を受ける場合]} \end{cases} \end{aligned}$$

上記の境界条件を満たすために助変数を $\alpha_{ms} = \lambda_{ms}/a$, $\beta_n = m\pi/h$ と定める。また、部分的圧力を Fourier 級数に展開すると次のようになる。

$$P(\theta, z) = P_{00} + \sum_{m=0}^{\infty} P_{m0} \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \cos m\theta \cos \beta_n z$$

$$\text{ここで, } P_{00} = 2\theta_0 d / \pi h, \quad P_{m0} = 4\theta_0 d \sin m\theta_0 / m\pi h, \quad P_{mn} = 4\theta_0 \theta_0 \sin h\beta_n / \pi h \beta_n + 2\theta_0 \theta_0 \sin m\theta_0 \sin \beta_n d / m\pi h \beta_n$$

$$\text{さらに, } \bar{f}_m = \begin{cases} 1 & [m=0] \\ 0 & [m \geq 1] \end{cases}, \quad \bar{g}_m = \begin{cases} 0 & [m=0] \\ 1 & [m \geq 1] \end{cases} \quad m: \text{偶数}$$

式(16)の σ_{rz} および $\sigma_{\theta z}$ の境界条件より次の関係が得られる。

$$A_{ms}^{\omega} = - \{ \alpha_{ms} h \cosh \alpha_{ms} h - (1-2\nu) \} C_{ms}^{\omega} / \alpha_{ms}, \quad A_{ms}^{\omega} = - \{ \alpha_{ms} h \cosh \alpha_{ms} h - (1-2\nu) \} C_{ms}^{\omega} / \alpha_{ms}, \quad \left. \begin{aligned} B_{ms}^{\omega} &= 0, \quad B_{ms}^{\omega} = 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (17)}$$

式(14)の σ_{rz} の境界条件より、未知定数 $C_{ms}^{(2)}$ と $C_{ms}^{(1)}$ との間に次の関係を設ける。

$$C_{ms}^{(2)} = -\{J_m'(\lambda_{ms})/Y_m'(\lambda_{ms})\} C_{ms}^{(1)} \quad \text{----- (18)}$$

σ_{rz} に式(18)の関係を代入して $[\sigma_{rz}]_{r=b}=0$ を満足すると次式が得られる。

$$J_m'(\lambda_{ms}K) Y_m'(\lambda_{ms}) - J_m'(\lambda_{ms}) Y_m'(\lambda_{ms}K) = 0 \quad \text{ここで: } K=b/a \quad \text{----- (19)}$$

さらに $[\sigma_{rz}]_{r=a}, r=b=0$ の条件より、 $D_{ms}^{(1)}$ および $D_{ms}^{(2)}$ を $F_{ms}^{(1)}, F_{ms}^{(2)}, E_{ms}^{(1)}$ および $E_{ms}^{(2)}$ で表わすことができ、未知定数 $A_{ms}^{(1)}, A_{ms}^{(2)}, B_{ms}^{(1)}, B_{ms}^{(2)}, D_{ms}^{(1)}, D_{ms}^{(2)}$ および $C_{ms}^{(1)}$ を消去することができる。

また、助変数 α_{ms} 中の λ_{ms} は式(19)を満足する根であり、肩添字1を付した変数および応力成分は、次式に定義する円柱関数を用いて表わすことができる。

$$C_m(\alpha_{ms}r) = J_m(\alpha_{ms}r) - \{J_m'(\lambda_{ms})/Y_m'(\lambda_{ms})\} Y_m(\alpha_{ms}r) \quad \text{----- (20)}$$

一例として、 σ_{zz} について示すと次のようになる。

$$\sigma_{zz} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{ms} \cos m\theta C_m(\alpha_{ms}r) C_{ms}^{(1)} \alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} h - (1 + \cosh \alpha_{ms} h \tanh \alpha_{ms} h) \cosh \alpha_{ms} z \quad \text{----- (21)}$$

5. 未知定数についての連立一次方程式

式(16)の σ_{zz} の境界条件を満足するには、 σ_{zz}^0 および σ_{zz} の式中の r に関する関数を λ_{ms} に基づいてDini展開することが必要となる。 $z=Ih$ におけるDini展開の結果を用いると $C_{ms}^{(1)}$ について次式が求められる。

$$C_{ms}^{(1)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n O_{ms}^{(1)} + n O_{ms}^{(2)} \right) / \{ \alpha_{ms} (\cosh \alpha_{ms} h + \cosh \alpha_{ms} h / \sinh \alpha_{ms} h) \} \quad \text{----- (22)}$$

$$\text{ここで、} \quad n O_{ms}^{(1)} = \frac{\int_a^b (\sigma_{zz}^0)_{z=Ih} r C_m(\alpha_{ms}r) dr}{\int_a^b r C_m^2(\alpha_{ms}r) dr}, \quad n O_{ms}^{(2)} = \frac{\int_a^b (\sigma_{zz}^0)_{z=0} r C_m(\alpha_{ms}r) dr}{\int_a^b r C_m^2(\alpha_{ms}r) dr}$$

式(14)および式(15)の σ_{rr} および $\sigma_{r\theta}$ についての境界条件は、 σ_{rr}' および $\sigma_{r\theta}'$ を $r=a, b$ において次式のようにFourier級数に展開することにより満たすことができる。

$$(\sigma_{rr}')_{r=a} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} s p_{ms}^{(1)} \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s p_{mn}^{(1)} \times \cos m\theta \cos pnz \quad \text{----- (23)}$$

$$(\sigma_{rr}')_{r=b} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} s p_{ms}^{(2)} \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s p_{mn}^{(2)} \times \cos m\theta \cos pnz \quad \text{----- (24)}$$

$$(\sigma_{r\theta}')_{r=a} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} s q_{ms}^{(1)} \sin m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s q_{mn}^{(1)} \times \sin m\theta \cos pnz \quad \text{----- (25)}$$

$$(\sigma_{r\theta}')_{r=b} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} s q_{ms}^{(2)} \sin m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s q_{mn}^{(2)} \times \sin m\theta \cos pnz \quad \text{----- (26)}$$

上式を用いて $(\sigma_{rr})_{r=a, b}$ および $(\sigma_{r\theta})_{r=a, b}$ を満足すると4元の連立一次方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{ms}^{(1)} \\ F_{ms}^{(2)} \\ E_{ms}^{(1)} \\ E_{ms}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum_{s=1}^{\infty} s p_{ms}^{(1)} - \varepsilon_1 p_{ms} \\ -\sum_{s=1}^{\infty} s p_{ms}^{(2)} - \varepsilon_2 p_{ms} \\ -\sum_{s=1}^{\infty} s q_{ms}^{(1)} \\ -\sum_{s=1}^{\infty} s q_{ms}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

また、 $m=0$ の項についても次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{ms}^{(1)} \\ D_{ms}^{(2)} \\ F_{ms}^{(1)} \\ E_{ms}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum_{s=1}^{\infty} s p_{ms}^{(1)} + \varepsilon_1 p_{ms} \\ -\sum_{s=1}^{\infty} s p_{ms}^{(2)} + \varepsilon_2 p_{ms} \\ -\sum_{s=1}^{\infty} s q_{ms}^{(1)} \\ -\sum_{s=1}^{\infty} s q_{ms}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

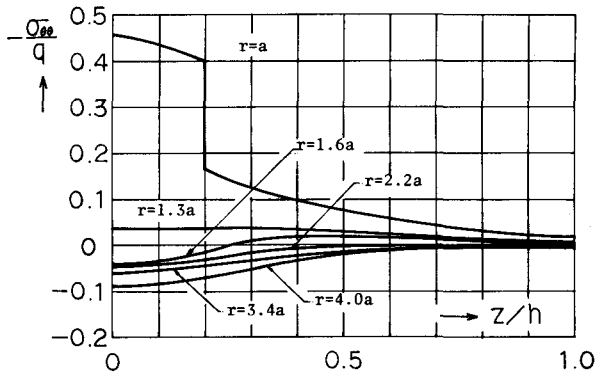


図-2 $\theta=0$ における σ_{rr} の分布(内圧)

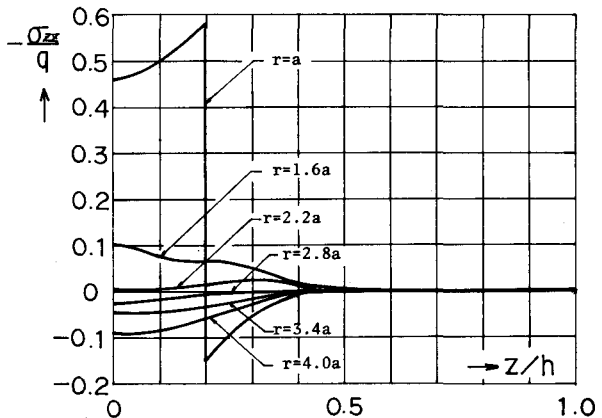


図-3 $\theta=0$ における σ_{zz} の分布(内圧)

さらに、 $(\nabla r^0)_{r=a, b}$ および $(\nabla z^0)_{z=\pm h}$ の境界条件より3元連立一次方程式が得られ、これを解くと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{00} &= (1-V)(\varepsilon_1 k^2 - \varepsilon_2) \rho_{00} / \{2(2\nu+1)(\nu+1)(k^2-1)\} \\ B_{00} &= -\rho_{00}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \alpha^2 / \{4(1-V)(k^2-1)\} \\ C_{00} &= -V(\varepsilon_1 k^2 - \varepsilon_2) \rho_{00} / \{(2\nu-1)(\nu+1)(k^2-1)\} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

したがって、式(22)、(27)、(28)および式(29)より、未知定数 $C_{ms}^{(i)}$, $F_{ms}^{(i)}$, $F_{mn}^{(i)}$, $E_{ms}^{(i)}$, $E_{mn}^{(i)}$, $D_{ms}^{(i)}$, $D_{mn}^{(i)}$, F_{ms0} , E_{ms0} , A_{00} , B_{00} および C_{00} を数値的に求めらる。

6. 長円筒としての解析について

有限円筒を長円筒として解析する際には、境界条件式(16)の第3式が次のように変わる。

$$z=\pm h \text{ において } T_{zz}=0 \quad \text{-----} (30)$$

$$\text{ここで、} T_{zz} = \int_0^{2\pi} \int_a^b \nabla_{zz} r dr d\theta$$

上の境界条件は、 $m \geq 1$ については三角関数の性質によって、 θ に関して $0 \sim 2\pi$ まで積分した場合には満たされ、また、 $m=0$ の場合には、境界条件式(14)の第1式および式(15)の第1式により、 r に関して a から b まで積分した時に満たされる。

したがって、式(30)の境界条件が自動的に満たされるので、肩添字1を付した変位および応力成分の解は不必要となるので、式(27)および式(28)のそれぞれ右辺の定数項の中 $sp_{ms}^{(i)}$, ..., $sp_{ms0}^{(i)}$ を0とすると長円筒の解析になる。

7. 数値計算例

計算例として $b/a=4.0$, $b/h=2/3$ および $V=0.25$ の有限円筒と長円筒として解析し、その数値結果を図-2～図-4および図-7～図-9に示した。荷重載荷域は $d/h=0.2$, $\theta_0=\pi/8$ とした。図-5～図-6および図-10～図-11には、同数値の有限円筒で b/h の値を変化させ、長円筒としての解析結果と長円筒の解析結果との比較を示した。

図-2～図-6には、部分的内圧を受けた場合について応力分布および両者の比較をそれぞれ示した。応力分布図は、いずれも縦軸に応力の値を、横軸には z/h とし、 V をパラメータとして表わした。図-2に示した $\sigma_{\theta\theta}$ の応力分布は、内周面

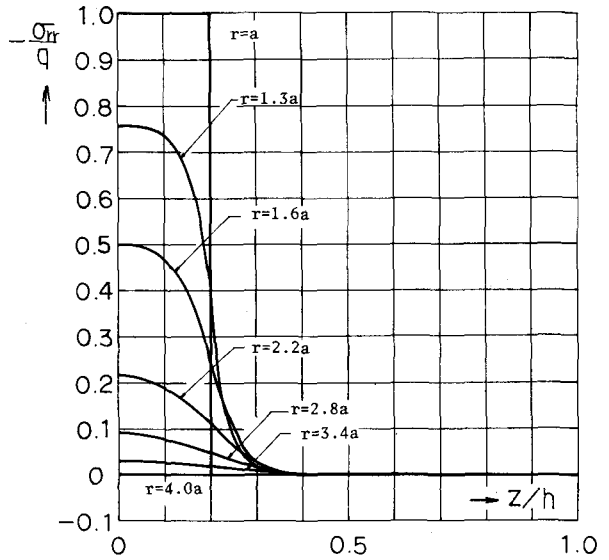


図-4 $\theta=0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の分布 (内圧)

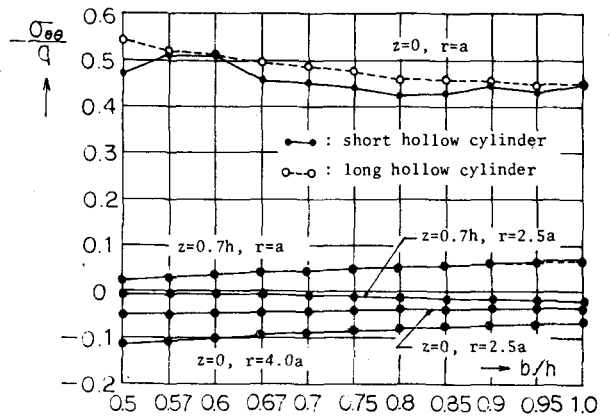


図-5 $\theta=0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の比較 (内圧)

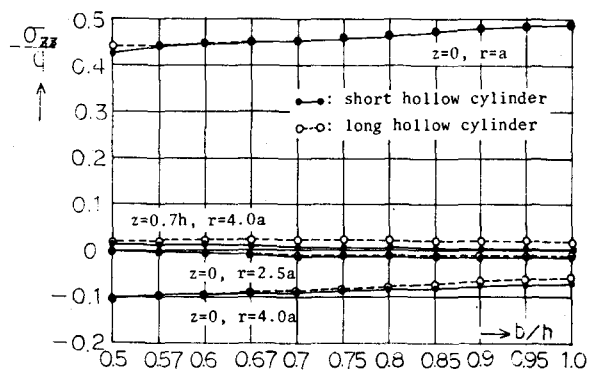


図-6 $\theta=0$ における σ_{zz} の比較 (内圧)

すなわち $r=a$ において荷重作用域で大きな圧縮応力となり、荷重作用境界 $z=0.2h$ まで不連続となる。また、内周面 $r=a$ から外周面 $r=b$ までの内部においては圧縮応力から引張応力へ変化することがわかる。図-3の σ_{zz} から、 $r=a$ 、 $z=0.2h$ において不連続になり、圧縮応力から引張応力に転じ、さらに円筒中央部から円筒端面に進むにつれ応力は減衰し、0に近づくのが認められる。図-4の σ_{rr} の分布からは、 $r=a$ より $r=b$ まで応力が徐々に減少する様子が見うけられる。

図-5～図-6では、縦軸に応力の値を、横軸に b/a の値を、パラメータに r および z として、短円筒としての解析結果を黒丸で、長円筒としての解析結果を白丸で表わした。図-5の $\sigma_{\theta\theta}$ において荷重作用面である $z=0$ 、 $r=a$ では、短円筒および長円筒としての解析結果にはうづかが見られるが、円筒端面近傍である $z=0.7h$ あるいは外周面では、ほとんど差はなく一致している。次に図-6の σ_{zz} では、 $z=0$ 、 $r=a$ 及 $b/a=0.5$ を除きほぼ一致している。 $b/a=0.5$ における差は、短円筒としての解析において円筒の長さを長くすると項数が増くとおれないので収束が悪くなったためであると考えられる。また、円筒内部に比し、円筒端面近傍で差があるのは、長円筒としての解析において境界条件を合応力で規定しているためである。しかし、 $b/a=1.0$ よりも $b/a=0.5$ の方が、両者の差は僅少となる。これは、長円筒としての解析では、円筒の長さを長くすることで境界条件を合応力で規定した影響が緩和されるからであろう。

図-7～図-11には、部分的な外圧を受けた場合について示した。図-7の σ_{rr} の分布では、外周面から内周面に進むにつれ応力が徐々に減衰する様子が見うけられる。また、円筒端面近傍において引張応力になることが認められる。図-8に示している σ_{zz} は $r=b$ で $z=0.2h$ の荷重作用境界で不連続となり、圧縮応力から引張応力へ転じることは、内圧の場合と変わらないが、分布形状が内圧に比べ外圧の方がゆるやかである。図-9の $\sigma_{\theta\theta}$ についても $r=b$ においては、内圧の場合の分布形状と似ているが、 $r=a$ において円筒内部の応力に比し、大きな引張応力となることは、注目すべきことである。

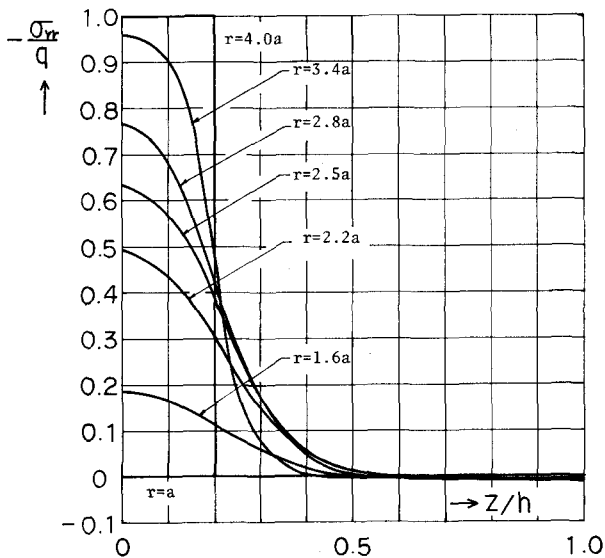


図-7 $\theta=0$ における σ_{rr} の分布 (外圧)

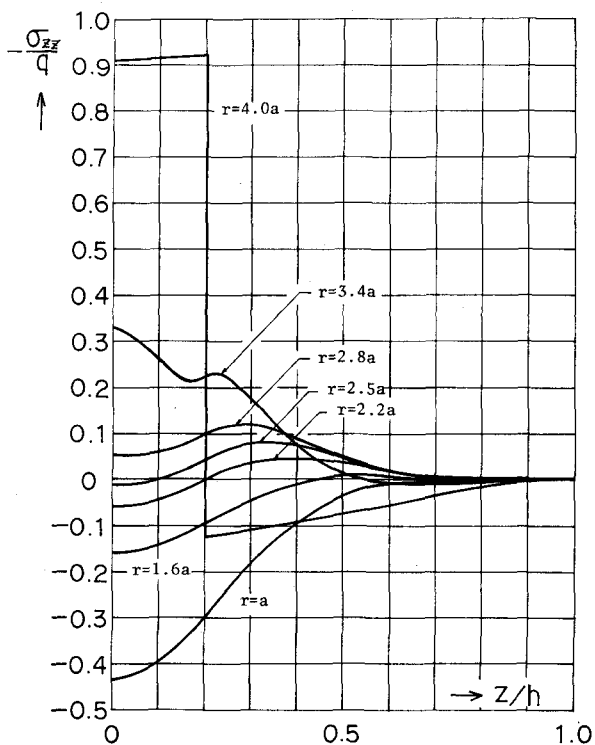


図-8 $\theta=0$ における σ_{zz} の分布 (外圧)

図-10は $\sigma_{\theta\theta}$ について長円筒と短円筒としての解析結果を比較したものである。この図からは、荷重作用面 $z=0$, $r=b$ ばかりでなく内部における両者の値がほぼ一致していることがわかる。ただ、 $z=0$, $r=a$ において僅かであるが差が見られる。内圧の場合でも、この位置における差は顕著であった。この場合は収束状況に影響を受けやすいと考えられるが、外圧の場合にも他の位置における両者の差と比較して大きいので、内周面に現われる $\sigma_{\theta\theta}$ の特徴であるとも考えられる。図-11の σ_{zz} は、円筒の長さを長くすると両者の値が一致する傾向を示している。

8. あとがき

部分的内圧あるいは部分的外圧を受けた有限円筒の非軸対称問題を解析し、数値計算により応力性状を明らかにした。本解析の特別な場合として $m=0$ とすると内・外側面に環状圧力を受ける軸対称問題になる。図には示していないが $m=0$ として数値計算を行い、柴原・尾田²⁾の研究と一致している事は確認してある。

また、有限円筒を短円筒としての解析結果と長円筒としての解析結果との比較を行ったことにより、次の事が明らかになった。

- 1) 円筒端面および円筒内・外周面から離れた位置において、両者の結果はほぼ一致する。
- 2) 両者の解析方法の相違が影響すると思われる σ_{zz} は、円筒端面近傍においても円筒の長さを長くすると両者の結果がほぼ一致する。
- 3) 内・外周面においては、両者の解析による応力成分の収束が十分でないため、内圧あるいは外圧を受ける場合についても各々相違がみられる。
- 4) $b/a=4.0$, $b/h=2/3$ 以下の有限円筒の解析には長円筒としての解析を用いるのが適当と考えられる。

参考文献

- 1) 吉野利男・守本謙論：有限円筒の非軸対称問題の解析，日本機械学会論文集(A編)，第4巻402号，昭55-2，pp.219-226
- 2) 柴原正雄・尾田十八：軸対称変形を有する有限円筒問題，日本機械学会論文集(第1巻)，第24巻259号，昭43-3，pp.398-402

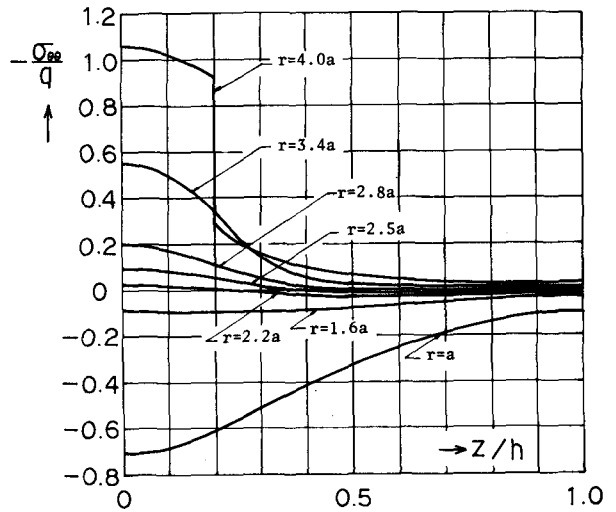


図-9 $\theta=0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の分布(外圧)

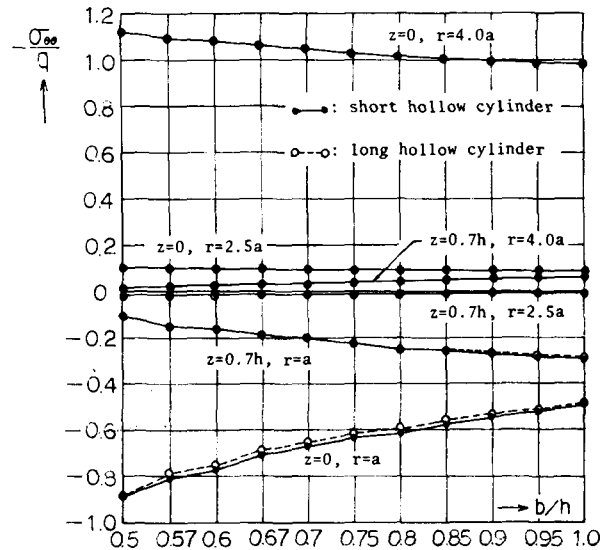


図-10 $\theta=0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の比較(外圧)

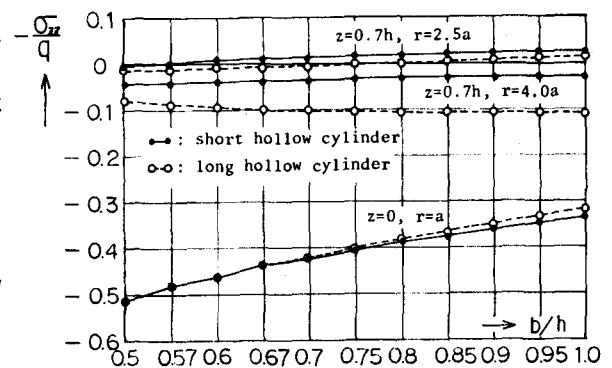


図-11 $\theta=0$ における σ_{zz} の比較(外圧)