

I-22 吊橋の固有振動解析に関する研究

北海道大学工学部 正員 渡 辺 昇
北海道大学工学部 正員 ○林 川 俊 郎

1. まえがき

吊橋は他の橋梁形式にくらべて比較的剛性が低い
ため、振動による動的な影響が問題となることが多い。風荷重、地震力および走行荷重などによる
動力学的な影響を調べるために、吊橋の固有振
動性状を理解することは基本的かつ重要な問題で

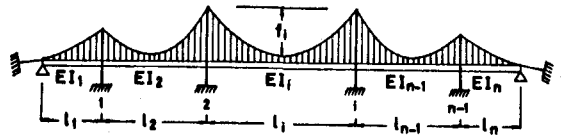


図-1 多径間吊橋

ある。吊橋はケーブル、補剛桁、塔などより成る複合構造物であるから、その振動性状は厳密に考えれば非常に複雑である。本研究は吊橋の鉛直たわみ振動について考える。吊橋の固有振動解析方法としては、(1)微分方程式法^{1,2)} (2)積分方程式法³⁾ (3)エネルギー法^{3,4)} (4)有限個の質点系で近似する方法^{5,6,7)} などがある。本研究では前田¹⁾ が試みた微分方程式法を用いて、図-2に示すような塔頂におけるケーブルの結合状態が任意のものに対応する解を与えるように考えている。次に、数値計算として吊橋の固有周期および固有モードが、補剛桁の支持条件(連続支持の場合、単純支持の場合)によって、また、塔頂のケーブルの結合状態(ローラー結合の場合、鉛直力を無視したヒンジ結合の場合、鉛直力を考慮したヒンジ結合の場合)によって、どのような差異を生ずるかを比較検討した。

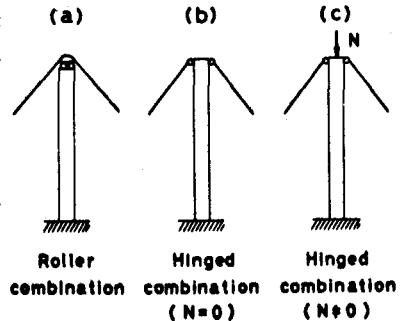


図-2 塔頂のケーブルの結合状態

2. 解析方法の概要

本研究では次のような仮定を設ける。(1)ケーブル、ハンガー、補剛桁、床版構造の自重など全体の死荷重は架設完了後ケーブルのみによって支えられる。それで補剛桁の支点には反力は生じない。(2)ケーブル、補剛桁の死荷重は等分布荷重と考えられるから、ケーブルの最初の形状は放物線である。(3)吊材はひずまない。また、載荷による吊材の傾斜の影響は無視できるものとする。(4)補剛桁は、最初、水平でかつ直線をなし、その曲げ剛性は各径間ごとに一定である。(5)補剛桁は横断面において、対称であり、セン断応力による変形は無視できるものとする。(6)ケーブルの橋軸方向移動によって生じる慣性力の影響は無視する。以上の仮定に基づいて、無限小要素に働く内力と、外力である慣性力との釣り合いを表わした吊橋の鉛直たわみ振動の基礎微分方程式は、次式のように与えられる。

$$EI \cdot V''''(x) - (H_w + H_p) \cdot V''(x) + w/H_w \cdot H_p = w/g \cdot \omega^2 V(x) \quad (1)$$

ここに、 EI は曲げ剛性、 w =分布死荷重、 H_w, H_p =ケーブルの水平張力、 $V(x)$ =補剛桁のたわみ、 ω =固有円振動数、 g =重力加速度、 $(\prime) = d/dx$ 。式(1)の左辺第二項には非線形項が含まれており、厳密解を求めることは困難である。通常、活荷重、慣性力による付加水平張力 H_p は死荷重による水平張力 H_w に比較して小さいと考えられるので、ここでは $H_w + H_p \approx H_w$ とする。したがって、式(1)の一般解は第 i 径間の諸量に添字 i を付記する(図-1を参照)ことにすれば、次式のように求められる。

$$V_i(x_i) = A_i \cos \mu_i x_i / L_i + B_i \sin \mu_i x_i / L_i + C_i \cosh \nu_i x_i / L_i + D_i \sinh \nu_i x_i / L_i + g/\omega^2 H_{wi} \cdot H_{pi} \quad (2)$$

ここに、 $\mu_i = \sqrt{H_{wi} L_i^2 / 2EI_i \cdot (Z_i - 1)}$ 、 $\nu_i = \sqrt{H_{wi} L_i^2 / 2EI_i \cdot (Z_i + 1)}$ 、 $Z_i = \sqrt{1 + 4w_i EI_i \cdot \omega^2 / H_{wi}^2 g} > 1$ 。また、式(2)に含まれる A_i, B_i, C_i, D_i は未知積分定数であり、図-1のような n 径間吊橋では $4n$ 個の積分定数がある。この未知積分定数は以下に示す境界条件により決定される。

$$1) \text{左端支持点において}(i=1): V_1(0) = 0, EI_1 V_1''(0) = 0 \quad (3.1)$$

2) 中間支持点において ($i=2, 3, \dots, n-1$) :

$$\text{連続支持の場合: } V_{i-1}(L_{i-1})=0, V'_{i-1}(L_{i-1})=V'_i(0), EI_{i-1}V''_{i-1}(L_{i-1})=EI_iV''_i(0), V_i(0)=0 \quad (3.2)$$

$$\text{単純支持の場合: } V_{i-1}(L_{i-1})=0, EI_{i-1}V''_{i-1}(L_{i-1})=0, V_i(0)=0, EI_iV''_i(0)=0 \quad \dots \quad (3.3)$$

$$3) \text{ 右端支持点において } (i=n) : V_n(L_n)=0, EI_nV''_n(L_n)=0 \quad \dots \quad (3.4)$$

$$\text{式(2)を式(3.1)から式(3.4)に代入すると, } \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{h} \quad \dots \quad (4)$$

なるマトリックス関係式が得られる。ここで、 $\mathbf{a} = [A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, \dots, A_n, B_n, C_n, D_n]^T$, $\mathbf{h} = [H_{p1}, H_{p2}, \dots, H_{pn}]^T$ 。また、係数マトリックス $\mathbf{A}$ および $\mathbf{H}$ の大きさは表-1に示すとおりである。

次に、図-2に示すような塔頂のケーブルの結合状態の差異は、ケーブルの方程式(第二基礎微分方程式)の取り扱い方に表われる。図-2(a)のローラー結合の場合は、塔の死荷重および慣性力を塔頂部においてのみケーブルの鉛直反力として負担しており、塔の曲げ剛性は考慮しない。したがって、多径間吊橋の不静定次数は、補剛桁を基本系にとると、補剛桁の各支持点での支持条件や径間数に関係なく、ケーブルに関する

The condition of support at stiffening girders	Roller combination	Hinged combination ($H=0$)	Hinged combination ($H \neq 0$)
Continuous	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{h}$ $4n^4 4n \ 4n^3 \ 1^3 1$	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{h}$ $4n^4 4n \ 4n^3 \ 4n^2 n \ 1$	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{h}$ $4n^4 4n \ 4n^3 \ 4n^2 n \ 1$
support	$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}$ $1^4 4n \ 4n^3 \ 1^3 1$	$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}$ $n^4 4n \ 4n^3 \ n^2 n \ 1$	$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}$ $n^4 4n \ 4n^3 \ n^2 n \ 1$
Simple	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{h}$ $4n^4 4n \ 4n^3 \ 4n^3 \ 1^3 1$	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{h}$ $4n^4 4n \ 4n^3 \ 4n^2 n \ 1$	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{h}$ $4n^4 4n \ 4n^3 \ 4n^2 n \ 1$
support	$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}$ $1^4 4n \ 4n^3 \ 1^3 1$	$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}$ $n^4 4n \ 4n^3 \ n^2 n \ 1$	$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}$ $n^4 4n \ 4n^3 \ n^2 n \ 1$
Frequency equation of suspension bridge	$\det \mathbf{A} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}^{-1} \mathbf{G} = 0$ $4n^4 4n$	$\det \mathbf{A} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}^{-1} \mathbf{G} = 0$ $4n^4 4n$	$\det \mathbf{A} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}^{-1} \mathbf{G} = 0$ $4n^4 4n$

表-1 係数マトリックスと振動数方程式

1 次不静定構造物となる。ローラー結合の場合のケーブルの方程式は次式で与えられる。

$$H_p \cdot \int_0^L \sec^3 \phi(x) / E_c A_c \cdot dx - w / H_w \cdot \int_0^L V(x) dx = 0 \quad \dots \quad (5)$$

ここに、 $\phi(x)$ = ケーブルの傾斜角、 $E_c A_c$ = ケーブルの弾性係数、断面積。図-2(b)、(c)のヒンジ結合の場合は、塔は死荷重および慣性力を塔頂部においてケーブルの鉛直反力として負担すると同時に、塔の左右のケーブルの慣性力による付加水平張力の不均衡から生ずる水平力を塔の曲げ剛性が受けもつものとし、そのために塔頂の水平変位が生ずるものと考え。したがって、慣性力によるケーブルの付加水平張力は各径間ごとに異なり、多径間吊橋の不静定次数は、補剛桁を基本系にとれば、補剛桁の各支持点での支持条件には関係ないが、径間数に関係があり、 n 径間吊橋では n 次不静定構造物となる。

図-2(b)、(c)のヒンジ結合の場合のケーブルの方程式は次式で与えられる。

$$H_{pi} \cdot \int_0^{L_i} \sec^3 \phi_i(x_i) / E_c A_c \cdot dx_i - w_i / H_{wi} \cdot \int_0^{L_i} V_i(x_i) dx_i = -\delta_i^l + \delta_i^r \quad \dots \quad (6)$$

ここに、 $\delta_i^l = -L_{t,i-1}^3 (H_{p,i-1} - H_{pi}) / 3EI_{t,i-1}$, $\delta_i^r = -L_{t,i}^3 (H_{pi} - H_{p,i+1}) / 3EI_{t,i}$, L_t, EI_t = 塔の高さ、曲げ剛性、 L, L_i = ケーブル長の水平投影長、 $i=1, 2, 3, \dots, n$ 。

式(2)に含まれる 1 個の未知定数 H_p (ローラー結合の場合)、または、 n 個の未知定数 H_{pi} (ヒンジ結合の場合)は式(2)を式(5)または式(6)に代入することにより、次のように $V_i(x_i)$ と関係づけられる。

$$1) \text{ ローラー結合の場合(図-2(a)) : } \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \times \mathbf{h} \quad \dots \quad (7.1)$$

ここに、 $E = L^H / E_c A_c - g / (\omega \cdot H_w)^2 \cdot (w_1 L_1 + \dots + w_n L_n)$, $h = H_p$, $L^H = \int_0^L \sec^3 \phi(x) dx$ 。

$$2) \text{ 鉛直力 } N \text{ を無視したヒンジ結合の場合(図-2(b)) : } \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{h} \quad \dots \quad (7.2)$$

ここに、 $E_{i,i-1} = -L_{t,i-1}^3 / 3EI_{t,i-1}$, $E_{i,i+1} = -L_{t,i}^3 / 3EI_{t,i}$, $L_i^H = \int_0^{L_i} \sec^3 \phi_i(x_i) dx_i$, $E_{i,i} = L_i^H / E_c A_c - g w_i L_i / (\omega \cdot H_{wi})^2 + L_{t,i-1}^3 / 3EI_{t,i-1} + L_{t,i}^3 / 3EI_{t,i}$ 。

$$3) \text{ 鉛直力 } N \text{ を考慮したヒンジ結合の場合(図-2(c)) : } \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{h} \quad \dots \quad (7.3)$$

ここに、 $E_{i,i-1} = L_{t,i-1} / N_{i-1} \cdot (1 - T_{i-1})$, $E_{i,i+1} = L_{t,i} / N_i \cdot (1 - T_i)$,

$E_{i,i} = L_i^H / E_c A_c - g w_i L_i / (\omega \cdot H_{wi})^2 + L_{t,i-1} / N_{i-1} \cdot (T_{i-1} - 1) + L_{t,i} / N_i \cdot (T_i - 1)$,
 $T_i = \tan(k_i L_{t,i}) / k_i L_{t,i}$, $k_i = N_i / EI_{t,i}$, N_i = 塔に作用する鉛直力。

式(7.1)から式(7.3)における係数マトリックス $\mathbf{G}$, $\mathbf{E}$ および $\mathbf{E}$ の大きさは表-1 に示すとおりである。
式(4)と式(7)から、付加水平張力 H_p のベクトル $\mathbf{h}$ を消去すると、 $\mathbf{a}$ に関する同次方程式

$$(\mathbf{A} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \cdots (8) \quad \text{が得られる。この式が自明でない解を持つ条件から、}$$

$$1) \text{ ローラー結合の場合: } \det |\mathbf{A} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{G}| = 0 \quad \cdots (9.1)$$

$$2) \text{ ヒンジ結合の場合: } \det |\mathbf{A} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{G}| = 0 \quad \cdots (9.2)$$

なる吊橋の振動数方程式が求められる。この式(9)は固有円振動数 ω に関する超越方程式となり、その行列式の大きさは $4n \times 4n$ である。超越方程式の解析方法としては、(1)Newton-Raphson 法、(2)セカント法、(3)regula falsi 法、(4)二分法などがある。ここでは、収束はやや遅いが、確実に解を求めることができる regula falsi 法⁸⁾を用いた。したがって、式(9)で表わされた振動数方程式を解き、 ω を求めれば、式(8)よりベクトル $\mathbf{a}$ の各要素の相対値が、さらに、このベクトル $\mathbf{a}$ を式(7)に代入することにより、ベクトル $\mathbf{h}$ の相対値が決定され、吊橋の固有モードが相対量として求められる。

3. 数値計算

数値計算例として、本州四国連絡橋の一つの計画案である因島大橋(図-3 参照)の断面諸元を参考にした。

断面諸元 : $I_1 = 4.216 \text{ m}^4$, $I_2 = 4.904 \text{ m}^4$,
 $E = 2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$, $I_t = 3.32 \text{ m}^4$, $L_t = 135.85 \text{ m}$,
 $A_c = 0.4562 \text{ m}^2$, $L^H = 1417 \text{ m}$, $E_c = 2.0 \times 10^7 \text{ t/m}^2$ 。
この因島大橋は変断面補剛トラスを有する吊橋であるが、ここでは、計算の便宜上、換算等価剛性を各径間において平均した平均断面剛性を用いた。

上記の同一断面諸元を用いて、補剛桁の支持条件が連続支持の場合および単純支持の場合について2通り、また、塔頂のケーブルの結合状態がローラー結合の場合、鉛直力を無視したヒンジ結合の場合、および鉛直力を考慮したヒンジ結合の場合について3通り、合計6通りの場合について数値計算を行なった。数値計算結果の一部として、逆対称および対称モードの各次の固有周期を表-2 に、固有モードを図-4、5 にそれぞれ示す。

表-2 から、塔頂のケーブルの結合状態による差異は、低次の固有周期において若干の差はあるものの、高次の固有周期においてはほとんど差がない。したがって、因島大橋のような3径間吊橋において計算された固有周期では、塔頂のケーブルの結合状態の差異による影響はほとんどないことがわかる。次に、補剛桁の支持条件が連続支持の場合と単純支持の場合について比較すると、表-2 に示すように各次の固有周期において、著しい差異が認められる。このことは、図-4、5 に示した両者の固有モードが非常に異なることから、容易に推察される。図-5 より、単純支持の中間支持点がある場合、その中間支持点の位置に折れ角が生じる。また、逆対称固有モードが一部の径間において独立した状態になることがある。しかしながら、連続支持の場合には、図-4 に示すように、たわみ角は生じるが折れ角は生じないという特徴がある。なお、他のヒンジ結合の場合における固有モードについては、ローラー結合の場合の計算結果とほとんど差異がないため、ここでは省略した。

3. あとがき

本研究では、線形化撓度理論に基づく鉛直たわみ振動の基礎微分方程式の一般解を用いて、補剛桁の支持条件および塔頂のケーブルの結合状態が任意形式の多径間吊橋に対応する固有振動解析方法を示した。また、数値計算結果より、次のような考察が得られた。

(1) 表-2 の固有周期に関する計算結果より、塔頂における塔とケーブルとの結合状態による差異は

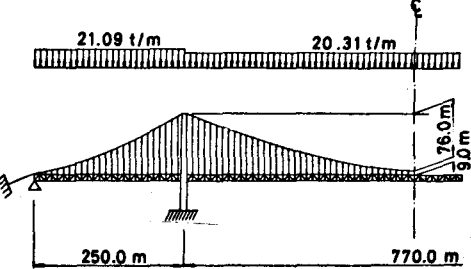


図-3 因島大橋 (3径間吊橋)

Mode		Continuous support			Simple support		
		Roller	Hinged (M=0)	Hinged (M≠0)	Roller	Hinged (M=0)	Hinged (M≠0)
Asym. mode	1st	6.2628	6.2618	6.2629	6.7851	6.7851	6.7851
	2nd	3.4933	3.4891	3.4936	3.9884	3.9813	3.9893
	3rd	2.3190	2.3190	2.3190	2.5489	2.5489	2.5489
	4th	1.3094	1.3094	1.3094	1.2935	1.2935	1.2935
	5th	1.1180	1.1180	1.1180	0.7696	0.7696	0.7696
Sym. mode	1st	6.1953	6.1836	6.1967	6.3787	6.3660	6.3803
	2nd	3.8944	3.8934	3.8945	3.9425	3.9416	3.9427
	3rd	2.7555	2.7554	2.7555	3.0992	3.0992	3.0992
	4th	1.6648	1.6648	1.6648	1.7655	1.7655	1.7655
	5th	1.2038	1.2038	1.2038	0.9821	0.9821	0.9821

表-2 因島大橋の固有周期 (秒)

ほとんどないことがわかる。

(2) 表-2の固有周期に関する計算結果より、吊橋の補剛桁の支持条件が連続支持と単純支持との場合について比較すると、その差異は顕著である。

(3) 図-4、5より、補剛桁の支持条件によって、その固有モードは非常に異なったものになる。特に、単純支持の場合には、逆対称固有モードが一部の径間において独立した状態で振動することがある。また、中間支持点の位置には折れ角が生じる特徴がある。このような場合には、列車荷重の走行に対して支障をきたすことが予想される。

最後に、参考のために、固有値問題の計算時間について触れると、数値計算方法における初期値の設定の仕方によって若干の違いはあるものの、本解析方法では、逆対称モードおよび対称モードを含んだ10次までの固有周期の計算時間は、数十秒で十分であった。ただし、式(9)における係数マトリックス E および E には特異点を含んでいるので注意を要する。なお、これらの計算には北海道大学大型計算機センターの HITAC M-180 を利用した。

(参考文献)

- 1) 前田幸雄・林正・前田研一：吊橋の固有振動計算法，土木学会論文報告集，第262号，昭52.6，pp.13～24。
- 2) 林川俊郎・渡辺昇・大島久：連続吊橋の固有振動数に関する一解析法，土木学会第34回年次学術講演会講演概要集，第I部，昭54.10，pp.467～468。
- 3) Moppert, H.: Statische und dynamische Berechnung erdverankerter Hängebrücken mit Hilfe von GREENschen Funktionen und Integralgleichungen, Veröffentlichungen des Deutschen Stahlbau-Verbandes, Heft 9, 1955。
- 4) Walting, Fr-W.: Praktische Berechnung der Eigenfrequenzen von Hängebrücken, Der Bauingenieur 25, Heft 6, 1950。
- 5) 渡辺昇・佐藤浩一：多径間吊橋の固有振動周期の簡易式について，第10回日本道路会議一般論文集，昭46.10，pp.309～310。
- 6) 渡辺昇・佐藤浩一・坂元義人：多径間吊橋の固有振動周期，土木学会北海道支部研究発表論文集，第26号，昭45.2，pp.209～215。
- 7) 小西一郎・山田善一・高岡宜善：長大つり橋の地震応答と耐震設計法に関する研究，土木学会論文報告集，第159号，昭43.11，pp.13～27。
- 8) 戸川隼人訳：理論数値解析—計算機による数値計算の基礎—，サイエンスライブラリ情報電計機=19，サイエンス社，pp.160～172。

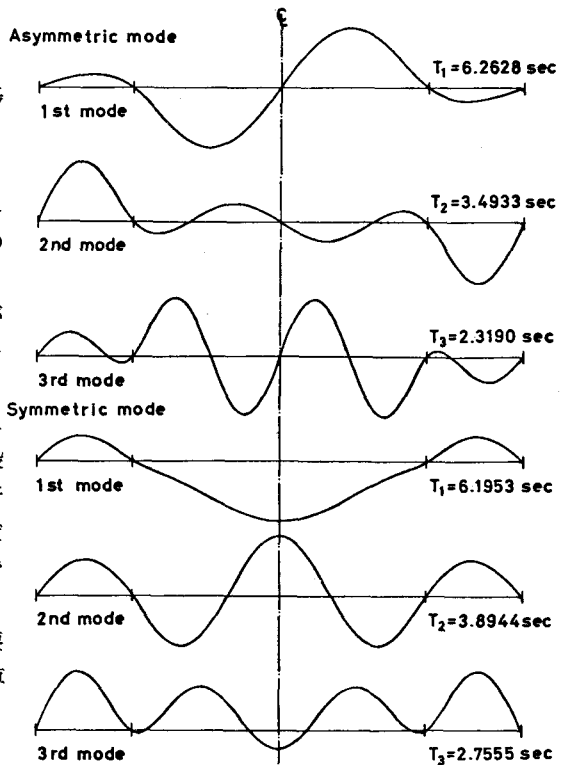


図-4 固有モード(連続支持：ローラー結合)

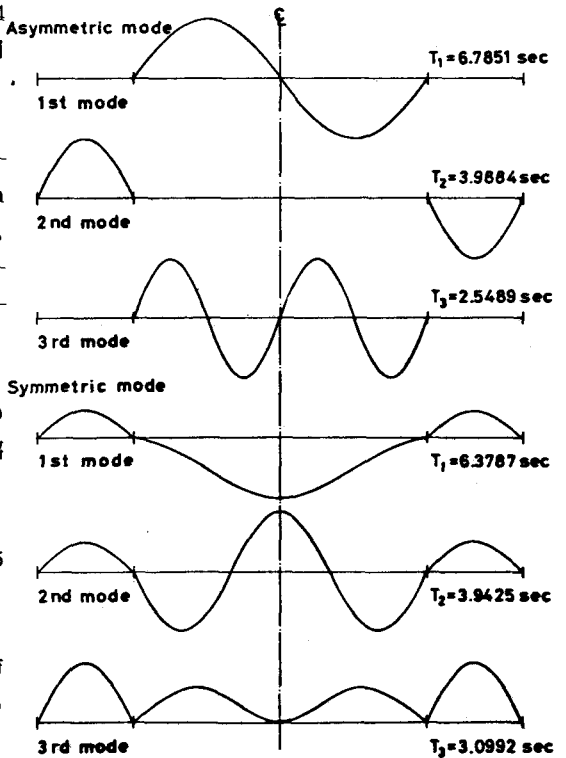


図-5 固有モード(単純支持：ローラー結合)