

I-20 周期的外力をうける二相円柱の動的応答について

室蘭工業大学 正員 松岡 健一
北海道大学 同 能町 純雄

1. まえがき

円柱や円筒など円柱座標で表わされるものの動的な問題に対する研究は、これまでかなり多く行われてきているが、これらの研究は主として、円柱および円筒をそれぞれに対して行われており、これらを組合せて得られる異なる材料で出来ている二相円柱に対する研究はあまり見受けられない。著者らは先に、二相円柱を伝わる弾性波の問題を解析した^(1,2)。本論文はこれを振動問題に応用し、同心円柱におかれた二相円柱が、周期的外力をうける場合の解析を逐次弾性論により行ったものである。

2. 基礎方程式のフーリエ・ハンケル変換による解

円柱座標で表わされる運動方程式は、物体力を無視すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \tau_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

となる。ただし $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ は、 r, θ, z 軸方向の直応力度、 $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ は、せん断応力度、 u, v, w は、それぞれ r, θ, z 軸方向の変位、 ρ は弾性体の密度である。

ここで、外力を周期的外力とし、定常状態に限定するものとすれば、各変位成分を次のようにおくことができる。

$$u = \tilde{u} e^{i p t}, \quad v = \tilde{v} e^{i p t}, \quad w = \tilde{w} e^{i p t} \quad (2)$$

ただし、 p は外力の円振動数である。

変位と応力の関係は、弾性振動を仮定しているのでフックの法則が成り立つものとし、(2)の関係式を(1)式およびフックの法則に適用し、円筒方向(θ)および柱軸方向(z)にフーリエ変換を行い、半径方向(r)にハンケル変換を行い、フックの法則を考慮しながら(1)式を解けば、その解は有限円筒を例として次の

ようになる。

$$\tilde{u} = \frac{2}{\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n C_m (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \cos m \theta \cos N z, \quad (3)$$

$$\tilde{v} = \frac{2}{\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n (\tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr}) \sin m \theta \cos N z, \quad (4)$$

$$\tilde{w} = \frac{2}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \tilde{W}_{mr} \cos m \theta \sin N z, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} & \left[\frac{1}{N_k} \chi_{mp}^{(k)}(N_k r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mnk} \right. \right. \\ & + (m+1) A_{mnk} + (m-1) B_{mnk} - i' \frac{N}{2} E_{mnk} \} \\ & + \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \left\{ \frac{1}{N_k} \chi_{mp}^{(k)}(N_k r) - \frac{N_k}{N^2} \chi_{mp}^{(k)}(N_k r) \right\} \\ & \times \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1) A_{mnk} - (m-1) B_{mnk} \right. \\ & \left. \left. - i' N E_{mnk} \right\} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} & \left[-\frac{1}{N_k} \chi_{ms}^{(k)}(N_k r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mnk} \right. \right. \\ & + (m+1) A_{mnk} + (m-1) B_{mnk} + i' \frac{N}{2} E_{mnk} \} \\ & + \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \left\{ \frac{1}{N_k} \chi_{ms}^{(k)}(N_k r) - \frac{N_k}{N^2} \chi_{ms}^{(k)}(N_k r) \right\} \\ & \times \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1) A_{mnk} - (m-1) B_{mnk} \right. \\ & \left. \left. - i' N E_{mnk} \right\} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} & \left[G_m^{(k)}(N_k r) E_{mnk} + i' \frac{2\mu N}{\rho p^2} \left\{ G_m^{(k)}(N_k r) \right. \right. \\ & - G_m^{(k)}(N_k r) \} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1) A_{mnk} \right. \\ & \left. \left. - (m-1) B_{mnk} - i' N E_{mnk} \right\} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 c は円筒の長さ、 $C_0 = 1/2, C_1 = C_2 = \dots = 1$ 、 $N = n\pi/c, (n=0, 1, 2, \dots)$ 、であり

$$N_k^2 = N^2 - \frac{\rho p^2}{\mu}, \quad N_k'^2 = N^2 - \frac{\rho p^2}{2\mu + \lambda},$$

また、(5)~(7)式中の関数は、ハンケル変換の逆変換公式より得られるもので、円筒の外半径を a_1 、内半径を a_2 とすれば、 I, K を変形オイ種およびオ2種のベッセル関数として次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} G_{jm}^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{jm}^{(k)}(Nr)}{R_{jm}^{(k)}(Na_k)} \\ \chi_{mp}^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{mp}^{(k)}(Nr)}{R_{jm}^{(k)}(Na_k)} \\ \chi_{ms}^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{ms}^{(k)}(Nr)}{R_{jm}^{(k)}(Na_k)} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{jm}^{(k)}(Nr) &= I_j(Nr) K_m(Na_{k-1}) \\ &\quad - (-1)^{j+m} I_m(Na_{k-1}) K_j(Nr) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

$j = m-1, m, m+1, a_0 = a_1$

(b) ~ (c) 式中の係数は、円筒内外面の変位や応力のフーリエ変換値として与えられるもので、

$$\bar{r}_0 = \bar{r}_0 e^{ipx}, \quad \bar{r} = \bar{r} e^{ipx} \quad (d)$$

として

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{mnk} &= \int_0^{2\pi} \int_0^c \bar{r}_0 \omega N z \sin m\theta \, dz d\theta \\ \beta_{mnk} &= \int_0^{2\pi} \int_0^c \bar{r} \omega N z \sin m\theta \, dz d\theta \\ A_{mnk} &= \frac{1}{2a_k} \int_0^{2\pi} \int_0^c (\bar{u} \omega m \theta + \bar{v} \sin m\theta) \omega N z \, dz d\theta \\ B_{mnk} &= \frac{1}{2a_k} \int_0^{2\pi} \int_0^c (\bar{u} \omega m \theta - \bar{v} \sin m\theta) \omega N z \, dz d\theta \\ E_{mnk} &= \int_0^{2\pi} \int_0^c \bar{w} \omega N z \sin m\theta \, dz d\theta \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

である。

また、式(5) ~ (7)で与えられる解は、式から明らかのように、円筒の両端面すなわち $z=0$, $z=c$ で次の条件を満足する場合である。

$$\left. \begin{aligned} w|_{z=0} = w|_{z=c} = 0, \quad \tau_{rz}|_{z=0} = \tau_{rz}|_{z=c} = 0 \\ \tau_{\theta z}|_{z=0} = \tau_{\theta z}|_{z=c} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

この他の条件の場合には、また別な形で求めらるゝが、ここでは一般解の形は省略した。

(5) ~ (7) 式は円筒を対象として示したが、円柱の場合も全く同じようにして求められ、式は(5) ~ (7)と同様にほり、(5) ~ (7) 式で、 $a_2 = 0$ とすることにより与えられる。このとき $k=1$ の外とほり、式中の関数も

$$R_{jm}^{(k)}(Nr) = R_{jm}^{(1)}(Nr) = I_j(Nr) \quad (g)$$

と置くことにより、(5) ~ (7) 式を用いることとできる。この円筒と円柱の解を組合せて、各境界の境界条件を満足するように、 α , β , A , B , E を求めることにより、各変位成分および、応力成分を求めるとができる。

3. 境界条件

二相円柱は Fig. 1 に示すように、円柱をとりまいて弾性定数の異なる材料でできた円筒が、同心円状に重ねられているものとする。

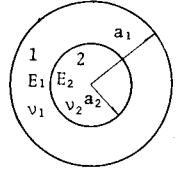


Fig. 1 二相円柱

いま、円筒の弾性定数、変位応力はどの量を添字 1、円柱のものを添字 2 で表わすものとする。円筒と円柱の境界条件を考えるに先づ、 A_{mnk} , B_{mnk} は式 (c) の第 3, 4 式

から、次の適合条件を満足しなければならぬ。

円筒に対して

$$\begin{aligned} a_k A_{mnk-1} &= \bar{A}_{mr-1} \Big|_{r=a_k} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{N_{j1}} \chi_{mp}^{(j)}(N_{j1} a_k) \right. \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2\mu_1} \alpha_{mnj-1} + (m+1) A_{mnj-1} + (m-1) B_{mnj-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{iN}{2} E_{mnj-1} \right\} + \frac{\mu_1 N^2}{\rho_1 \rho_2} \left\{ \frac{1}{N_{j1}} \chi_{mp}^{(j)}(N_{j1} a_k) - \frac{N_{j1}}{N^2} \right. \\ &\quad \times \chi_{mp}^{(j)}(N_{j1} a_k) \left. \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu_1} \beta_{mnj-1} + (m+1) A_{mnj-1} \right. \\ &\quad \left. - (m-1) B_{mnj-1} - iN E_{mnj-1} \right\} \Big] \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k B_{mnk-1} &= \bar{B}_{mr-1} \Big|_{r=a_k} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{N_{j1}} \chi_{ms}^{(j)}(N_{j1} a_k) \right. \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2\mu_1} \alpha_{mnj-1} + (m+1) A_{mnj-1} + (m-1) B_{mnj-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{iN}{2} E_{mnj-1} \right\} + \frac{\mu_1 N^2}{\rho_1 \rho_2} \left\{ \frac{1}{N_{j1}} \chi_{ms}^{(j)}(N_{j1} a_k) \right. \\ &\quad \left. - \frac{N_{j1}}{N^2} \chi_{ms}^{(j)}(N_{j1} a_k) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu_1} \beta_{mnj-1} + (m+1) A_{mnj-1} \right. \\ &\quad \left. - (m-1) B_{mnj-1} - iN E_{mnj-1} \right\} \Big] \quad (9) \end{aligned}$$

円柱に対して

$$\begin{aligned} a_2 A_{mn1-2} &= \bar{A}_{mr-2} \Big|_{r=a_2} = \frac{1}{N_{j2}} \chi_{mp}(N_{j2} a_2) \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2\mu_2} \alpha_{mn1-2} + (m+1) A_{mn1-2} + (m-1) B_{mn1-2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{iN}{2} E_{mn1-2} \right\} + \frac{\mu_2 N^2}{\rho_2 \rho_1} \left\{ \frac{1}{N_{j2}} \chi_{mp}(N_{j2} a_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{N_{j2}}{N^2} \chi_{mp}(N_{j2} a_2) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu_2} \beta_{mn1-2} + (m+1) A_{mn1-2} \right. \\ &\quad \left. - (m-1) B_{mn1-2} - iN E_{mn1-2} \right\} \Big] \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 B_{mn1-2} &= \bar{B}_{mr-2} \Big|_{r=a_2} = \frac{1}{N_{j2}} \chi_{ms}(N_{j2} a_2) \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2\mu_2} \alpha_{mn1-2} + (m+1) A_{mn1-2} + (m-1) B_{mn1-2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{iN}{2} E_{mn1-2} \right\} + \frac{\mu_2 N^2}{\rho_2 \rho_1} \left\{ \frac{1}{N_{j2}} \chi_{ms}(N_{j2} a_2) \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{N_{u_i}}{N^2} X_{m\alpha}(N_{u_i} a_2) \left\{ \frac{1}{2\mu_i} \beta_{m\alpha i,2} + (m+1) A_{m\alpha i,2} - (m-1) B_{m\alpha i,2} - \varepsilon' N E_{m\alpha i,2} \right\} \quad (11)$$

次に半径方向の境界条件は

i). $r = a_1$ における条件: 円筒の外側に半径方向に周期的外力が作用するものとすれば,

$$i) \quad \sigma_{r1} \big|_{r=a_1} = p(\theta, z), \quad (12)$$

$$ii) \quad \tau_{r\theta 1} \big|_{r=a_1} = 0, \quad \therefore \alpha_{m\alpha i,1} = 0 \quad (13)$$

$$iii) \quad \tau_{rz 1} \big|_{r=a_1} = 0, \quad (14)$$

z). $r = a_2$ における条件: 円柱と円筒の境界面ではその状態により2通り考えられる。その一つは境界面で変位および、この面に生じている応力が等しい場合であり、もう一つは境界面にせん断応力が存在しない場合であるが、ここでは前者の条件によるものとする。従って

$$iv) \quad (u_1)_{r=a_2} = (u_2)_{r=a_2}, \quad (v_1)_{r=a_2} = (v_2)_{r=a_2}, \quad \therefore A_{m\alpha i,2} = A_{m\alpha z,1}, \quad B_{m\alpha i,2} = B_{m\alpha z,1}, \quad (15)$$

$$v) \quad (w_1)_{r=a_2} = (w_2)_{r=a_2} \quad \therefore E_{m\alpha i,2} = E_{m\alpha z,1} \quad (16)$$

$$vi) \quad (\sigma_{r1})_{r=a_2} = (\sigma_{r2})_{r=a_2} \quad \therefore \beta_{m\alpha i,2} = \beta_{m\alpha z,1} \quad (17)$$

$$vii) \quad (\tau_{r\theta 1})_{r=a_2} = (\tau_{r\theta 2})_{r=a_2} \quad \therefore \alpha_{m\alpha i,2} = \alpha_{m\alpha z,1} \quad (18)$$

$$viii) \quad (\tau_{rz 1})_{r=a_2} = (\tau_{rz 2})_{r=a_2} \quad (19)$$

となる。式(14), (19)のために τ_{rz} を示せば円筒に対して

$$\begin{aligned} \tau_{rz 1} = & \frac{2}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon' m N}{N_{u_i}^2 r} G_m^{(k)}(N_{u_i} r) \alpha_{m\alpha z,1} \right. \\ & + \frac{\varepsilon' m N^2}{\pi p^2} \left\{ \varepsilon' \frac{N_{u_i}}{N} (X_{mp}^{(k)}(N_{u_i} r) + \frac{m}{N_{u_i} r} G_m^{(k)}(N_{u_i} r)) \right. \\ & - \left(\frac{N}{N_{u_i}} + \frac{N_{u_i}}{N} X_{mp}^{(k)}(N_{u_i} r) + \frac{m}{N_{u_i} r} G_m^{(k)}(N_{u_i} r) \right) \left. \right\} \beta_{m\alpha k,1} \\ & + 2\mu_i (m+1) A_{m\alpha k,1} - 2\mu_i (m-1) B_{m\alpha k,1} - 2\mu_i' N E_{m\alpha k,1} \left. \right\} \\ & + \frac{\varepsilon' m N}{r} \frac{2\mu_i}{N_{u_i}^2} \left\{ (m+1) A_{m\alpha k,1} + (m-1) B_{m\alpha k,1} \right\} G_m^{(k)}(N_{u_i} r) \\ & + \mu_i \left(\frac{N^2}{N_{u_i}} + N_{u_i} \right) \left\{ X_{mp}^{(k)}(N_{u_i} r) + \frac{m}{N_{u_i} r} G_m^{(k)}(N_{u_i} r) \right\} E_{m\alpha k,1} \left. \right], \quad (20) \end{aligned}$$

となる。円柱に対しては、変位と同様、式(20)で、 $k=1$ とし、関数を円柱のものに変えてえられる。

以上の条件から未知定数を求め、変位および応力を求める。

4. 数値計算

数値計算例として、簡単な場合の例を示す。外力は円筒軸に対して対称な場合、すなわち $m=0$ の場合

とし、荷重状態は Fig. 2 に示すように、円柱にある波長をもつ正弦外力が作用するものとすれば、図の c の間をとれば、軸方向の条件(4)を満足する。

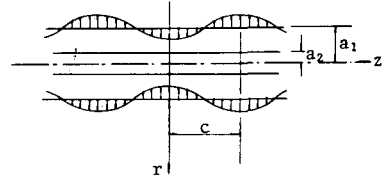


Fig. 2 荷重状態

数値計算に用いた数値は、ポアソン比 $\nu_1 = 1/6$, $\nu_2 = 0.3$, 弾性係数は $E_2/E_1 = 7.0$, 密度比 $\rho_2/\rho_1 = 3.2$ で $a_2/a_1 = 0.25$ である。

参考のために Fig. 3 に、軸方向の境界条件(4)を満足する長さ c の円柱の固有振動周期を示した。図は縦軸に円柱の長さ c と無次元量で、横軸に固有振動周期を、円筒部の材料のせん断波が円柱を往復する時間 t_0 との比をとっている。 t_0 はせん断波速度を V_1 とし、次のようになる。

$$t_0 = 2c/V_1 = 2c\sqrt{\rho/\mu} \quad (21)$$

また、Fig. 3 には $a_2/a_1 = 0.0, 0.5, 1.0$ のものも含めて示してあるが、 $a_2/a_1 = 0.0$ は円筒部と同一材料でできた円柱、 $a_2/a_1 = 1.0$ は円柱部のみの場合を示している。

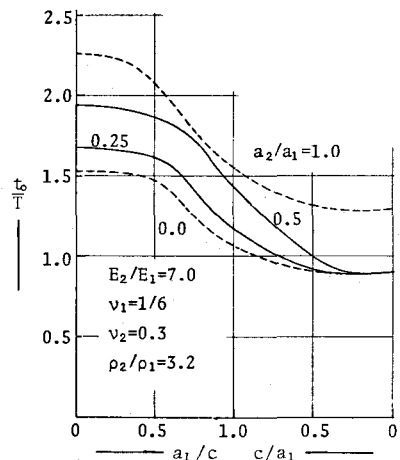


Fig. 3 円柱の固有振動周期 (1次振動)

次に $c/a_1 = 1.0$ および 10.0 について、外力の円振動数 ρ を種々に変化させて、応答計算を行なった結果を Fig. 4~7 に示す。

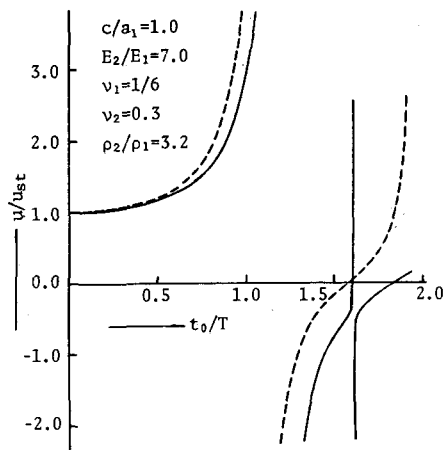


Fig. 4 変位 u の応答倍率 ($c/a_1 = 1.0$)

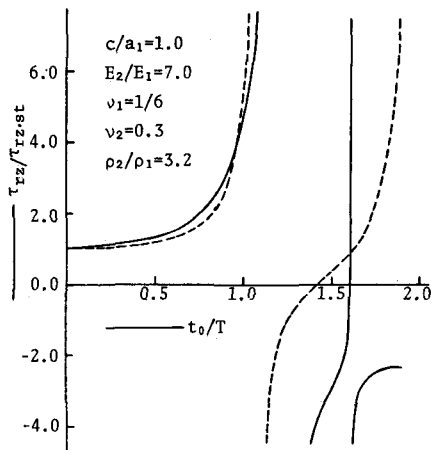


Fig. 5 セン断応力 τ_{rz} の応答倍率 ($c/a_1 = 1.0$)

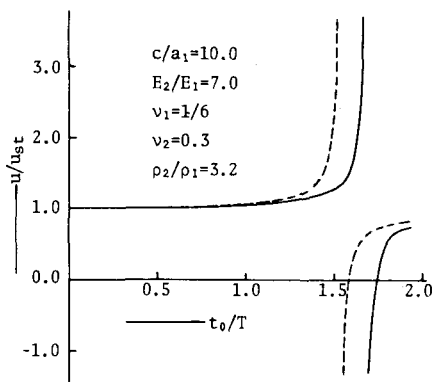


Fig. 6 変位 u の応答倍率 ($c/a_1 = 10.0$)

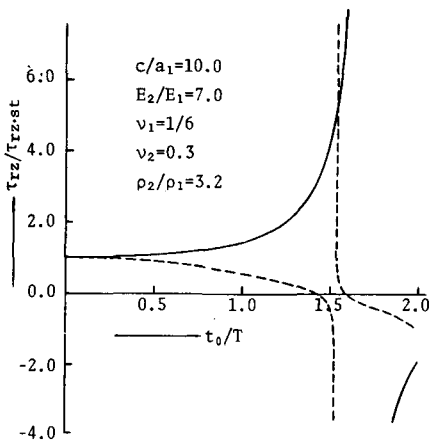


Fig. 7 セン断応力 τ_{rz} の応答倍率 ($c/a_1 = 10.0$)

Fig. 4 は、 $c/a_1 = 1.0$ のときの半径方向変位 u の値を示したものであるが、横軸には t_0/T ($T = 2\pi/\rho$)、縦軸は、周期的外力が作用する場合と静的な場合との比をとっている。また図中の破線は $a_2 = 0$ の場合、すなわち円筒部と同一材料でできた円柱の場合である。実線と破線を比較したとき、Fig. 3 に示したように、 $c/a_1 = 1.0$ のときの固有振動周期が $a_2 = 0$ のとき $t_0/1.581$ 、 $a_2/a_1 = 0.25$ のとき $t_0/1.613$ となっているので、その影響で T の大きいときには破線の方が実線より応答値が大きくなっている。 T の小さい範囲では変化が複雑である。

Fig. 5 は同じ条件のせん断応力度の値を示しているが、せん断応力度は T の大きい範囲では二相円柱の方が大きくなっている。 T が小さくなるに従って、共振周期に近づくためにこの関係は逆転する。

Fig. 6, 7 には $c/a_1 = 10.0$ の場合の同様の値を示した。変位は $c/a_1 = 1.0$ の場合と変らないうが、せん断応力度はかなり異なっており、共振周期より大きい周期では、円柱のみの場合は静的な場合より小さくなるが、二相円柱の場合は、他の場合と同様に大きくなっている。

以上、特殊な場合に対する計算のみを示したが、より一般的な場合の解析については、今後所収の予定である。

参考文献

- 1) 松岡・能町：土木学会北海道支部論文発表集、第35号、P. 94~97
- 2) 松岡・能町：土木学会第44回年次学術講演会講演概要集、第1部、P. 495~496