

I-9 選点法によるせん断変形・回転慣性を考慮した非保存系の弾性安定解析

北海道大学 正員 〇三 上 隆

北海道大学 正員 芳村 仁

1. はじめに

今日まで、柱、梁に関する非保存的弾性安定問題は数多くの研究が行われてきた。しかし、その大部分は曲げ理論に立脚し、一樣断面の柱、梁に対するものである。本報告では Timoshenko Beam 理論を従動力が作用している柱の安定問題に適用し、せん断変形・回転慣性の臨界荷重に与える影響を定量的に明らかにする。数値計算例に採用されたモデルは次の2つである。

(1) 一樣および変断面(直線変化)の Beck, Leipholz, Hauger の問題 (Fig. 1 の (a)~(c))。

(2) 組合せ荷重下での一樣断面柱の安定問題 (Fig. 1(d))。

非保存系の安定解析を厳密に解くことは、さめめてむずかしく、差分法、Galerkin 法、有限要素法などの近似解法が用いられている。ここでは、現象を支配する微分方程式とその境界条件が与えられさえすれば、定式化が容易であり比較的小容量の計算でかつ高精度の数値解が得られる選点法²⁾により解析を行う。

2. 解析方法

非保存系の弾性安定問題の解析は数学的には非自己随伴型境界値問題の固有値を調べる問題となる。

考察している系 (Fig. 1) のせん断変形・回転慣性を考慮した微分方程式と境界条件は次式で与えられるとする。

微分方程式;

$$L_1(w) + L_2(\psi) - \lambda w = 0 \quad (1)$$

$$L_3(w) + L_4(\psi) - \lambda \psi = 0$$

境界条件式;

$$B_k(w, \psi) = 0, \quad (k=1 \sim 4) \quad (2)$$

ここで、 $L_1 \sim L_4$, B_k は微分演算子 ($L_1 \sim L_4$ は最高2階), w = 変位, ψ = 曲げによるたわみ角, λ = 固有値

w, ψ の試行関数として次式を用いる。

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{i=1}^{K+2} a_i x^{i-1} \\ \psi(x) &= \sum_{i=1}^{K+2} b_i x^{i-1} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 a_i, b_i は未定係数、 K は内部選点数

内部選点は Legendre の多項式の区間 $[-1, 1]$ を区間 $[0, 1]$ に変換した Shifted Legendre 多項式の零点を用いる。

式(3)で内部選点と境界点での値 $w(x_i), \psi(x_i)$,

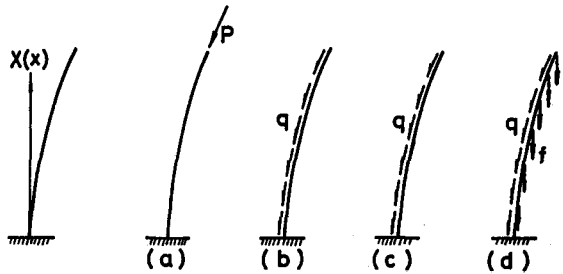


Fig. 1 Columns used for numerical studies

(a) Beck's problem

(b) Leipholz's problem $q = \text{const.}$

(c) Hauger's problem $q = q_0(1-x)$

(d) Column under multiple loading $f, q = \text{const.}$

($i=1 \sim K+2$) を求める。さらに、(3) 式で1次、2次微分をとり、内部選点、境界点での値を求めそれらを未定係数 a_i, b_i の代わり $w(x_i), \psi(x_i)$ で表わすと次式となる。

$$\begin{aligned} \{w'\} &= [A] \{w\} \\ \{\psi'\} &= [A] \{\psi\} \\ \{w''\} &= [B] \{w\} \\ \{\psi''\} &= [B] \{\psi\} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $[A], [B]$ は $(K+2) \times (K+2)$ のマトリックス、

$$\{w\}^T = \{w(x_1) \ w(x_2) \ \cdots \ w(x_{K+1}) \ w(x_{K+2})\}$$

$$\{\psi\}^T = \{\psi(x_1) \ \psi(x_2) \ \cdots \ \psi(x_{K+1}) \ \psi(x_{K+2})\}$$

$$\{w'\}^T = \{w'(x_1) \ w'(x_2) \ \cdots \ w'(x_{K+1}) \ w'(x_{K+2})\}$$

$$\{\psi'\}^T = \{\psi'(x_1) \ \psi'(x_2) \ \cdots \ \psi'(x_{K+1}) \ \psi'(x_{K+2})\} \text{ など}$$

である。 $x_2 \sim x_{k+1}$ は内部節点, $x_1 = 0, x_{k+2} = 1$ 。

固有方程式は以下の手順で得られる。まず, $2K$ 個の条件は微分方程式(1式)の内部節点での残差の条件より得られる。マトリックス表示すると

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \end{bmatrix} \{ \delta_1 \} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \end{bmatrix} \{ \delta_2 \} - \lambda \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \{ \delta_1 \} = 0 \quad (5)$$

(2Kx2K) (2Kx4) (2Kx2K)

$$\{ \delta_1 \}^T = \{ \omega(x_2) \dots \omega(x_{k+1}) \} \quad \psi(x_2) \dots \psi(x_{k+1})$$

$$\{ \delta_2 \}^T = \{ \omega(x_1) \omega(x_{k+2}) \psi(x_1) \psi(x_{k+2}) \}$$

$[\alpha_1], [\alpha_2]$ は $[A], [B]$ の成分で構成されるマトリックス, $[I]$ は単位マトリックスである。

4個の条件は $x_1 = 0$ と $x_{k+2} = 1$ における境界条件より与えられる。マトリックス表示すると

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \end{bmatrix} \{ \delta_1 \} + \begin{bmatrix} \beta_2 \end{bmatrix} \{ \delta_2 \} = 0 \quad (6)$$

(4x2K) (4x4)

$[\beta_1], [\beta_2]$ は $[A]$ の成分などで表わされる。

式(5)と(6)より固有方程式として次式が得られる。

$$[\alpha] - \lambda [I] \{ \delta_1 \} = 0 \quad (7)$$

ただし

$$[\alpha] = [\alpha_1] - [\alpha_2]^{-1} [\beta_1]$$

式(7)は内部節点における解の値 $\{ \delta_1 \}$ を固有ベクトルとする $(2K \times 2K)$ の大きさの固有方程式である。

式(7)を解くことにより臨界荷重が得られる。臨界荷重の決定, 安定および不安定の判定は荷重パラメータ η と振動数パラメータ λ からなる固有値の組 (η, λ) を調べる問題となる。すなわち, 与えられた η で式(7)を満たす $2K$ 個の λ を求める。このとき, λ が正の実数から一つでも負値をとるとき不安定 (divergence 形不安定), 正值から複素数へと変化すると flutter 形不安定となる。したがって, 考察している系の臨界荷重は, λ が正の実数から負の実数あるいは複素数へと移行する最小の荷重パラメータを求めることにより得られる。

3. 微分方程式と境界条件式

Fig. 1(a)~(c) に示す単一荷重が作用する一様断面および変断面の柱, Fig. 1(d) の組合せ荷重が作用する等断面の柱の微分方程式と境界条件式は以下で与えられる。

単一荷重を担う柱の場合

断面が CASE(1) 幅が一様で高さが直線変化
CASE(2) 高さが一様で幅が直線変化

に対する無次元化基礎方程式は

$$r^2 (f_1 \psi')' + r^2 s^2 f_2 (\omega' - \psi) + \lambda f_1 \psi = 0 \quad (8)$$

$$s^2 \{ f_2 (\omega' - \psi) \}' - \eta f_3 \omega'' + \eta f_4 (\omega' - \psi) + \lambda f_2 \omega = 0 \quad (9)$$

$$\text{ここで, } r^2 = \frac{A_0 L^4}{I_0}, \quad s^2 = \frac{r g A_0 L^2}{E I_0}, \quad \lambda = \frac{r A_0 \omega^2 L^4}{E I_0}, \quad (\eta = \frac{\alpha}{d \alpha})$$

A_0 = 固定端での断面積, L = 部材長, r = セン断補正係数, $E = \gamma \times 7^{\text{率}}$, g = セン断弾性係数, s = 密度, I_0 = 固定端での断面2次モーメント, ω = 固有円振動数

$f_1 \sim f_4$ として η は次式で与えられる。

$$\text{CASE(1) のとき } f_1 = f_2^3, \quad f_2 = 1 + \alpha x$$

$$\alpha = (h_1 - h_0) / h_0$$

h_0, h_1 は固定端, 自由端での高さ

$$\text{CASE(2) のとき } f_1 = f_2 = 1 + \alpha x$$

$$\alpha = (b_1 - b_0) / b_0$$

b_0, b_1 は固定端, 自由端での幅

η, f_3, f_4 は以下となる。

$$\text{Beck の問題; } \eta = (PL^2)/(EI_0), \quad f_3 = 1, \quad f_4 = 0$$

$$\text{Leipholz の問題; } \eta = (gL^3)/(EI_0), \quad f_3 = 1 - \alpha$$

$$f_4 = 1$$

$$\text{Hauger の問題; } \eta = (gL^4)/(EI_0), \quad f_3 = (1 - \alpha)^2 / 2,$$

$$f_4 = 1 - \alpha$$

境界条件は

$$x = 0 \text{ で固定; } \omega = \psi = 0 \quad \text{--- (10)}$$

$$x = 1 \text{ で自由; } \psi' = \omega' - \psi = 0 \quad \text{--- (10)}$$

等断面の基礎式は式(8), (9) で $f_1 = f_2 = 1$ とおくことにより得られる。

組合せ荷重を担う場合

基礎方程式,

$$r^2 \psi'' + r^2 s^2 (\omega' - \psi) + \lambda \psi = 0 \quad (11)$$

$$s^2 (\omega'' - \psi') - (\beta + \delta) (1 - \alpha) \omega'' + \delta \omega' + \beta (\omega' - \psi) + \lambda \omega = 0 \quad (12)$$

$$\text{ここで, } \beta = (gL^3)/(EI_0), \quad \delta = (fL^3)/(EI_0)$$

境界条件式

$$x = 0 \text{ で } \omega = \psi = 0 \quad \text{--- (13)}$$

$$x = 1 \text{ で } \psi' = \omega' - \psi = 0 \quad \text{--- (13)}$$

なお以下の数値計算例では, 中実断面としセン断補正係数 r は Cowper の理論式を用いポアソン比 = 0.3 とした。

4. 数値計算例

一様断面の Beck 問題に対する

収束性の検討を Table.1 に示す。

これは僅々の細長比 (L/r)

に対して行ったもので内部選点

数 $K=7$ で十分な精度の数値解

が得られている。なお, Leipholz

, Hauger の問題に対しても Beck 問題と同様の結果が

得られたことを付記しておく。

等断面の柱の解析結果

解析結果を Fig. 2 (a) と (b) として Table.2 に示す。

ただし, 計算に用いた内部選点数は 11 である。

Fig. 2 (a) および (b) はそれぞれ Beck の問題,

Leipholz の問題の臨界荷重に与える細長比 L/r (10

~100) の影響を図示したものである。図中, 点線は

Euler-Beam 理論による臨界荷重である。

Table. 2 は Hauger の問題に対する結果であり細長

比 = 10, 15, 20, 25, 50, 100, 1000 について計

算した。この問題の Euler-Beam 理論による臨界荷重

は $(qL^4)/(48EI_0) = 15.26$ である。

細長比の小さな値において, セン断変形・回転慣性

の影響が顕著であり, それらを考慮しなければなら

ないことが理解される。例えば, 細長比 $L/r = 10$ のと

きの臨界荷重は $L/r = 100$ のそれのほぼ 50% (Beck の問題),

45% (Leipholz の問題), 35% (Hauger の問題) である。

細長比が大きくなるにつれ, 臨界荷重は Euler-Beam

理論によるそれに漸近していく。細長比 $L/r = 100$ での

臨界荷重は Euler-Beam 理論の 99% (Beck の問題),

99% (Leipholz の問題), 98% (Hauger の問題) である。

したがって, 細長比 $L/r \geq 100$ では Euler-Beam 理論で十分な精度で臨界荷重

の算定が可能と思われる。

変断面の柱の解析結果

Fig. 1 (a) ~ (c) の Beck, Leipholz, Hauger の問題で断面が

CASE (1); 幅が一固定で高さが直線変化, CASE (2); 高さが一

定で幅が直線変化する場合の臨界荷重を Fig. 3 と Table. 3 に示す。

ただし, 計算に用いた内部選点数は 11 である。

各図表とも α ($= 0 \sim 0.6$) と細長比 ($L/r = 20, 50, 100,$

1000) で整理されている。ただし, α は CASE (1) のとき

$\alpha = (h_1 - h_0)/h_0$, CASE (2) で $\alpha = (b_1 - b_0)/b_0$ である。

Table.1 Convergence study for Beck's problem

$$\eta = \frac{PL}{\pi^2 EI_0}$$

L/r	K=5	K=6	K=7	K=8	K=9	K=10	K=11
10	1.0235	1.0234	1.0234	1.0234	1.0234	1.0234	1.0234
50	1.9508	1.9516	1.9501	1.9501	1.9501	1.9501	1.9501
200	2.0269	2.0286	2.0262	2.0262	2.0262	2.0262	2.0262
1000	2.0320	2.0337	2.0313	2.0313	2.0313	2.0313	2.0313

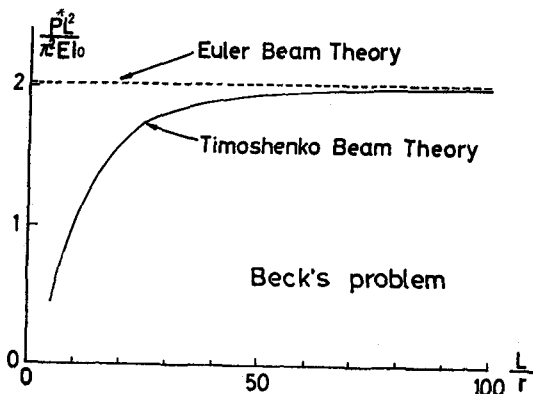


Fig. 2(a) Critical load versus the slenderness ratio (Beck's problem)

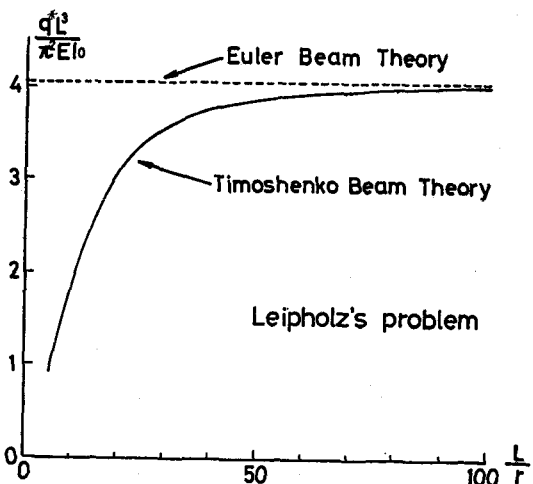


Fig. 2(b) Critical load versus the slenderness ratio (Leipholz's problem)

Table.2 Critical loads ($\eta = qL^4 / \pi^2 EI_0$) for Hauger's problem

L/r	T-B	E-B
10	5.127	15.259
15	8.452	15.259
20	10.645	15.259
25	12.004	15.259
50	14.321	15.259
100	15.016	15.259
500	15.251	15.259
1000	15.258	15.259

T-B = Timoshenko beam theory
E-B = Euler beam theory

なお, Table 3 における E-B 欄は Sankaran らの⁴⁾曲げ理論に基づく有限要素解である。

臨界荷重は CASE (1), (2) とともに α の値が大きくなるにつれて減衰し, その影響は CASE (1) [幅が一定で高さが直線変化] に顕著である。例えば細長比 $L/r = 2.0$ のとき $\alpha = 0.6$ の臨界荷重は $\alpha = 0.0$ (一様断面) のその約

CASE (1) ; Beck の問題で 7%,

Leipholz の問題で 43%, Hauger の問題で 53%

CASE (2) ; Beck の問題で 72%

Leipholz の問題で 76%, Hauger の問題で 79% である。

細長比が大きくなるにつれて CASE (1), (2) とともに Euler-Beam 理論による値に漸近していき, α の値 ($\alpha = 0 \sim 0.6$) のいかに関係なく細長比 $L/r \geq 100$ ではせん断変形・回転慣性を無視した曲げ理論により臨界荷重の算定が可能と思われる。

組合せ荷重下での解析結果

組合せ荷重下における非保存系の安定解析に関する研究は比較的少なく McGill⁵⁾, Huseyin らの⁶⁾研究などわずかに見受けられるにすぎない。しかしながら, これらの研究は曲げ理論に基づくもので, せん断変形

Table.3(a) Critical loads ($\eta = \frac{q_0 L^2}{\pi^2 EI_0}$) for Beck's problem

α	L/r				E-B
	20	50	100	1000	
0	1.616	1.950	2.010	2.031	2.0315
0.1	1.543	1.863	1.921	1.941	1.9413
0.2	1.468	1.775	1.831	1.850	1.8511
0.3	1.393	1.687	1.741	1.760	1.7599
0.4	1.317	1.600	1.652	1.670	1.6708
0.5	1.240	1.514	1.565	1.583	1.5837
0.6	1.165	1.433	1.483	1.500	1.5006

Table.3(b) Critical loads ($\eta = \frac{q_0 L^2}{\pi^2 EI_0}$) for Leipholz's problem

α	L/r				E-B
	20	50	100	1000	
0	3.125	3.875	4.011	4.057	4.0579
0.1	3.006	3.719	3.848	3.892	3.8938
0.2	2.884	3.560	3.682	3.724	3.7256
0.3	2.758	3.398	3.514	3.553	3.5543
0.4	2.630	3.233	3.343	3.380	3.3811
0.5	2.498	3.067	3.170	3.206	3.2058
0.6	2.365	2.900	2.997	3.031	3.0315

Table.3(c) Critical loads ($\eta = \frac{q_0 L^2}{\pi^2 EI_0}$) for Hauger's problem

α	L/r				E-B
	20	50	100	1000	
0	10.644	14.321	15.018	15.260	15.2900
0.1	10.309	13.808	14.470	14.701	14.7017
0.2	9.962	13.280	13.907	14.124	14.1242
0.3	9.600	12.736	13.328	13.533	13.5365
0.4	9.222	12.173	12.729	12.922	12.9286
0.5	8.827	11.591	12.111	12.290	12.2903
0.6	8.412	10.990	11.474	11.642	11.6418

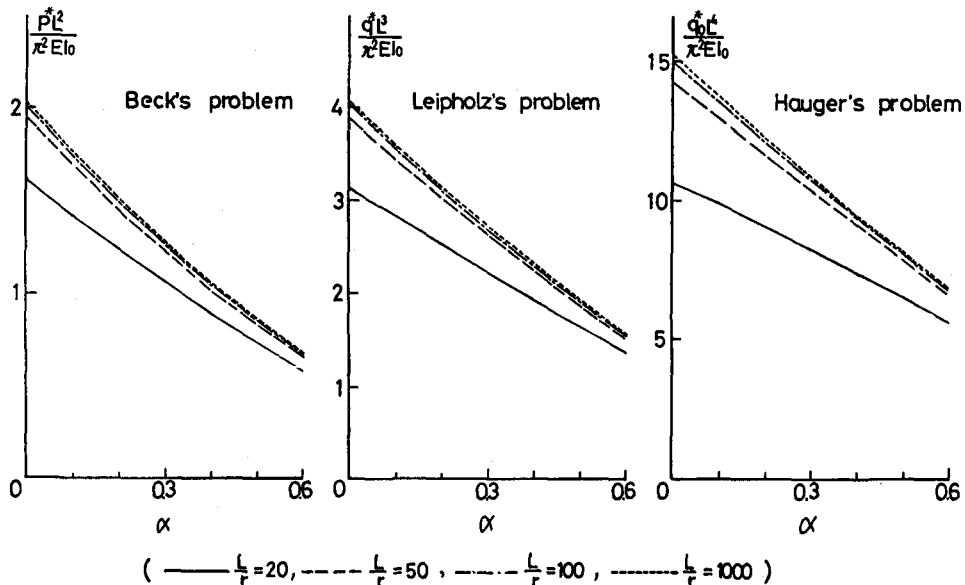


Fig.3 Variation of critical load with thickness taper

回転慣性の影響は考慮されていない。ここでは、等分布荷重と自重が作用する一様断面の柱 (Fig.1 (d)) を解析モデルに採用し、臨界荷重に及ぼすせん断変形・回転慣性の影響を検討する。ただし解析に用いた内部係数は1である。以下の図表中の荷重パラメータ $\bar{p}$, $\bar{\delta}$ は $\bar{p} = p/10$, $\bar{\delta} = \delta/10$, $\beta = (qL^3)/(EI_0)$, $\delta = (fL^3)/(EI_0)$ である。

Table 4 (a) は一定の自重 (f) を考慮したときの臨界荷重 ($\bar{p}$) の値を示す。この臨界荷重は flutter 形である。表には McGill¹⁾ の Galerkin の2項近似 (曲げ理論) による値も併記されている。ただし、この値は $\bar{\delta} = 0$ で厳密解と比べると % 程度高めの値である。表より自重の考慮は臨界荷重を低下させ、細長比 L/r が小さいときせん断変形・回転慣性の影響が大であることが理解できる。

Fig. 4 (a) に細長比 $L/r = 20$ でパラメータ $\bar{\delta} = 0, 0.5, 1.0$ の固有値曲線を示す。曲線はループ状をなしており、曲線と横軸 ($pA_0L^2\omega^2/EI_0$) との交点は自重を考慮したときの片持柱の二つの曲げ固有振動数を表わしている。 $\bar{p} \neq 0$ では柱の振動形はこれら二つの固有振動数に対応する振動モードが組合わせたものとなり、ループの左半分の領域に占められるのは第一次振動モードが支配的となり、右半分の領域では第二次振動モードが支配的となる。そしてループの頂点が臨界点 (flutter 形) を与える。

Table 4 (b) に一定の分布荷重が作用したときの臨界荷重 ($\bar{p}$) を示す。この臨界荷重は divergence 形である。なお、表には曲げ理論による値も記入されている。この表より以下の諸点が理解される。等分布荷重の存在は臨界荷重を高める働きをしている。又せん断変形・回転慣性の臨界荷重に与える影響は小さい。

Fig. 4 (b) に細長比 $L/r = 20$, 等分布荷重パラメータ $\bar{p} = 0, 0.5, 1.0$ の固有値曲線を示す。固有値曲線はほぼ直線の変化を示している。曲線と横軸の交点は $\bar{\delta} = 0$ での片持柱の一次固有円振動数 (曲げ振動数) に対応する振動モードが支配的となり、 $\bar{\delta}$ が増加するにつれて固有振動数は零に近づく曲線と縦軸との交点が臨界点 (divergence 形) となる。

5. まとめ

変位法による、せん断変形・回転慣性を考慮した柱の非保存的弾性安定解析法を提示し、2, 3の数値計算例

Table.4(a) Critical loads ($\beta = qL^3/10EI_0$)

$\bar{\delta}$	L/r				E-B
	20	50	100	1000	
0	3.084	3.825	3.958	4.005	4.1207
0.5	2.766	3.494	3.625	3.671	3.7944
1.0	2.451	3.166	3.295	3.339	3.4701

Table.4(b) Critical loads ($\delta = fL^3/10EI_0$)

$\bar{p}$	L/r				E-B
	20	50	100	1000	
0	0.762	0.780	0.782	0.785	0.7850
0.5	0.908	0.937	0.942	0.944	0.9503
1.0	1.133	1.158	1.162	1.164	1.1807

E-B = Euler beam theory

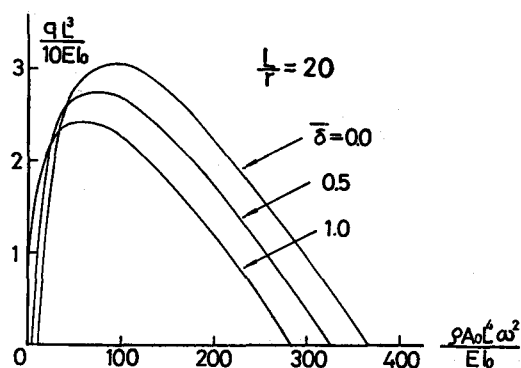


Fig.4(a) Characteristic curve

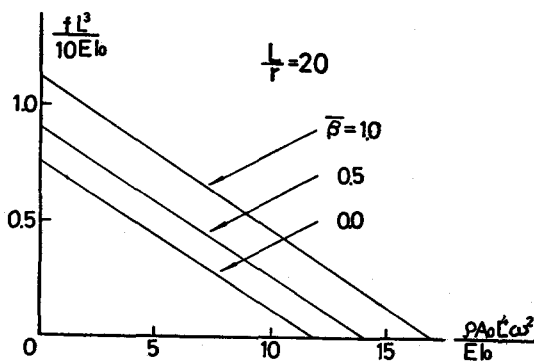


Fig.4(b) Characteristic curve

によりせん断変形・回転慣性の臨界荷重に及ぼす影響の検討を行った。得られた主な結果を要約すると次のとおりである。

Beck, Leipholz, Hauger の問題について；

- (1) 細長比(L/r)の小さな値においては、臨界荷重に与えるせん断変形・回転慣性の影響が大きくそれらを考慮しなければならない。
- (2) 細長比 $L/r \geq 100$ では Euler-Beam 理論で十分な精度で臨界荷重の算定ができる。

組合せ荷重を担う柱の問題について；

等分布従動荷重，自重パラメータ $\bar{\beta}$ ， $\bar{\gamma}$ が $0 \leq \bar{\beta}, \bar{\gamma} \leq 1$ の範囲内で

- (1) 等分布従動荷重が作用しているとき，臨界荷重(P)に与えるせん断変形・回転慣性の影響は細長比の値のいかに関係なく小さい。
- (2) 自重を考慮する臨界荷重(P^*)に与えるせん断変形・回転慣性の影響は細長比が小さへ程，著しい。

参考文献

- 1) 例えば Bolotin, V. V., "Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability", Pergamon Press, N.Y., 1963, Leipholz, H., "Stability Theory", Academic Press, N.Y., 1970.
- 2) 芳村・三士, "非保存的弾性安定の直交変換法による解析について", 土木学会論文報告集, 第36号, 1980.
- 3) Cowper, G. R., "The shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory", Jour. of Applied Mech., June, 1966.
- 4) Sankaran, V. et al., "Stability of Tapered Cantilever Columns Subjected to Follower Forces", Computers and Structures, Vol 6, 1976.
- 5) McGill, D. J., "Column Instability Under Weight and Follower Loads", ASCE, EMB, June, 1971.
- 6) Huseyin, K. et al., "The Elastic Stability of Two-Parameter Nonconservative Systems", Jour. of Applied Mech., March, 1973.
- 7) Nemat-Nasser, S., "Instability of a Cantilever Under a Follower Force According to Timoshenko Beam Theory", Jour. of Applied Mech., June, 1967.
- 8) Sundararamaiah, V. et al., "Effect of Shear Deformation and Rotatory Inertia on the Stability of Beck's and Leipholz's Columns", AIAA Journal, Vol 18, No 1, 1980.