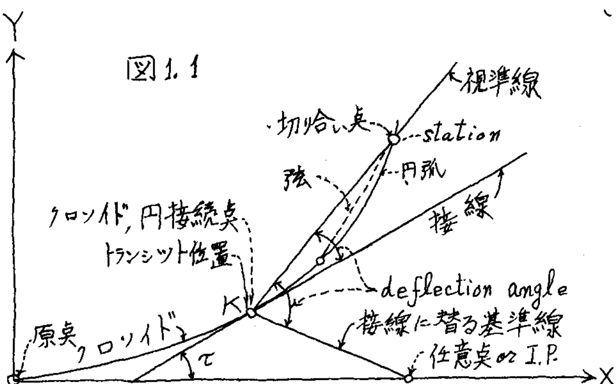
# IV—4　クロソイドに接続する円曲線各点をクロソイドの原点を原点とする共通X, Y座標によって表わす解析

道都短期大学　正会員　今井芳雄

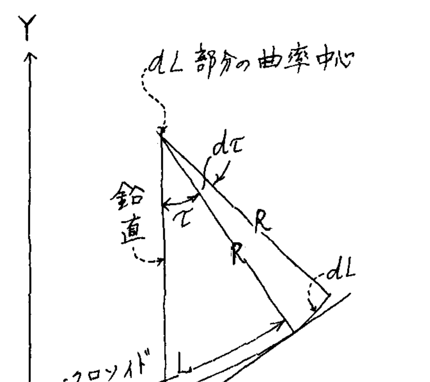
## §1. 前言

クロソイド曲線は、連続的に半径が変化する曲線であって、クロソイドのstation meterを変数に入れて、そのX, Y座標計算はクロソイドポケットブックの単位クロソイド表の$l$, $x$, $y$値から精密に計算されている




このクロソイドに続いて布設される円曲線については最早座標値というものは、従来は無く円曲線始点K（図1.1）にtransitを据え接線からdeflection angleを振った視準線と円弧に張る弦長との切り合い点として求め、求め終ったら、順次先え先えと設定する方式を出なかった。この方式は今後とも必要であるがdeflection angleの基準線は、接線に限られていた。従ってやゝ窮屈であった。この時もし、円曲線もクロソイドと同様に、stationのX, Y座標値が求められてあれば、基準線は接線1つに制約されることなく座標を利用し地形の見通しに応じ幾通りも選定することが出来る。deflection angleも座標間の角として扱い、任意に計算しうることになる。筆者は円曲線についても、クロソイドに真似て、station meterから、X, Y座標を、求める解析を得たので発表するものであります

## §2. クロソイド曲線の概要




クロソイド曲線の始点（半径無限大）から半径Rになるまでの曲線長をL（図2.1）とすれば

$$R.L = \text{constant}\ (\text{クロソイドの性質}) \quad \cdots\cdots (2.1)$$

$$= C\ \text{とおく} \quad \cdots\cdots (2.2)$$

$$= A^2\ \text{ともおく} \quad \cdots\cdots (2.3)$$

$$\therefore \frac{1}{R} = \frac{L}{C} \quad \cdots\cdots (2.4)$$

又クロソイド曲線の微小長$dL$については

$$dL = R \cdot d\tau \quad \cdots\cdots (2.5)$$

$$\therefore d\tau = \frac{1}{R} dL \quad \cdots\cdots (2.6)$$

$$= \frac{L}{C} dL \quad \cdots\cdots (2.7)$$

$$\therefore \tau = \int d\tau \quad \cdots\cdots (2.8)$$

$$= \frac{1}{C}\int L.dL \quad \cdots\cdots (2.9)$$

$$= \frac{1}{C} \cdot \frac{L^2}{2} + C_1 \quad \cdots\cdots (2.10)$$

ここで$C_1$は積分常数、$\tau = 0$のときクロソイド長$L = 0$として$C_1$を定める。$\therefore C_1 = 0$ ……(2.11)

$$\therefore \quad \tau = \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{2}L^2 \qquad\text{-----------} \quad (2.12)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{L^2}{R.L} \qquad\text{-----------} \quad (2.13)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{R} \qquad\text{-----------} \quad (2.14)$$

$$= \frac{1}{2}\,\ell^2 \qquad\text{-----------} \quad (2.15)$$

但し $\ell \equiv \dfrac{L}{\sqrt{C}}$ ----------- (2.16)

従って $R.\ell = \sqrt{C}$ ----------- (2.17)

(2.15)式によって $\tau$ は $\ell$ を知れば直ちに radian 角として求まる。(2.17) 式も、用途の多い式である

## §3. 対称凸型クロソイド曲線の接線長

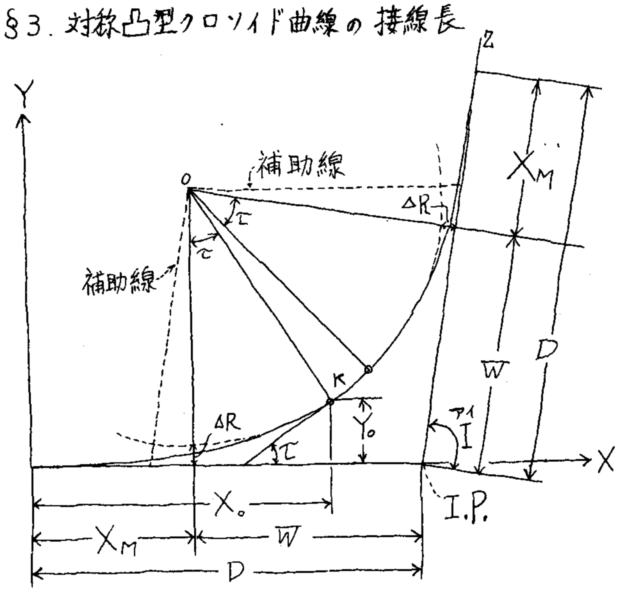



図 3.1

図 3.1 において円の中心 O から接線 I.P.~O I.P.~Z に平行に補助線を2本引く

$$\ell \equiv \frac{L}{\sqrt{C}} \qquad\text{-----------} \quad (2.16)$$

$$R + \Delta R = Y_0 + R\cos\tau \quad \cdots\cdots (3.1)$$

$$= Y_0 + R\cos\frac{1}{2}\ell^2 \quad \cdots\cdots (3.2)$$

$$W = \frac{R+\Delta R}{\sin I} - \frac{R+\Delta R}{\tan I} \quad \cdots\cdots (3.3)$$

$$= \frac{R+\Delta R}{\dfrac{\tan I}{\sqrt{1+\tan^2 I}}} - \frac{R+\Delta R}{\tan I} \quad \cdots\cdots (3.4)$$

$$= \frac{R\left[\left(\sqrt{1+\tan^2 I}-1\right)\left(y\ell + \cos\frac{1}{2}\ell^2\right)\right]}{\tan I} \quad \cdots (3.5)$$

$$X_M = X_0 - R\sin\tau \qquad\text{------} \quad (3.6)$$

$$D = X_M + W \qquad\text{--------} \quad (3.7)$$

$$= R\left[x\ell - \sin\frac{1}{2}\ell^2 + \frac{\left(y\ell + \cos\frac{1}{2}\ell^2\right)\left(\sqrt{1+\tan^2 I}-1\right)}{\tan I}\right] \qquad\text{-------------} \quad (3.8)$$

接線長 D は O~I.P. 間の距離であり、点 I.P は X 軸上に在るから座標は $Y=0$ であり、D は X 座標値である $\sqrt{1+\tan^2 I}$ の根号の +, − は $\tan I$ の符号と1致させてえらぶ。

## §4. 円曲線の直角座標

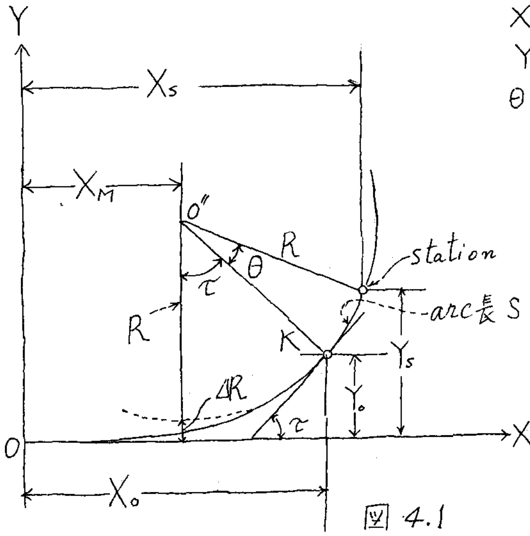



図 4.1

図4.1において

$X_s$ …… station の X座標 ………… (4.1)

$Y_s$ …… station の Y座標 ………… (4.2)

θ …… クロソイド、円曲線接続点Kから円曲線任意stationまでの角 …… (4.3)

$\tau$ …… $=\frac{1}{2}l^2$ …(2.15) $l=\frac{L}{\sqrt{C}}=\frac{L}{\sqrt{R.L}}$ …… (2.16)

$X_M$ … 円曲線中心 $O''$ の X座標 になる

とすれば $X_s = X_M + R\sin(\tau+\theta)$ …… (4.4)

$Y_s = (R+\Delta R) - R\cos(\tau+\theta)$ …… (4.5)

$= Y_0 + R\cos\tau - R\cos(\tau+\theta)$ …… (4.6)

$\theta = \dfrac{\text{点Kから円曲線経過長}S}{R}$

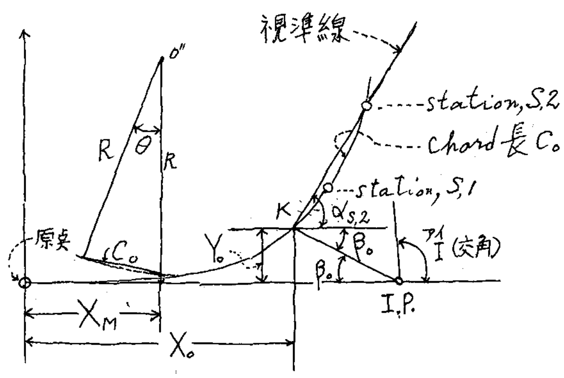
円曲線station毎のX座標，Y座標は(4.4)式，(4.5)式で求めうるわけで、クロソイドのX，Y座標計算の筆法に似せて．円曲線の任意stationまでの経過円弧長Sをとり入れてX，Y座標値 $X_s$，$Y_s$ を求めたものである

## §5. 円曲線布設のための deflection angle

円の半径をR，中心角θの円弧の弦長を$C_0$とする（図5.1）然るとき

$$C_0=\sqrt{(R-R\cos\theta)^2+(R\sin\theta)^2} \quad \cdots\cdots (5.1)$$

$$=R\sqrt{2(1-\cos\theta)} \quad \cdots\cdots (5.2)$$




クロソイド終点Kにtransitを据え，I.P.に視準したとき，station S.2 点の deflection angle は

$\alpha_{s2} + \beta_0$ である ………… (5.3)

$$\tan\alpha_{s,2}=\frac{[Y_s]_{s=s.2}-Y_0}{[X_s]_{s=s.2}-X_0} \quad \cdots\cdots (5.4)$$

$$\tan\beta_0=\frac{Y_0}{D-X_0} \quad \cdots\cdots (5.5)$$

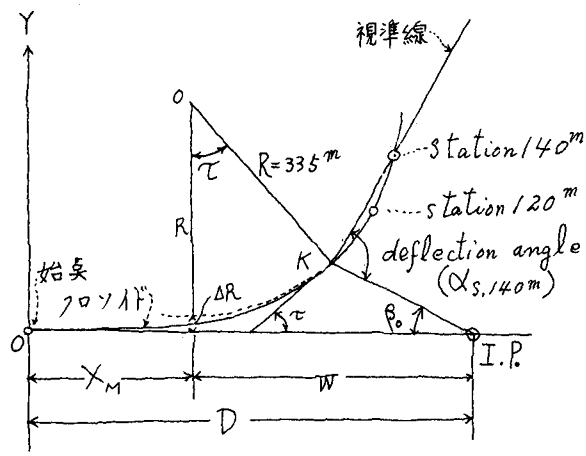
三角法の公式から

$$\tan(\alpha_{s2}+\beta_0)=\frac{\tan\alpha_{s,2}+\tan\beta_0}{1-\tan\alpha_{s,2}\times\tan\beta_0} \quad \cdots\cdots (5.6)$$

$$
= \frac{\dfrac{[Y_s]_{s=\text{station } S.2} - Y_0}{[X_s]_{s=\text{station } S.2} - X_0} + \dfrac{Y_0}{D - X_0}}{1 - \dfrac{[Y_s]_{s=\text{station } S.2} - Y_0}{[X_s]_{s=\text{station } S.2} - X_0} \times \dfrac{Y_0}{D - X_0}} \quad \text{-------------------}(5.7)
$$

(5.7)式右辺を計算し 左辺の $(\alpha_{S.2} + \beta_0)$ を求めることが出来る。布設は deflection angle $(\alpha_{S.2} + \beta_0)$ を左に振ったtransitの視準線を，station S.1から弦長 $C_0$ の長さとの切り合い点として station S.2 点を定めることで完成する

## §6．円曲線station座標，および deflection angle 計算例




クロソイド全長　$L = 104^m000$

円曲線半径　$R = 335^m000$

接線O〜I.P. 接線I.P.〜Z（図3.1）の交角

$I = 41°17'25''$

$= 0.7206513$ radian　とするとき

クロソイドおよび円曲線座標その他の諸元を求めること（図6.1）

（解）

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{R}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{104^m}{335^m}$$

$$= 0.1552239 \text{ radian}$$

（ここで 1秒 $= 10^{-6} \times 4.848$ radian）

クロソイド始点の station meter を 0 meter とする

円曲線終点の station meter

$$= L + (I - 2\tau)R$$

$$= L + \left(I - 2 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{R}\right)R$$

$$= R \times I \text{ radian}$$

$$= 335^m \times 0.7206513 \text{ radian}$$

$$= 241.^m418$$

$L = 104^m$

$R = 335^m$ のクロソイドについては

$$l \equiv \frac{L}{\sqrt{LR}}$$

$$= \frac{104^m}{\sqrt{104^m \times 335^m}}$$

$$= 0.5571784$$

この $l$ に対する $x, y$ は $l$ の単位クロソイド表値の短区間は直線変化するとみて補間すれば

$$x = 0.555836864$$

$$y = 0.02877959$$

を得る

$$\text{接線長 } D = X_M + W \quad \cdots\cdots (3.7)$$

$$= R\left[(xl - \sin\frac{1}{2}l^2) + \frac{(yl + \cos\frac{1}{2}l^2)(\sqrt{1+\tan^2 I} - 1)}{\tan I}\right] \cdots\cdots (3.8)$$

$$= 335^m\left[(0.1550972) + \frac{(1.0040119)(0.3308914 - 1)}{0.8782209}\right]$$

$$= 178.^m 6835$$

つぎに1例として

station meter $= 140^m$ 点の $X, Y$ 座標および K 点における deflection angle を求めてみる

$$[X_s]_{s = \text{station } 140^m} = X_M + R \cdot \sin(\tau + \theta) \cdots\cdots (4.4)$$

$$= 51.^m 959 + 335^m \sin\left(0.1552239^{\text{radian}} + \frac{140^m - 104^m}{335^m}\right)$$

$$= 51.^m 959 + 86.^m 9914$$

$$= 138.^m 950$$

$$[Y_s]_{s = \text{station } 140^m} = Y_0 + R\cos\tau - R\cos(\tau + \theta) \cdots\cdots (4.5)$$

$$= 5.^m 372 + 330.^m 9723 - R\cos\left(0.1552239^{\text{radian}} + \frac{140^m - 104^m}{335^m}\right)$$

$$= 336.^m 344 - 323.^m 508$$

$$= 12.^m 8363$$

ここでクロソイド終点のX座標$X_o$，Y座標$Y_o$は

$$X_o=\sqrt{R\cdot L}\times x$$
$$=103.^m750$$

$$Y_o=\sqrt{R\cdot L}\cdot\times y$$
$$=5.^m372$$

つぎにK点(図6.1)における deflection angle $(\alpha_{s,140^m}+\beta_o)$を求める

$$\tan(\alpha_{s,140^m}+\beta_o)=\frac{\dfrac{[Y_s]_{s=140^m}-Y_o}{[X_s]_{s=140^m}-X_o}+\dfrac{Y_o}{D-X_o}}{1-\dfrac{[Y_s]_{s=140^m}-Y_o}{[X_s]_{s=140^m}-X_o}\times\dfrac{Y_o}{D-X_o}}\quad\text{------------}(5.7)$$

$$=\frac{\dfrac{12.^m8363-5.^m372}{138.^m950-103.^m750}+\dfrac{5.^m372}{178.^m684-103.^m750}}{1-\dfrac{3.^m4643}{35.^m2}\times\dfrac{5.^m372}{74.^m9335}}=0.2881241$$

$$\therefore(\alpha_{s,140^m}+\beta_o)=\tan^{-1}0.2881241=16^\circ04'22.''8$$

即ちクロソイド終点Kに、transitを据えた時、I.P.を視準しこれから16°04′22.″8を左に振った視準線を、station 120ᵐ点から弦長$C_o$で切り合いすれば station 140ᵐ点が地上に設定される

$$C_o=R\sqrt{2(1-\cos\theta)}\quad\text{-----------------}(5.2)$$
$$=33.5^m\sqrt{2\left(1-\cos\frac{20^m}{335^m}\right)}$$
$$=335^m\sqrt{2(1-0.9982/8)}=19.^m999$$

§7．結言

クロソイド曲線については　τ は(2.15)式で直接求めうる．接線長Dは筆者の解析した(3.8)式でΔR を求めることなく求めうることを示した。これらの助けを借りて、クロソイドに接続する円曲線のX，Y座標$[X_s]$，$[Y_s]$が(4.4)式，(4.5)式 で与えられた。式の形は平凡だが、利用の開ける式とおもうものであります。円曲線布設のTransit位置は、(1) X軸上，(2) クロソイド上，(3) クロソイド終点，(4)円曲線station上 の4つのどれをえらんでも、切り合いのための視準線を得るための、deflection angle は(5.6)式でまかなわれるわけで、deflection angle の基準視線の前方視点は(i) X軸上の点 (2) 特にI.P.と地形に応じ自由にせんたくのきく点を視準すればよいことになった。最大の特徴はtransit を反転する必要のないことで反転に伴う備倚誤差という心配は不要になった。 円曲線の座標解析は deflection angle 法の適用を広範なものにしたと云える　(1979.9.22)