

I-2 斜張橋の一解法

北見工業大学 正員 菅原 豊
北見工業大学 正員 ○尾中 孝美
北見工業大学 石田 幸一

1. まえがき

斜張橋の解法には、応力法や変形法、さらには弾性理論と橋度理論に基づく方法など多くの研究が既になされている。本研究では、ケーブルと補剛桁との結合点を弾性支点と見なせば、斜張橋を弾性支点及び剛支点を有する連続桁に置き換えて解析することができる。この解法においては、補剛桁が等断面の場合について、補剛桁の挠みを表す基礎微分方程式を誘導し、これを発展させて変断面の場合についての一般式を得て挠みや断面力などを求めることを試みたものである。この解法によれば、挠みや断面力などの影響線は、基礎微分方程式を解くことによって得られ、他の解法に比較して解析の手法はかなり簡単化される特色を有している。

2. 等断面連続桁の基礎微分方程式

図-1(a)に示すような等断面連続桁を、図-1(b)に置換すると、 δ 関数を用いて次のように表される。

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = P\delta(x-a) - \sum_{j=1}^k R_j \delta(x-b_j) \quad \text{----- (1)}$$

(k: 中間支点数)

式(1)を、ラプラス変換及びラプラス逆変換すると、挠み、挠み角、曲げモーメント及びせん断力は次のようになる。

$$H = A Y_0 + IL \quad \text{----- (2)}$$

ここで、

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} y(x) \\ \phi(x) \\ M(x) \\ S(x) \end{bmatrix}, & A &= \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{6} \\ 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & EI & -EIx \\ 0 & 0 & 0 & -EI \end{bmatrix} \\ Y_0 &= \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \\ y'''(0) \end{bmatrix}, & IL &= \begin{bmatrix} \frac{\gamma_0}{EI} \\ \frac{\gamma_0'}{EI} \\ \frac{\gamma_0''}{EI} \\ -\gamma_0''' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{----- (3)}$$

式(3)の Y_0 は両端の境界条件により決定される。

$$\gamma_0(x) = \frac{1}{6} \left\{ P(x-a)^3 - \sum_{j=1}^k R_j (x-b_j)^3 \right\} \quad \text{----- (4)}$$

3. 変断面連続桁の一般式

図-2のような変断面連続桁は、式(2)、式(3)及び式(4)を用いて次のように解析できる。断面変化点を原点とする $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($\alpha=1, 2, 3, \dots, n$) をとると、 I_1 及び I_2 における区間の H は、等断面の式より求められ次式となる。

$$H_\alpha = A_\alpha Y_{\alpha(0)} + IL_\alpha \quad \text{----- (5)}$$



ここで、断面変化点での連続条件は、

である。式(7)により、式(5)、式(6)が連続された式が求まる。この求められた式の α を α に変換し、さらに、 $Y_{(100)} = Y_{(100)}$ で表す。同様にして各断面変化点を、連続条件により連続させ(ただし、外力があれば、これをせん断力の項に加える)、 $A_0, A_1, \dots, A_n$, $I_{(10)}, I_{(20)}, \dots, I_{(n0)}$ の係数に注目し、これらを整理すると、 α 級目における $H(\alpha)$, $A(\alpha)$, $I(\alpha)$ が決定され、次式となる。

ここぞ、

$$a_1 = 1, a_2 = \infty$$

$$Q_3 = \left\{ \frac{\alpha^2}{2} \frac{I_1}{I_2} + \sum_{r=1}^{\alpha} \left(\frac{I_1}{I_2} - \frac{I_1}{I_r} \right) \left(C_{r-1} \alpha - \frac{C_{r-1}^2}{2} \right) \right\}$$

$$a_{kk} = \left\{ \frac{\alpha^2}{6} \frac{I_1}{I_2} + \sum_{i=1}^{\alpha} \left(\frac{I_i}{I_1} - \frac{I_i}{I_2} \right) \left(\frac{C_i}{2} \alpha^2 - \frac{C_{i-1}}{3} \right) \right\}$$

$$b_1 = \left\{ \frac{\eta(x)}{I_1} + \sum_{r=2}^{\alpha} \left(\frac{1}{I_{r-1}} - \frac{1}{I_r} \right) \left(\eta(C_{r-1}) + \eta'(C_{r-1})(x - C_{r-1}) \right) \right\} \cdot \frac{1}{E}$$

$a'_j, a''_j, \tilde{a}_j, b'_j, b'', b''_j$ ($j=1, 2, 3, 4$) は, a_j, b_j の α に關して, 1~3回微分したものである。

$\eta(x)$ は、式(4)である。

$y_{(x_0)}$ は、図-2のように両端単純支持であれば、次の境界条件より $y_{(0)}$, $y'_{(0)}$, $\dots$, $y^{(n)}_{(0)}$ が求まる。

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ のとき, } y(0)=0, y'(0)=0 \\ x=l \text{ のとき, } y(l)=0, y'(l)=0 \end{aligned} \right\} \text{----- (1)}$$

式(8), 式(11)より y_1^0 , y_2^0 が求まり, これらを式(8)に代入し P 及び R の係数について整理すると, $y_1(x)$, $y_2(x)$ は
 次式となる。

ここでも、

$$\left. \begin{aligned} K &= \left(\frac{1}{1-x_{r-1}} - \frac{1}{1-x_r} \right), \quad A_a(x) = \frac{1}{x} \{ (x-a)^2 l - x^2 (l-a) \}, \quad B_a(x) = \frac{1}{x} \{ (l-a)^2 x - x l^2 (l-a) \}, \\ C_a(x) &= (3C_{r-1} x - 2C_{r-1}^2) \frac{(l-a)}{x} - \{ (C_{r-1} - a)^2 + 3(C_{r-1} - a)^2 (x - C_{r-1}) \}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$C_2(\mathcal{O})$ は, $C_2(X)$ の X に ℓ を代入したものであり, $A_{b_j}(X), B_{b_j}(X), C_{b_j}(X), C_{b_j}(\mathcal{O})$ は, 式(13)の a に b_j を代入して

得られる。また、 $A_{ij}''(x)$, $A_{bj}''(x)$ は $A_{ij}(x)$, $A_{bj}(x)$ の x について2回微分したものである。

支点反力 R_j は次のようにして得られる。各支点における撓みを $y_i(b_i)$ とすると次式となる。

$$Y = QR + P \quad \text{----- (14)}$$

ここで、

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(b_1) \\ y_2(b_2) \\ \vdots \\ y_n(b_n) \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & & a_{nj} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad \text{----- (15)}$$

a_{ij} ; 式(12)の第2項に $x = b_i$ を代入して得られる。

d_i ; 式(12)の第1項に $x = b_i$ を代入して得られる。

また各支点におけるバネ定数の係数行列を K とすると

$$R = KY \quad \text{----- (16)}$$

である。ここで、 $K^{-1} = F$ とすると式は

$$Y = FRY \quad \text{----- (17)}$$

となる。したがって、式(14), 式(17)より

$$R = (F - Q)P \quad \text{----- (18)}$$

ここで、

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1j} \\ f_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & & & f_{nj} \end{bmatrix} \quad \text{----- (19)}$$

$\begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, n \\ j = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases}$

式(19)の f_{ij} が求まると、弾性支点を有する変断面連続桁を解析することができる。

4. 斜張橋解析への応用

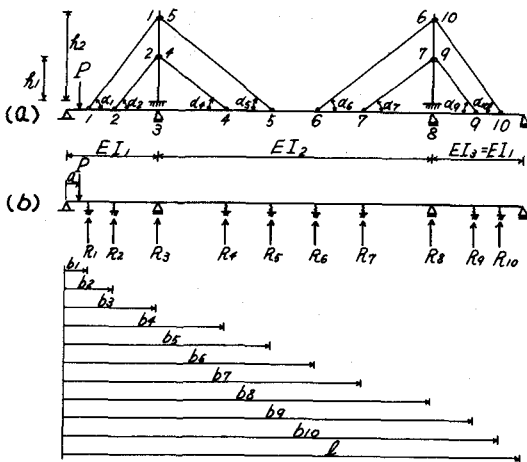


図 - 3

図-3(a)のような構造型式の斜張橋に應用する

に当たって、次のような仮定をおく。

- (1) 解析は、微小変形理論に基づいて行う。
- (2) 斜張橋を弾性支点及び剛支点を有する連続桁に置換する。(図-3(b))
- (3) ケーブルにおける軸力の鉛直成分(引張りと仮定)を反力 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ に置き換える。
- (4) ケーブルの伸びとタワーの弾性変形を考慮する。

図-3(a)より、タワー基部固定、全ケーブル固定とした場合の R を求める。

図-4において、ケーブルと補剛桁の結合点における各々の撓みを $y_1, y_2, \dots, y_n$ とし、 y_{ij} をケーブルの軸力 T_j による i 点の撓みとすると次式が得られる。

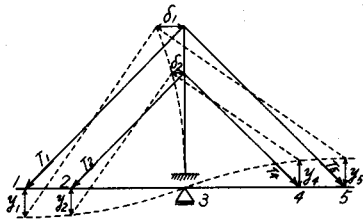
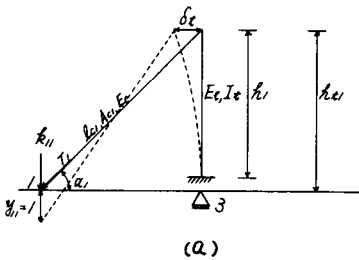


図 - 4

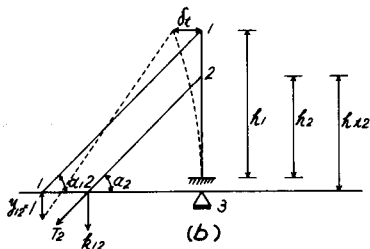
式(22)を式(20)に代入すると式(17)となる。したがって、 $\bar{K}$ は次のようになる。

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{13}} & \frac{1}{k_{14}} \\ \frac{1}{k_{21}} & \frac{1}{k_{22}} & & \\ \frac{1}{k_{31}} & & & \\ \frac{1}{k_{41}} & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, 8 \\ j = 1, 2, 3, \dots, 8 \end{cases}$$



(a)



(b)

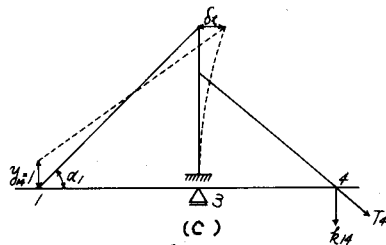


図 - 5

$$y_n = \sum_{j=1}^8 y_{nj} \quad (n=1, 2, 3, \dots, 8) \quad (20)$$

ここで、副支点に関する撓み y_{nj} 及び左側のタワーのケーブルを考えている場合には、右側のタワーのケーブルに関する撓み y_{nj} は0とする。また、この逆も同じである。

また、ケーブル j の軸力の鉛直成分 R_{ij} は

$$R_{ij} = T_{ij} \sin \alpha_{ij} \quad \alpha_{ij}; \text{ケーブル} j \text{ が水平となす角} \quad (21)$$

なお、 R_{ij} が支点に及ぼす撓みが y_{nj} であるから、バネ定数を k_{ij} とすると

$$y_{nj} = \frac{R_{ij}}{k_{ij}} \quad (22)$$

次に式(23)の k_{ij} を次のようにして求める。

(1) $i=j$ の場合

図-5(a)より、タワーの水平変位 δ_x は

$$\delta_x = \delta_{11} T_1 \cos \alpha_1 = \delta_{11} k_{11} \cos \alpha_1 \quad (24)$$

ここで、

δ_{11} ; タワーを片持梁と考え、 l 点に水平方向に集中荷重 $P=1$ を作用させたときの l 点の撓み

したがって、

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3E_x I_x} \quad \begin{matrix} E_x; \text{タワーのヤング率} \\ I_x; \text{タワーの断面2次モーメント} \end{matrix}$$

またケーブル1の伸び Δl_{c1} は

$$\Delta l_{c1} = \frac{T_1 l_{c1}}{A_{c1} E_c} = \frac{k_{c1} l_{c1}}{A_{c1} E_c} \cdot \frac{1}{\sin \alpha_1} \quad (25)$$

ここで、 l_{c1} ; ケーブル長さ、 E_c ; ケーブルのヤング率、

A_{c1} ; ケーブルの断面積

また、幾何学的条件より(微小項を無視)

$$\Delta l_{c1} = y_{11} \sin \alpha_1 - \delta_x \cos \alpha_1 = l_{c1} \sin \alpha_1 - \delta_x \cos \alpha_1 \quad (26)$$

したがって、式(24)、式(26)、及び式(26)より

$$k_{11} = \frac{l_{c1}}{A_{c1} E_c} \cdot \frac{1}{\sin \alpha_1} + \delta_{11} \cot^2 \alpha_1 \quad (27)$$

同様にして、他の $i=j$ の場合も求めることができる。

これらについては式(27)より次のようになる。

$$k_{ij} = \frac{1}{\frac{k_{xi}}{A_{ci} E_c \sin \alpha_i} + S_{kxi} \cot \alpha_i} \quad (i=j) \quad (28)$$

(2) $i \neq j$ の場合

図-5(b)より $i=j$ の場合と同様にして得られるが、ケーブル2の軸力 T_2 によってケーブル1は伸縮しないので、 T_2 によるタワーの変形によるものだけである。したがって、 k_{ij} は次式となる。

$$k_{ij} = \frac{1}{S_{kxi} \cot \alpha_i \cot \alpha_j} \quad (i \neq j) \quad (29)$$

また図-5(c)の場合には、次のようにして得られる。

ケーブル4の軸力 T_4 による補剛桁とケーブルの結合点1の撓みは上向きとなる。したがってこの場合における k_{ij} は負の値となる。すなわち、

$$k_{ij} = - \frac{1}{S_{kxi} \cot \alpha_i \cot \alpha_j} \quad (i \neq j) \quad (30)$$

となる。

ここで、 i, j は、ケーブルと補剛桁の結合点番号であり、 k, l は、 i, j に対応するケーブルとタワーの結合点番号である。式(28)、式(29)、及び式(30)より H を求め、これを式(18)に代入し R が求まると、式(12)により、断面変化する斜張橋の任意の点における撓み、曲げモーメントが得られる。

5. 数値計算例

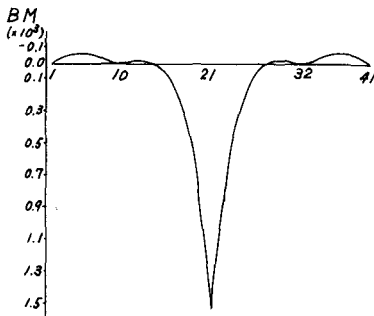


図-6

図-3(a)において斜張橋を左右対称とした。断面諸元は、尾道大橋のものを参考とし、本解法と文献(1)によるものとで比較したが、各々の影響線の数値は、完全に一致した。

一例として、中央点における曲げモーメント影響線を描くと図-6になる。また、中央点に着目して、タワーの剛性を变化させた場合の曲げモーメントは図-7になる。なお本解法との比較に用いた断面諸元は次の通りであり、分割数は、40分割とした。

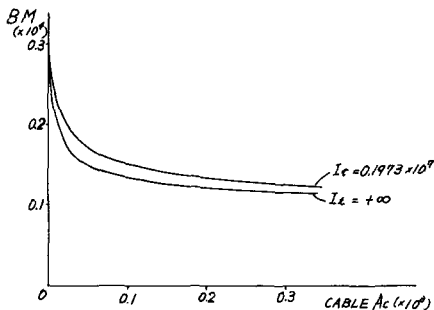


図-7

$$l_1 = l_3 = 9000 \text{ (cm)} \quad (\text{第1及び第3径間長})$$

$$l_2 = 22000 \text{ (cm)} \quad (\text{第2径間長})$$

$$E_s = E = 2.1 \times 10^6 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

$$I_1 = I_3 = 2.024 \times 10^9 \text{ (cm}^4\text{)}, \quad I_2 = 2.429 \text{ (cm}^4\text{)}$$

$$I_c = 1.973 \times 10^6 \text{ (cm}^4\text{)}$$

$$E_c = 1.6 \times 10^6 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

$$A_{c1} = A_{c10} = 1.388 \times 10^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$A_{c2} = A_{c9} = 8.320 \times 10^1 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$A_{c4} = A_{c7} = 8.960 \times 10^1 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$A_{c5} = A_{c6} = 1.224 \times 10^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

6. あとがき

この解法では、斜張橋を弾性支点と剛支点を有する連続橋に置換して補剛桁の断面力を求めることを主眼としたが、支点反力 R_i から、ケーブルの軸力、タワーの軸力、及びタワーの曲げモーメントなども容易に求めることができる。また、この解法によるバネ定数 K は、文献(2)における $C+H$ と一致したことが確認された。なお、数値計算に当たっては、北見工業大学における電子計算機 ACOS-4 を使用したが、応力法と比較した計算時間は、約 $1/2$ 程度であった。

参考文献

- (1) 渡辺 昇： 橋の理論と計算法，現代理工学出版，P. 279～327.
- (2) 小西一郎編： 鋼橋設計編Ⅱ，丸善，P. 918～936.
- (3) M.S. Traitsky: *Cable-Stayed Bridges Theory and Design*, Crosby Lockwood Staples
- (4) T. ウィンスキー： 梁の理論，森北出版
- (5) 長谷川，成昭： 各種構造形式の斜張橋の曲げモーメント，たわみに関する研究，土木学会誌，53, 9 (1968.9) P. 88～95.
- (6) 前田，林： 任意な形状の斜張橋の解析，土木学会論文集，第 160 号 (1968.12)，P. 39～48.
- (7) 宮本 裕： 微分方程式による斜張橋の近似解法，岩手大工研報，24 (1971)，P. 75～84.