

II-9 貯水池の氷厚に影響する要因について

北見工業大学 正員 佐渡公明
北見工業大学 正員 O中尾隆志

1. まえがき

貯水池・湖沼などの氷厚を求める問題は、水と氷の2相界面が時間と共に移動する一次元熱伝導の相変化問題であり、最初に取り扱った J. Stefan の名前をとってステファン問題とも呼ばれている。最近では、種々の解法が考えられているが^{1), 2)} 難解であり、境界条件の扱いが実用的ではないと思われる。

ここでは、水と氷の境界に於けるステファン条件から出発して理論を展開し、実用的な氷厚計算を目的として、氷厚増減に及ぼす種々の因子の影響を調べるものである。

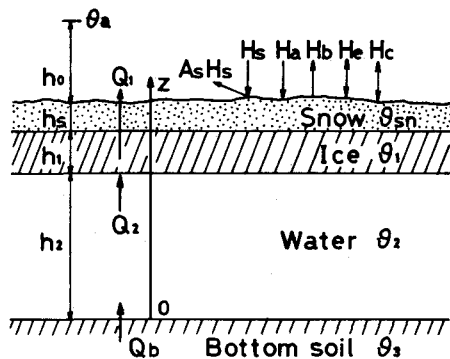


図-1 結氷貯水池の熱収支要素

2. 氷厚成長の理論式

図-1の水板下面 ($z = h_2$) の成長と融解を一次元的に計算する理論式は、既に昨年の土木学会道支部発表会で発表している³⁾ ので、ここでは若干の補足をしながら要点のみを記す。 $z = h_2$ に於ける熱収支方程式 (ステファン条件) は次式である。記号の説明は最後に一覽として載せておく。

$$\rho_i l \frac{dh_1}{dt} + Q_2 = Q_1 \quad (1)$$

積雪表面と大気間の熱収支要素 H は、図-1の通りである。積雪面に対する加熱を正として、各熱収支項の総和は次のように平衡温度 θ_s^* と熱交換係数 α_s を定義する。只し、短波放射は積雪表面で全て吸収されるとする。

$$(1 - A_s) H_s + H_a - H_b - H_e - H_c = \alpha_s (\theta_s^* - \theta_s) \quad (2)$$

顕熱・潜熱輸送の方向は、それぞれ水気温・表面温度、大気中の水蒸気圧の相互関係で決まるが、式(2)は積雪面からの放熱の場合である。式(2)の右辺は、左辺の総熱流束を θ_s で線形近似した形で、伝熱学で言う熱伝達の式に相当する。また、 α_s は総熱流束を θ_s で微分しても得られる。かくして、 α_s , θ_s^* は次のようになる。

$$\alpha_s = h(1 + 1.5\varphi) + 4\sigma T_0^3 \quad \dots (3) \quad \theta_s^* = \theta_a + \frac{R_N - 1.5h\Delta E}{\alpha_s} \quad \dots (4)$$

次に、氷板・積雪の温度分布を定常とすれば、 Q_1 は氷板・積雪内の熱伝導と大気の熱伝達より次式となる。

$$Q_1 = \frac{\theta_f - \theta_s^*}{\frac{h_1}{\lambda_i} + \frac{h_s}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha_s}} \quad (5)$$

さて、水温・地温については、貯水池内の流速が冬期温水期のため無視できるとすれば、次の式(6)を式(7)の条件で解くことになる。

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} = k_j \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial z^2} \quad (j = 2, 3) \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{境界条件; } z = h_2, \quad \theta_2 = \theta_f; \quad z \rightarrow -\infty, \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial z} = 0 \\ \text{初期条件; } t = 0, \quad \theta_j = \bar{\theta}_j \quad (j = 2, 3) \\ \text{接続条件; } z = 0, \quad \theta_2 = \theta_3, \quad \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} = \lambda_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (7)$$

Q_z は, $Q_z = -\lambda_z \partial \theta_z / \partial z|_{z=h_z}$ から求まり, t 時間内の Q_z の平均値 $\bar{Q}_z$ は次のように得られる。

$$\bar{Q}_z = \frac{2\lambda_z \bar{\theta}_3}{h_z \sqrt{F_t}} \left\{ \frac{\bar{\theta}_2}{\bar{\theta}_3} \left\{ \frac{1 - e^{-\sqrt{4F_t}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{F_t}} \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{F_t}} \right\} \right. \\ \left. - \frac{\bar{\theta}_2}{\bar{\theta}_3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-b}{1+b} \right)^n \left\{ \frac{e^{-\frac{(2n+1)^2}{4F_t}}}{\sqrt{\pi}} - \frac{(2n+1)}{2\sqrt{F_t}} \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)}{2\sqrt{F_t}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(2n-1)^2}{4F_t}} - \frac{(2n-1)}{2\sqrt{F_t}} \operatorname{erfc} \frac{(2n-1)}{2\sqrt{F_t}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n^2}{F_t}} + \frac{2n}{\sqrt{F_t}} \operatorname{erfc} \frac{n}{\sqrt{F_t}} \right\} \right. \\ \left. + \frac{2b}{(1+b)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-b}{1+b} \right)^n \left\{ \frac{e^{-\frac{(2n+1)^2}{4F_t}}}{\sqrt{\pi}} - \frac{(2n+1)}{2\sqrt{F_t}} \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)}{2\sqrt{F_t}} \right\} \right\} \quad (8)$$

$$b = \sqrt{\frac{C_3 \rho_3 \lambda_3}{C_2 \rho_2 \lambda_2}}, \quad F_t = \frac{k_z t}{h_z^2}, \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$$

式(1)に式(5)と $Q_z = \bar{Q}_z$ を代入して, ステファン条件は次のようになる。

$$\rho_i l \frac{dh_i}{dt} = \frac{\theta_f - \theta_s^*}{\frac{h_i}{\lambda_i} + \frac{h_s}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha_s}} - \bar{Q}_z \quad (9)$$

式(9)を, $t=0$ で $h_i = h_{in}$ の初期条件で積分すると, 次の h_i に関する超越方程式が得られる。

$$\frac{\lambda_i (\theta_s^* - \theta_f)}{\bar{Q}_z} \log e \left| 1 + \frac{\bar{Q}_z h_i}{\lambda_i B (\theta_s^* - \theta_f)} \right| - \frac{h_i}{\bar{Q}_z} = \frac{t}{\rho_i l} \quad (10)$$

$$B = 1 + \frac{\bar{Q}_z}{(\theta_s^* - \theta_f)} \left(\frac{h_{in}}{\lambda_i} + \frac{h_s}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha_s} \right) \quad (11)$$

実際には多くの場合, 式(10)の絶対値内は正で, $|\bar{Q}_z h_i / \lambda_i B (\theta_s^* - \theta_f)| < 1$ なので, h_i の近似値は次式で求まる。

$$h_i = B \left\{ \sqrt{\left(h_{in} + \frac{h_s \lambda_i}{\lambda_s} + \frac{\lambda_i}{\alpha_s} \right)^2 - \frac{2\lambda_i \theta_s^*}{\rho_i l} t} - \left(h_{in} + \frac{h_s \lambda_i}{\lambda_s} + \frac{\lambda_i}{\alpha_s} \right) \right\} \quad (12)$$

なお, 式(9)より氷厚の増減は次のように分類され,

$$\frac{\theta_f - \theta_s^*}{\frac{h_i}{\lambda_i} + \frac{h_s}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha_s}} \begin{cases} \geq \bar{Q}_z & \text{増加} \\ = \bar{Q}_z & \text{平衡} \\ < \bar{Q}_z & \text{減少} \end{cases} \quad (13)$$

水面温度が 0°C になってから, 結氷が生じるための必要条件は次のようになる。

$$\alpha_s (\theta_f - \theta_s^*) > \bar{Q}_z \quad (14)$$

3. 氷厚の無次元式

氷厚に影響する要因を調べるために, 氷厚の無次元解を求めてみる。まず, 次の無次元変数を導入する。

$$\delta_i = \frac{\alpha_s h_i}{\lambda_i}, \quad \delta_s = \frac{\alpha_s h_s}{\lambda_s}, \quad t' = 2\alpha_s \sqrt{\frac{t}{c_i \rho_i \lambda_i}}, \quad Ste = \frac{c_i (\theta_f - \theta_s^*)}{l}, \quad \bar{Q}_z' = \frac{c_i \bar{Q}_z}{\alpha_s l} \quad (15)$$

ここで, δ_i, δ_s は伝熱学で言うビオー (Biot) 数であり, Ste (Stefan) 数はヤコブ (Jakob) 数である。これらの無次元変数を式(9)に代入して

$$\frac{d\delta_i}{dt'} = \frac{t'}{2} \left(\frac{Ste}{1 + \delta_i + \delta_s} - \bar{Q}_z' \right) \quad (16)$$

となり, $t'=0$ で $\delta_i = \delta_{in}$ の初期条件で積分すると次式が得られる。

$$t'^2 = \frac{4 Ste}{\bar{Q}_z'^2} \log e \left| 1 + \frac{\bar{Q}_z' \delta_i}{Ste - \bar{Q}_z' (1 + \delta_{in} + \delta_s + \delta_i)} \right| - \frac{4 \delta_i}{\bar{Q}_z'} \quad (17)$$

δ_1 の最大値 δ_{1max} は式(17)の分母 = 0 から次のように求められる。

$$\delta_{1max} = \frac{Ste}{\overline{Q}_2'} - 1 - \delta_{in} - \delta_s \tag{18}$$

これから、Ste数が大きく、 $\overline{Q}_2'$ 、 δ_{in} 、 δ_s が小さければ、氷厚が成長しやすいことがわかる。なお、式(16)～(18)は S.D.Foss と S.S.T. Fan が求めている結果⁴⁾に δ_{in} 、 δ_s の影響を考慮したものである。

4. 氷厚に影響する要因の効果

氷厚増減に影響する要因としては、積雪表面より上の気象学的影响と積雪表面より下の積雪・氷板・貯水池・地中の伝熱学的影响に大別される。気象学的影响は全て、式(3)の熱交換係数と式(4)の平衡温度に含まれている。

以上、種々の要因の影響を調べるために、式(17)を使って、表1のCase 1, Case 2について計算した結果が図-2, 3である。図-2, 3より無次元氷厚 δ_1 が増加するには、 t^* とSte数が増し、 $\overline{Q}_2'$ と $\delta_{in} + \delta_s$ が減少すれば良いことがわかる。なお、両グラフとも $t^* \rightarrow \infty$ で式(18)の最大無次元氷厚に漸近していく。積雪深 h_s に等価な氷厚 h_i とすれば $h_i^* = \lambda_i / \lambda_s \times h_s (= 21.2 h_s)$ となるので、無次元積雪深 δ_s と無次元初期氷厚 δ_{in} は、同じ効果を持つ。又 $\delta_{in} + \delta_s = 19$ の場合は、氷厚が増えも減りもしない平衡状態である。

次に式(12)を使って、表2のCase 3, 4, 5について計算した結果が図-4, 5, 6である。これらの図は24時間経過後の氷厚増減 Δh_i を示している。ことわっておくが、氷と氷の境界面に於る氷厚増減を図示したものである。いわゆる、まごおりについてであり、まごおりの上、下にできる、ゆきごおり (Snow ice) や水中氷 (Frazil slush) については言及していない。

さて、図4, 5, 6より氷厚が増加するには、水深 h_2 ・平衡温度 ϑ_2^* ・熱交換係数 α_2 が増加し、初期氷厚 h_{in} ・積雪深 h_s ・初期水温 ϑ_2 ・初期地温 ϑ_2 ・拡散係数 k_2 が減少すれば良いことがわかる。 h_2 が深く、 ϑ_2 ・ ϑ_2^* ・ k_2 が小さい

表 1 無次元氷厚に影響する要因の組合せ

	Ste ($^{\circ}\text{C}$)	$\overline{Q}_2'$ ($\overline{Q}_2 \times 10^3 \text{ cal/cm}^2 \text{ s}$)	$\delta_{in} + \delta_s$ (h in cm)	対応図面	他の物理量
Case 1	0.031375 (-5)	0.0006275 (0.1)	0 (0)	図-2	$\alpha_2 = 0.001 \text{ cal/cm}^2 \text{ s}^{\circ}\text{C}$ $\ell = 80 \text{ cal/g}$ $\lambda_s = 2.5 \times 10^{-4} \text{ cal/cm s}^{\circ}\text{C}$
	0.062750 (-10)	0.0012550 (0.2)			
	0.094125 (-15)	0.0018775 (0.3)			
	0.125500 (-20)	0.0025000 (0.4)			
	0.156875 (-25)	0.0031250 (0.5)			
	0.188250 (-30)	0.0037500 (0.6)			
Case 2	0.062750 (-10)	0.0031375 (0.5)	0 (0.0)	図-3	$\lambda_i = 5.3 \times 10^{-3}$ $\rho_i = 0.92 \text{ g/cm}^3$ $C_i = 0.502 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$
			1 (5.5)		
			2 (11.0)		
			3 (16.5)		
			19 (100.7)		

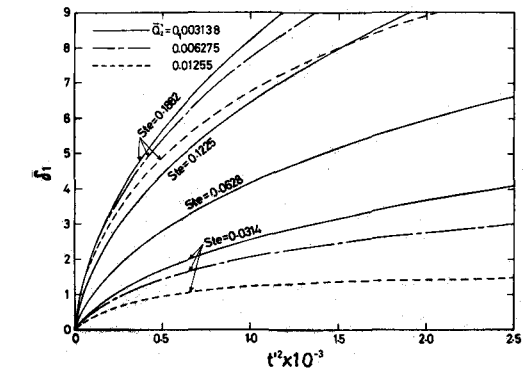


図-2 Ste数、 $\overline{Q}_2'$ の影響

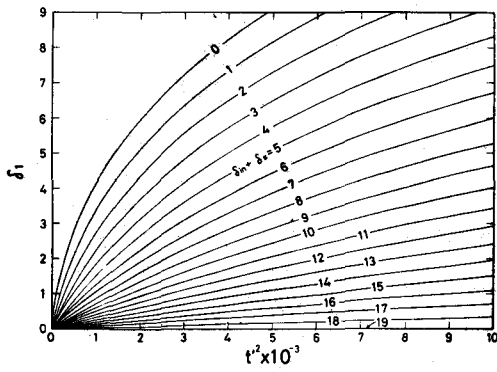


図-3 δ_{in} 、 δ_s の影響

表 2 氷厚に影響する要因の組合せ

	h_2 (m)	h_s (cm)	h_{in} (cm)	$\alpha_s \times 10^3$ (cal/cm ² s°C)	θ_s^* (°C)	$\bar{\theta}_s$ (°C)	$\bar{\theta}_i$ (°C)	k_2 (cm/s)	対応図面	他の物理量	
Case 3	1 20	0 10	0	1.0	-10	1	5	0.1	図-4	$\Delta t = 24$ hr $\ell = 80$ cal/g $\lambda_s = 2.5 \times 10^{-3}$ cal/cm s °C $\lambda_i = 5.2 \times 10^{-3}$ $\lambda_b = 5.4 \times 10^{-3}$ $\rho_i = 0.92$ g/cm ³ $\rho_s = 1.0$ $\rho_b = 2.1$ $c_2 = 1$ cal/g °C $c_3 = 0.32$	
	2 30	1 50	5								
	5 40	2 100	50								
	10 50	5	50								
Case 4	20	0	0	0.1	1.0	-1	1	5	0.1	図-5	
				0.2	2.0	-2					
				0.3	3.0	-4					
				0.5	4.0	-30					
Case 5	20	0	0	1.0	-10	0.0	1.0	0	1×10^{-2}	図-6	
						0.2	2.0	5	2×10^{-2}		
						0.4	3.0	10	5×10^{-2}		
						0.6	4.0	10	1×10^{-2}		

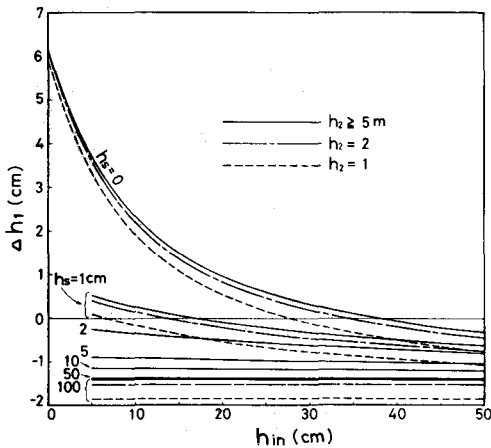


図-4 h_2, h_s, h_{in} の影響

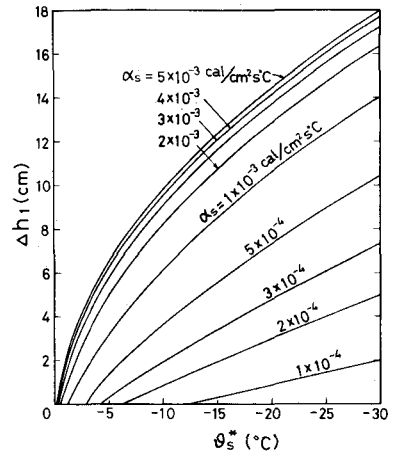


図-5 α_s, θ_s^* の影響

程 $\bar{\theta}_2$ が減少するので Δh_1 が増加するのである。特に、図-6では、 $\bar{\theta}_2$ の影響が $\bar{\theta}_2 \geq 3$ cm²/s で生じている。即ち、拡散係数がある程度以上なければ地温の影響は効いてこないことになる。なお、式(12)は式(10)の近似解なので Case 5 で $\bar{\theta}_2 = 0.2, 1.0$ °C のときの近似解の誤差(近似解-厳密解)/厳密解 を示したが、表 3 である。

$$\left| \frac{\bar{\theta}_2 h_1}{\lambda_i B(\theta_s^* - \theta_f)} \right| \text{ が大きい程、誤差も大きくなる。}$$

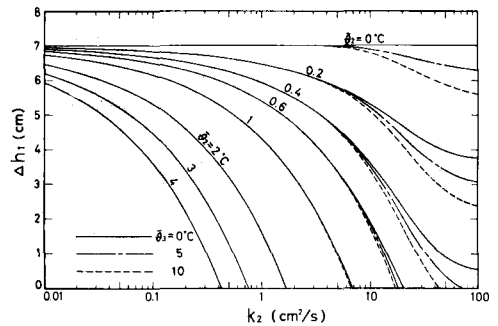


図-6 $\theta_2, \bar{\theta}_2, k_2$ の影響

表 3 Δh_1 の近似解の誤差

$\bar{\theta}_2 \backslash k_2$	0.01	0.02	0.05	0.10	0.20	0.50	1.00	2.00	5.00	10.00	20.00	50.00	100.00
0.2	0								0.049	0.072	0.105	0.147	0.158
	5	0.002	0.003	0.004	0.006	0.009	0.014	0.021	0.050	0.078	0.121	0.184	0.206
	10								0.051	0.083	0.138	0.226	0.261
1.0	0								0.004				
	5	0.010	0.014	0.023	0.034	0.049	0.082	0.125	0.198				
	10								0.001				

5. あとがき

以上、まごおりに関する1次元氷厚の計算式と氷厚に影響する要因について述べてきた。氷厚成長の理論式の中で、議論が不十分なのは、短波放射が表面で全て吸収されると仮定した点である。C. D. Williams⁵⁾によれば、氷板下面の日射量 H_{hi} は $H_{hi}=H_o e^{-\lambda h_i}$ (H_o :氷板面上の日射量, λ :減衰係数(0.01~0.2))で表わされる。特に透明な氷の場合は、 $h_i=80\text{ cm}$ のときでも $H_{hi}/H_o \approx 0.5$ となるので、氷板中の日射量の透過は無視できなくなる。これを考慮することは今後の課題にしたい。

次に、ここで示した氷厚の式は、ステファン条件から出発しているため、氷板面での融解には適用できない。これは上記、氷の透過率と密接な関連がある。

式(12)や(17)を実際に適用する場合、熱交換係数と平衡温度を求めなければならず、このためには、式(3)、(4)より純放射量 R_N と顕熱伝達率 h の算定が問題となる。著者らは最下次のように考えている。

1) 純放射量について

大気圏外の水平面日射は約 $2\text{ cal/cm}^2\text{ min}$ であるが、太陽放射は、大気中のオゾン・水蒸気・酸素ガスによって吸収され、また空気分子・水蒸気・水滴・ダストなどによって散乱される。さらに、大気長波放射は水蒸気・炭酸ガス・水滴などから射出される。従って、地表面にやってくるこれらの短波・長波放射を算定することは、困難であるため、雲量・水蒸気圧・緯度などをパラメータにとった様々の経験式がある。^{6), 7), 8)}しかし、これらの経験式が観測地点で適合するかどうかは、日射計や放射収支計による実測値と比較しなければならない。放射収支計を使えば、直接 R_N を測定できるので最も望ましい。

2) 顕熱伝達率について

顕熱伝達率は、大気の接地層に於る対流の強さ即ち風速の乱れによる乱流拡散と、リチャードソン数やモニン・オブホフの指標から決まる大気安定度に支配される。水面上の場合、顕熱は潜熱とボウエン比で結ばれるので、蒸発量に関する種々の経験式を使って h が求められる。しかし、積雪・氷板上の場合、凝結に伴う潜熱のときだけ同様の考えができると思う。現在のところ、近藤のバルク輸送係数⁹⁾ C_H を用いて、 $h=c_p \rho C_H u(h_o)$ 、(C_p, ρ :空気の定圧比熱、密度、 $u(h_o)$:高さ h_o に於る風速)による算定を考えている。

参考文献

- 1) 山口昌哉, 野木達夫: ステファン問題(数理解析とその周辺 17), 産業図書, 1977.
- 2) 菊池 昇, 市川康明: 変分不等式によるステファン問題, 土木学会論文報告集, 第289号, 1979-9.
- 3) 佐渡公明: 結氷河川の氷厚に関する一考察, 土木学会北海道支部論文報告集, 第35号, 1979-2.
- 4) S. D. Foss and S. S. T. Fan: Approximate Solution to the Freezing of the Ice-Water System With Constant Heat Flux in the Water Phase, Water Resources Research, vol. 10 No. 3, 1974-6, pp. 511-513.
- 5) C. D. Williams: Water Temperature during the Melting of Lake Ice, Water Resources Research, vol. 5 No. 5, 1969-10, pp. 1134-1138.
- 6) 新井 正, 西沢利栄: 水温論(水文学講座 10), 共立出版, 1974-5.
- 7) Heat and Mass Transfer between a Water Surface and the Atmosphere: Laboratory Report No. 14, Tennessee Valley Authority, Water Resources Research, Norris, Tenn., 1972-4.
- 8) 新編農業気象ハンドブック編集委員会: 新編農業気象ハンドブック, 養賢堂, 1977-4, pp. 70-89.
- 9) 近藤純正: 海面と大気間の運動量・顕熱・水蒸気に対する輸送係数, 防災科学技術センター研究報告, 第10号, 1974-10.

記号一覧

Q_1 : 氷板・積雪内を通過して大気へ流出する熱流束	H_s : 日射による短波放射
Q_z : 貯水池水から氷板へ流入する熱流束	H_a : 大気長波放射
Q_b : 貯水池底で地盤から流入する熱流束	H_b : 表面からの長波逆放射
θ_a : 気温	H_e : 蒸発・凝結に伴う潜熱量
θ_s : 表面温度 (積雪表面, 氷板表面, 水面)	H_c : 対流による顕熱量
θ_{sn} : 積雪温度	R_N : 純放射量 $= (1 - A_s) H_s + H_a - H_b$
θ_i : 氷板温度	A_s : 表面のアルベド
θ_f : 氷点 $= 0^\circ\text{C}$	α_s : 熱交換係数
θ_z : 水温	θ_s^* : 表面温度 θ_s に対する平衡温度
θ_3 : 地温	h : 顕熱伝達率
$T_0 = 273^\circ\text{C}$	φ : 飽和水蒸気圧力曲線 e の気温の点に於ける勾配
h_0 : 気温の測定高さ	σ : ステファン・ボルツマン定数 ($= 8.13 \times 10^{-11} \text{ cal/cm}^2 \text{ min}^\circ\text{K}^4$)
h_s : 積雪深	ΔE : 飽差 $= e(\theta_a) - e_a$
h_1 : 氷厚	e_a : 水蒸気圧
h_z : 水深	ρ_1 : 氷の密度
l : 氷の融解潜熱 ($= 80 \text{ cal/g}$)	ρ_2 : 水の密度
k_z : 水の渦温度伝導率又は渦拡散係数	ρ_3 : 土の密度
k_3 : 土の温度伝導率	
λ_s : 雪の熱伝導率	δ_1 : 無次元氷厚
λ_1 : 氷の熱伝導率	δ_s : 無次元積雪深
λ_z : 水の熱伝導率	St_e : ステファン数
λ_3 : 土の熱伝導率	t' : 無次元時間
C_1 : 氷の比熱	Q' : 無次元熱流束
C_z : 水の比熱	
C_3 : 土の比熱	