

I - 8 上縁部分分布荷重を受けるI - 型断面部材の弾性座屈について

北海学園大学 工学部 正 員 ○ 高 橋 義 裕
 北海道大学 工学部 正 員 能 町 純 雄
 北海道大学 工学部 正 員 角 田 与史雄

1. まえがき 周辺単純支持平板の片側上縁に直接荷重が作用した場合の弾性座屈の研究としては、L.Zetlin¹⁾, K.C.RockeyとD.K.Bagchi²⁾, M.Z. Khan とA .C. Walker³⁾, M.Z. Khan とK.C. Johns⁴⁾, M.Z. Khan とK.C. Johns とB.Hayman⁵⁾ の研究がある。またI - 型断面部材の上縁に荷重が作用した場合の弾性座屈の研究としては、K. Gilkman⁶⁾, P. Johnson⁷⁾, Y.L. Tien⁸⁾ らの研究がある。しかし、これらの研究の多くは座屈前応力分布の軸方向に関する変化というものが考慮されていない。本論文は、座屈前応力分布が軸方向に変化する場合を考慮した有限帯板法を用い部分分布荷重が上フランジに作用するI - 型断面部材の弾性座屈について検討したものである。

2. 解析方法 図1 に示すI - 型断面部材の上フランジに荷重幅 $2c$ 、荷重強度 q なる分布荷重が作用している場合の弾性座屈を有限帯板法により解析する。図1 の断面から取り出された図2(a)に示す幅 b の帯板要素について、座屈前応力分布を $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ とするときの座屈変形にともなうトータル・ポテンシャルエネルギー π は、変形が微小で面外と面内との変形の連成がないものとする、次のように表わされる

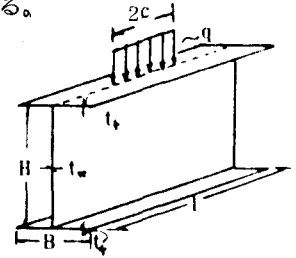
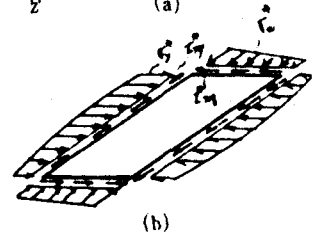
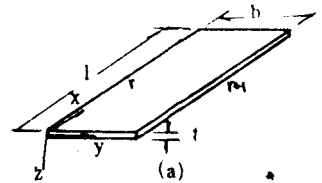


図 1



(b)

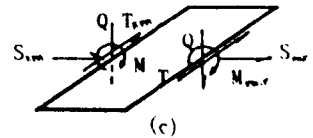


図 2

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} D \int_0^l \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \\ & - \frac{1}{2} N \int_0^l \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}(1-\nu) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ & - \frac{1}{2} t \int_0^l \int_0^b \sigma_x^* \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy \\ & - \frac{1}{2} t \int_0^l \int_0^b \sigma_y^* \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ & - t \int_0^l \int_0^b \tau_{xy}^* \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dx dy \\ & - \int_0^l \left\{ (T_{r,m} u_r + S_{r,m} v_r + Q_{r,m} w_r + M_{r,m} \theta_r) \right. \\ & \quad \left. + (T_{m,r} u_m + S_{m,r} v_m + Q_{m,r} w_m + M_{m,r} \theta_m) \right\} dx \dots (1) \end{aligned}$$

ここで $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$, $N = \frac{Et}{1-\nu^2}$ である。

帯板要素の面内変位と座屈前応力分布を要素の短辺方向に関し1次式、面外変位を3次式に仮定し、 π の停留原理を用いると節線断面力の式が x に関する微分を含む形で(2)式のようにマトリックス表示することができる。いま軸方向の境界条件とし両端単純支持とし、各節線断面力と対応する節線変位、および座屈前応力分布をフーリエ級数展開する。すなわち $(S, Q, M, v, w, \theta, \sigma_x, \sigma_y)$ は、sine展開、 (T, u, τ_{xy}) はcosine展開する。さらに有限フーリエ変換を施すことにより、それぞれのフーリエ係数で(2)式は与えられ、帯板要素の要素剛性方程式が次のように得られる。

$$\{f\}_e = [K]_e \{\delta\}_e - \lambda [K^G]_e \{\delta\}_e \quad \dots (3)$$

ここで $\{f\}_e$: 要素節線外力ベクトル、 $[K]_e$: 要素剛性マトリックス、 $[K^G]_e$: 要素安定係数マトリックス、 $\{\delta\}_e$: 要素節線変位ベクトル、 λ : 座屈荷重の大きさを与える指標である。

要素安定係数マトリックスは、要素剛性マトリックスを用い、単位的作用荷重により生ずる応力分布 (座屈前応力分布) を求め組み立てる。

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ S_{11} \\ Q_{11} \\ M_{11} \\ T_{12} \\ S_{12} \\ Q_{12} \\ M_{12} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & A_{15} & A_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & A_{25} & A_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & A_{37} & A_{38} \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & 0 & 0 & A_{47} & A_{48} \\ A_{51} & A_{52} & 0 & 0 & A_{55} & A_{56} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & 0 & 0 & A_{65} & A_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{73} & A_{74} & 0 & 0 & A_{77} & A_{78} \\ 0 & 0 & A_{83} & A_{84} & 0 & 0 & A_{87} & A_{88} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta \\ u_w \\ v_w \\ w_w \\ \theta_w \end{Bmatrix} \quad (2)$$

以上のことより系全体の剛性方程式が通常を重ね合せにより得られ、結局系の座屈問題は $[K] - \lambda [K^G] = 0$ の固有方程式を解くことになり、 λ はその固有値として、座屈モードはその固有ベクトルとして求まる。

3. 数値計算 図3 で示される断面諸元に対し、 $1/H$ 、 B/H 、 H/t_w 、 $2c/H$ をパラメータにとり数値計算を行なった。ただし $t_f/t_w = 1.0$ 、分割数は、フランジ部を2分割、ウェブ部を8分割、座屈半波数は作用荷重がスパン中央に対称で荷重幅が比較的小さいので、1, 3, 5, 7, 9 波までとり計算を行なった。座屈係数 k は次式で示す。

$$P_{cr} = (q \cdot 2c)_{cr} = k \frac{D_w \pi^2}{H} \quad \dots (4)$$

ただし

$$D_w = \frac{E t_w^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

図4 は $H/t_w = 50$ 、 $2c/H = 0.2$ としたときの各 B/H の値に対し、縦軸に座屈係数 k を、横軸に $1/H$ をとりプロットしたものである。図5 は、同じく $H/t_w = 50$ で荷重幅 $2c/H = 1.0$ としたときの $k - 1/H$ の関係をプロットしたものである。両図より座屈係数 k は、 $1/H$ の増加とともに

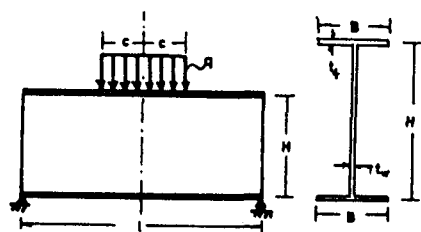


図 3

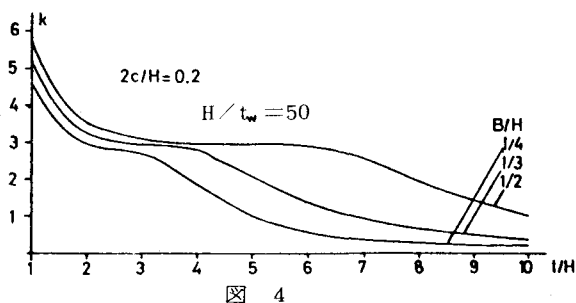


図 4

急激に減少し、その後は高原状を保ち、 $1/H$ のある値からまた減少しはじめる。後に示す座屈モード分布より、曲線が横軸にほぼ平行状態になる領域までは、局部座屈を示しており、その後続く減少領域は、全体座屈を示していることが分かる。また局部座屈領域と全体座屈領域の割合は、そのフランジ幅、すなわち B/H の値の大きさにより大変異なってくる。フランジ幅の変化による座屈係数 k の値の変化の割合は、局部座屈領域においては小さい。一方、全体座屈領域においては大きい。またこれらの両図からフランジ幅が狭くなると小さい荷重で座屈することが分かる。

図6 は、フランジ幅 $B/H = 1/2$ で $H/t_w = 50$ の場合について、それぞれの荷重幅 ($2c/H = 0.2, 0.4, 1.0$, $2c = 1$ (等分布)) に対し、座屈係数 $k - 1/H$ の関係を示したものである。等分布 ($2c = 1$) の場合は局部座屈領域において最小値を与える $1/H$ の値があることが分かる。部分分布荷重の場合 ($2c/H = 0.2, 0.4, 1.0$) は、そのような k を与える $1/H$ の値はない。部分分布荷重の場合、局部座屈領域において、その分布荷重幅の変化による k の値の変化が見られるが、全体座屈領域 ($1/H = 7$ 以降) においては、荷重幅変化による k の値の変化は見られない。

図7は、フランジ幅 $B/H=1/3$ 、分布荷重幅 $2c/H=0.2$ としたときの $H/t_w=50, 100, 150, 200$ に対する $k-1/H$ の関係を示したものである。局部座屈領域においては、 H/t_w の値の変化による座屈係数 k の値の変化はほとんど見られない。しかし、全体座屈領域においてはかなりはっきりとその違いが見られる。また、局部座屈領域と全体座屈領域とを分ける $1/H$ の値は H/t_w の値の大きさによりかなり異なり、 $H/t_w=50$ においては、 $1/H=4$ 付近から全体座屈へと移っていくが、 $H/t_w=200$ では $1/H=10$ でもまだ局部座屈であることが分かる。

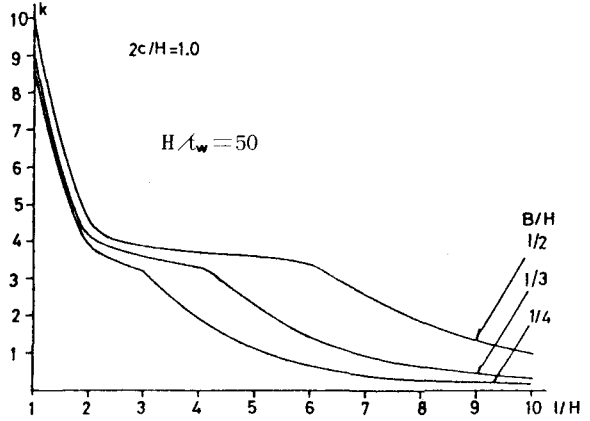


図 5

図8は、図7で示される曲線の $H/t_w=100$ の場合についての軸方向座屈モード分布と断面方向座屈モード分布を示している。 $1/H$ が1~2くらいまでは、断面方向の局部座屈モード分布が主として見られ、軸方向の座屈半波数も1波で十分対応できると思われる。しかし $1/H=3\sim 7$ においては断面方向の局部座屈モード分布と軸方向の局部座屈モード分布の両者が混在しており軸方向の座屈半波数も1波では、十分にこれらの座屈モードを示すことはできず本計算においては、9波までとり計算を行なった。8以降は、明らかに全体座屈を示している。

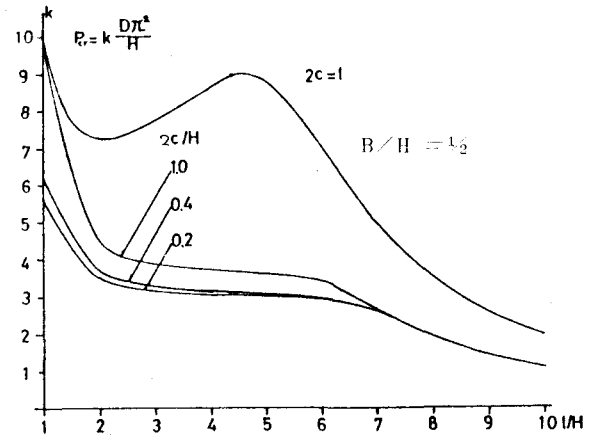


図 6

4. あとがき 両端単純支持I 一型断面部

材の上縁に部分分布荷重が作用した場合の弾性座屈について、二次元応力の全成分を座屈前応力分布とする帯板要素剛性方程式を用いて解析した。要素分割は、ウェブ部を8分割、フランジ部を2分割、座屈半波数を9波まで用いて計算を行なった。フランジ厚 t_f とウェブ厚 t_w は等しものとした。パラメーターとしては、 $1/H$ 、 B/H 、 H/t_w を用いた

計算結果をまとめると次のようになる。

1) 荷重幅が一定で、各フランジ幅に対する $k-1/H$ 関係のグラフより、フランジ幅が局部座屈領域と全体座屈領域とを分ける $1/H$ の値に大きく影響している。

2) 荷重幅の変化に対する $k-1/H$ 関係のグラフより局部座屈領域においては、その部分分布荷重幅の変化に従って座屈係数 k も変化しているが、全体座屈領域においては、荷重幅の変化による影響は、ほとんど見られない。スパン全体に等分布荷重が作用する場合は、 k は極小値と極大値を有する。

3) 分布荷重幅とフランジ幅を一定とする各 H/t_w に対する $k-1/H$ 関係のグラフより局部座屈領域においては、 H/t_w が変化しても座屈係数 k はほとんど変化しない。しかし全体座屈領域と局部座屈領域を

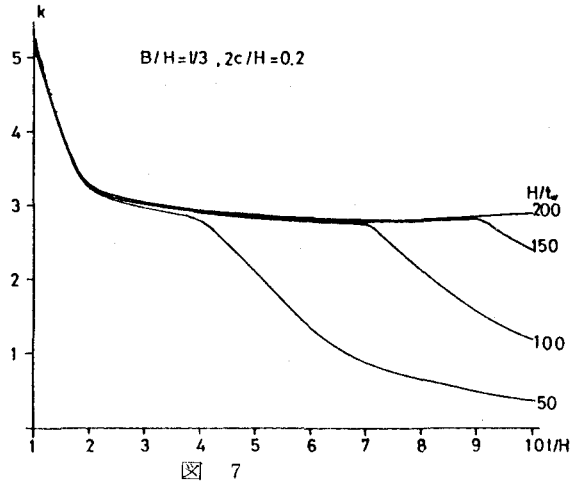


図 7

分ける $1/H$
の場所は、
かなり移動
する。 H/t_w
=200では
 $1/H$ が10で
もまだ局部
座屈で全体
座屈は生じ
ていない。

4) 座屈モ
ード分布と

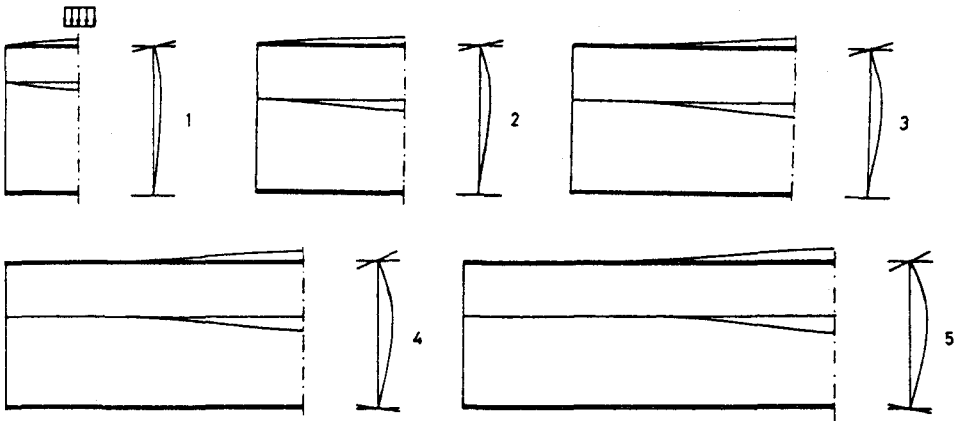


図7 より最初の急激に下降する部分においては
座屈半波数は1 波でも十分であるが、その後に
続く高原状態の領域ではかなりの座屈半波数を
とる必要がある。

5) フランジ幅が広く、板厚比 H/t_w が大きい
場合は、ほとんど局部座屈領域となっている。

数値計算は、北海道大学大型計
算機センターのHITAC M- 200H ,
M- 180 を使用した。

(参考文献)

1) L . Zetlin : Elastic
Instability of Flat
Plates Subjected
to Partial Edge
Loads, Proc of
ASCE, Vol. 81,
Paper No. 795,
pp.795-1~795-24,1955

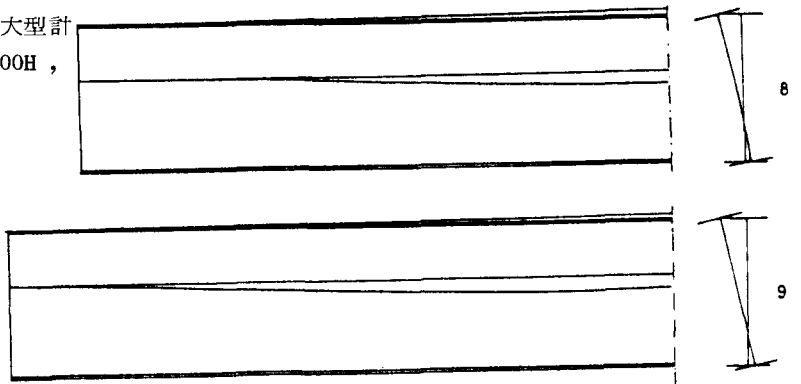


図 8

2) K.C. Rockey and D.K. Bagchi : Buckling of Plate Girder Webs Under Patial Edge Loadings, Int. J. Mech. Sci., Vol.12, pp.61~76, 1970

3) M.Z. Khan and A.C. Walker : Buckling of Plates Subjected to Localized Edge Loading, The Structural Eng. Vol.50, No.6, pp.225~232, June, 1972

4) M.Z. Khan and K.C. Johns : Bucklig of Web Plates Under Combined Loadings, Proc. of ASCE, ST 10, pp.2079~2092, Oct. 1975

5) M.Z. Khan, K.C. Johns and B. Hayman : Buckling of Plates with Partially Loaded Edges, Proc. of ASCE, ST 3, pp.547~558, Mar. 1977

6) K. Girkman : Stability of the Webs of Plate Girders Taking Account of Concentrated Load, IABSE Final Report, 1936

7) P. Johnson and M.W. Kenneth : Beam Buckling by Finite Element , Proc. ASCE, Vol. 100, No. ST 3, pp. 669~685, Mar. 1974

8) Y.L. Tien and S.T. Wang : Local Buckling of Beams under Stress Gradient, Proc. ASCE, No. ST 8, pp. 1571~1587, Aug. 1979