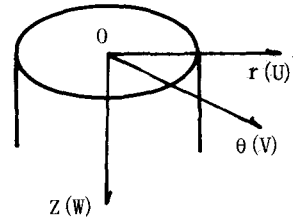


I-15 剛体基礎上の構造物が半無限弾性体表面に及ぼす水平振動倍率について

北海道大学 正 員 能町 純 雄
 北海道大学 正 員 角田 与史雄
 北海道大学 学生員 〇三上 敬 司

1. まえがき

半無限弾性媒体の表面上に円形剛体が、強制定常振動を受ける場合の動的応答問題については、1937年に、Reissnerが、軸対称応答について、1944年に、Sagociが、楕円球数を用いてトルク応答について解析を試みている。続いて、1955年に、Arnold, Bycroft, Warburtonらが、半無限弾性媒体に円形剛体を適用して、鉛直、水平、回転モーメント、トルクの剛体の運動を含めた変位の周波応答を解析している。さらに、Ufland, Collins, Lucoなどの多くの研究が見られる。実際の問題のアプローチとして一層あるいは多層の弾性媒体中に剛体あるいは弾性インクルージョンが存在する場合の応答も地震工学の立場から広く検討されている。例えば、有限平板法を用いて、剛地盤上の多層表層に円筒形弾性基礎がある場合の田治見の研究や有限要素法を用いて半無限弾性体の表面に接し、任意の剛体が存在する場合の周波数コンプライアンスがFrazerによって検討されている。ことに、表層剛性円形フーチングについては、LucoがFredholm形積分方程式によって、Bycroft 理論を用い、各強制振動に対するコンプライアンスを求めている。



円柱座標系
Fig. -1

しかし、剛体の質量を考えたArnold等の研究においては、水平強制振動に対して、表面鉛直方向の変位を 0とする仮定を用いているため、Rayleigh Poleの影響を考慮していない。Lucoの研究においては剛性フーチングの質量を 0として、フーチング中心に作用する調和水平振動に関するコンプライアンスを求めている。

本論文では、半無限弾性媒体上に水平強制振動が作用する際の表面にある円筒形剛体の変位応答、角変位応答を 媒体と剛体との密度比、剛体の高さと接地半径との比をパラメーターとするスペクトルで求めることを試みた。

2. 解式の概略と変位式

半無限弾性媒体上に半径 r_0 の円筒形剛体が密着しているとする。振動方程式は、媒体のLame定数を G 、 λ とし、 ρ を密度とすれば、

$$G \nabla^2 \mathbf{U} + (G + \lambda) \text{grad} \cdot \text{div} \mathbf{U} = \rho \mathbf{U} \quad \dots \dots \dots (1)$$

半無限弾性媒体の表面 $Z = 0$ で、 $\tau_{yz} = 0$ な条件を満足する解をフーリエ・ハンケル変換を用いて求めると、円振動数 p に対する変位式は、次のように書ける。

$$\left. \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right\} = \int_0^\infty e^{ipt} \{ A J_2(\xi r) \pm B J_0(\xi r) \} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \xi d\xi \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$W = \int_0^\infty e^{ipt} W J_1(\xi r) \cos \theta \xi d\xi \quad \dots \dots \dots (3)$$

上式中の U, V, W は r, θ, Z 方向の変位、

$$\left. \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} = \left\{ \frac{s^2 \dot{T}}{2\alpha\beta G} \left(\pm \alpha e^{-\beta\zeta} \mp \beta e^{-\alpha\zeta} - \frac{2\beta}{s^2} e^{-\alpha\zeta} \right) \right. \\ \left. \pm \frac{s}{2\alpha} \dot{W} \left\{ e^{-\alpha\zeta} - \frac{k}{2\alpha\beta} (s^2 + \alpha^2) (\beta e^{-\beta\zeta} - \alpha e^{-\alpha\zeta}) \right\} \right\} \quad \dots \dots (4)$$

$$W = \frac{s}{kG} (e^{-\beta\zeta} - e^{-\alpha\zeta}) \dot{T} + \{ 2s^2 (e^{-\alpha\zeta} - e^{-\beta\zeta}) + e^{-\beta\zeta} \} \dot{W} \quad \dots \dots (5)$$

ここで、 $k^2 = \rho p^2 / G$, $kr = a_0$, $\alpha^2 = s^2 - 1$, $\beta^2 = s^2 - \eta^2$, $\eta^2 = G / 2G + \lambda$, $\zeta = kz$ とする。
 T , W は、 $Z = 0$ における T_{xz} と W の分布に関するハンケル変換である。

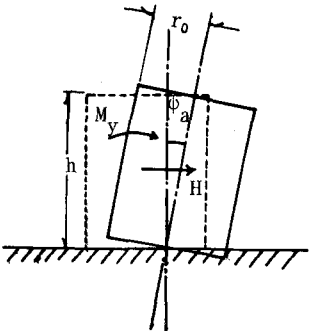
3. 境界条件

円筒剛体(半径 r_0)が媒体に密着し、その底面を通して媒体に及ぼす τ_{xz} , σ_z の分布をBycroft に従って剛体スタンプの応力分布を仮定すれば、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz})_{z=0} &= \frac{H e^{ipt}}{2\pi r_0} \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} \\ \sigma_z)_{z=0} &= \frac{3M e^{ipt}}{2\pi r_0^3} \frac{r \cos \theta}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

また、一般化されたウエイトを用いて剛体底面における平均水平変位 U_a と Y 軸回りの平均回転角 ϕ_a を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} U_a e^{ipt} &= \frac{1}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{U \cos \theta - V \sin \theta}{(r_0^2 - r^2)^{1/2}} r dr d\theta \\ \phi_a e^{ipt} &= \frac{3}{2\pi r_0^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{r^2 W}{(r_0^2 - r^2)^{1/2}} \cos \theta dr d\theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$



4. 水平振動方程式と回転運動方程式

上式から、 $Luco$ のコンプライアンス関係式が求まり、 $Luco$ と同じ記号を使えば、

$$\begin{bmatrix} U_a \\ \phi_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{hh} & C_{mh} \\ C_{hm} & C_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ M_y \end{bmatrix} \dots \dots \dots (8)$$

ここで、 H は水平力、 M_y は回転モーメントである。

水平振動方程式は、

$$H = m p^2 (U_a + \bar{U}) \dots \dots \dots (9)$$

回転運動方程式は、

$$M_y = m p^2 \mu^2 h^2 \phi_a + m p^2 \frac{h}{2} (U_a + \bar{U}) \dots \dots \dots (10)$$

ただし、 m は剛体質量、 h は剛体の高さ、 μ は慣性回転半径と高さの比、 $\bar{U}$ は水平強制振動による剛体の加速度振幅である。

(9) . (10) 式を (8) 式に代入して、式を整理すると、

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{hh} + \frac{1}{2} \bar{C}_{mh}^{-1} & \mu^2 \bar{C}_{mh} \\ \bar{C}_{mh} - \frac{1}{2} \bar{C}_{mm} & -(\mu^2 \bar{C}_{mm} + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ h \cdot \phi_a \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{C}_{hh} + \frac{1}{2} \bar{C}_{mh} \\ \bar{C}_{mh} - \frac{1}{2} \bar{C}_{mm} \end{bmatrix} \cdot \bar{U} \dots \dots \dots (11)$$

上式中の複素コンプライアンス $\bar{C}_{hh}$, $\bar{C}_{mh}$, $\bar{C}_{mm}$ は、次式となる。

$$\begin{aligned} \bar{C}_{hh} &= \frac{b a_0^2}{4\pi} \int_0^\infty \left[\frac{(1 - \eta^2)^2 \bar{\alpha} (\bar{\beta} + \bar{\alpha})}{F(\bar{\alpha} \bar{\beta})} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \right] \gamma_1^2 (a_0 s) d(a_0 s) \\ \bar{C}_{mh} &= \bar{C}_{hm} = \frac{3}{4\pi} (b a_0^2) \left(\frac{h}{r_0} \right) \int_0^\infty \left[\frac{(1 - \eta^2) \{ \bar{\beta} - \bar{\alpha} (1 - 2 \eta^2) \}}{F(\bar{\alpha} \bar{\beta})} \right] \gamma_1 \gamma_2 (a_0 s) d(a_0 s) \\ \bar{C}_{mm} &= \frac{9}{4\pi} (b a_0^2) \left(\frac{h}{r_0} \right)^2 \int_0^\infty \left[- \frac{(1 - \eta^2)^2 \bar{\beta}}{(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) F(\bar{\alpha} \bar{\beta})} \right] \gamma_2^2 \frac{d(a_0 s)}{a_0 s} \end{aligned}$$

ここで、 $b = m / \rho r_0^2$, $a_0 = \sqrt{\rho / G} r_0 p$, $\gamma_1 = \sin(a_0 s) / a_0 s$, $\gamma_2 = \sin(a_0 s) / a_0 s - \cos(a_0 s)$,

$$\begin{aligned} F(\bar{\alpha} \bar{\beta}) &= \bar{\beta}^3 - (3 - 4 \eta^2) \bar{\beta}^2 \bar{\alpha} - \bar{\beta} \bar{\alpha}^2 - (1 - 2 \eta^2)^2 \bar{\alpha}^3 , \\ \bar{\alpha}^2 &= (a_0 s)^2 - a_0^2 , \quad \bar{\beta}^2 = (a_0 s)^2 - (a_0 \eta)^2 \end{aligned}$$

5. 水平変位応答スペクトルと角変位応答スペクトルについて

(1) 高さを無視できる程に低い場合について

この場合は、 $h/r_0 \rightarrow 0$ とみなせるから、剛体の水平変位は、 $U_a + U$ で与えられる。よって、水平変位応答倍率は、次のように成ります。

$$\frac{|U_a + U|}{|U|} = \frac{1}{|1 - C_{hh}|} \dots \dots \dots (12)$$

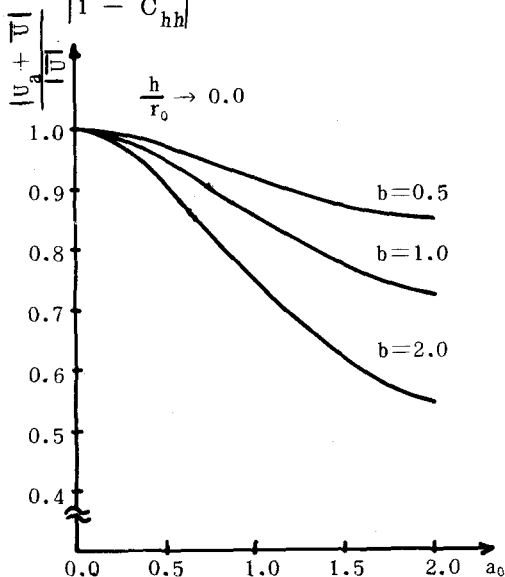


Fig.-3

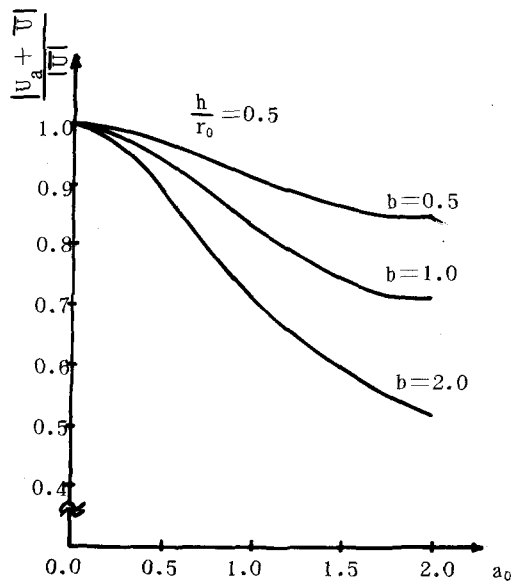


Fig.-4

(2) 高さを考慮した場合の水平変位応答倍率は、次のように成ります。

$$\frac{|U_a + U|}{|U|} = \frac{|1 + \mu^2 C_{mm}|}{|(1 + \mu^2 C_{mm})(1 - C_{hh}) - C_{mh}(\frac{1}{2} + \mu^2 C_{mh})|} \dots \dots \dots (13)$$

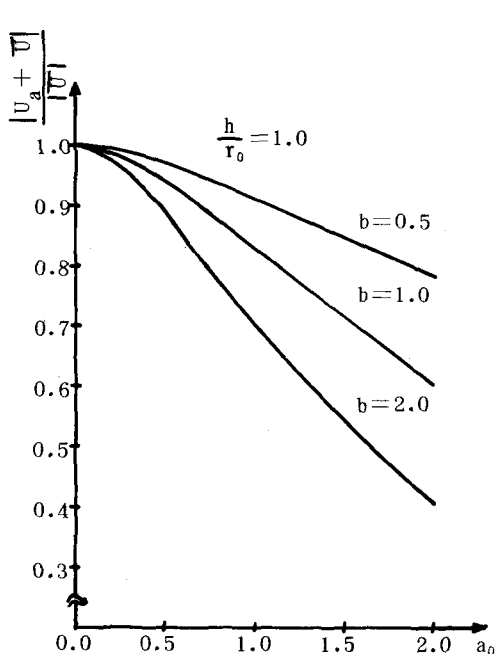


Fig.-5

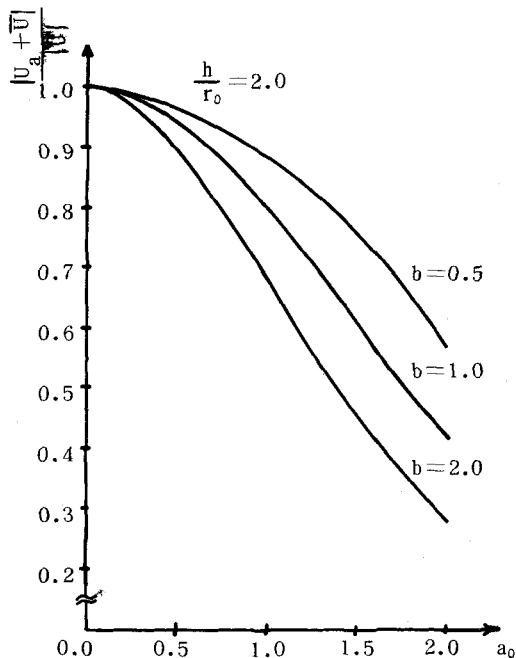


Fig.-6

(3) 角変位応答スペクトルは、次のように成ります。

$$\frac{|h \cdot \phi_a|}{|\bar{U}|} = \frac{|\bar{C}_{mh} - \mu^2 \bar{C}_{mm}|}{[(1 + \mu^2 \bar{C}_{mm})(1 - \bar{C}_{hh}) - \bar{C}_{mh}(\frac{1}{2} + \mu^2 \bar{C}_{mh})]} \dots\dots\dots (14)$$

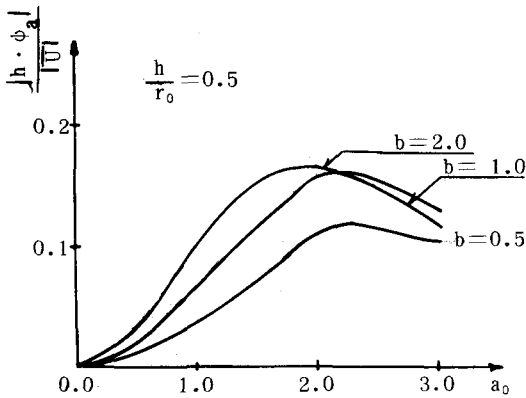


Fig.-7

7. 数値解析

数値解析例として、ポアソン比 $\nu=0$ とした時、剛体の高さ半径との比 $h/r_0 \rightarrow 0, h/r_0=0.5, 1.0, 2.0$ と媒体と剛体の密度比 $b = m / \rho r_0^3 = 0.5, 1.0, 2.0$ などをパラメーターとして、無次元円振動数 a_0 に対して水平、角変位の応答倍率を求めた。

(1)においては (Fig.-3) ,せん断力のみが作用している。水平変位の応答倍率は、1.0 をピークとして徐々に減少している。さらに、 b が増加するにつれて、一層著しく減少している。このことは、平均変位 U_a が慣性力によって、振動方向と逆方向に変位していることを示している。

(2)においても (Fig.-4 ~ Fig.-6) ,同様な傾向が見られ、 h/r_0 が大きくなるにつれて、さらに、減少が著しい。

(3)においては (Fig.-7 ~ Fig.-9) ,ピーク点が現われているが、これは、一種の共振点である。 $h/r_0 = 0.5$ では、 $a_0 = 2.0$ の近傍で、 $h/r_0 = 1.0$ では、 $a_0 = 1.0 \sim 2.0$ の間ぐらいに、さらに、 $h/r_0 = 2.0$ では、 $a_0 = 0.7 \sim 1.8$ の間ぐらいにピーク点がそれぞれ現われているこのことは、 h/r_0 が大きくなるにつれて、より低い周波数のところで共振点が現われる。さらに、 b が大きくなると一層著しい傾向を示している。

参考文献)

(1) Lucco.J and Westmamm.R : Dynamic Response of Circular Footings Proceeding of ASCE,p1381,1971.

Bycroft.G : Soil Structure Interaction at Highway Frequency Factors, EARTHQUAKE ENG.Vo.5, No.3,P235,1977. Arnold.R.N , Bycroft.G.N and Warburton.G.B : Forced Vibration of a body on infinite elastic solid.

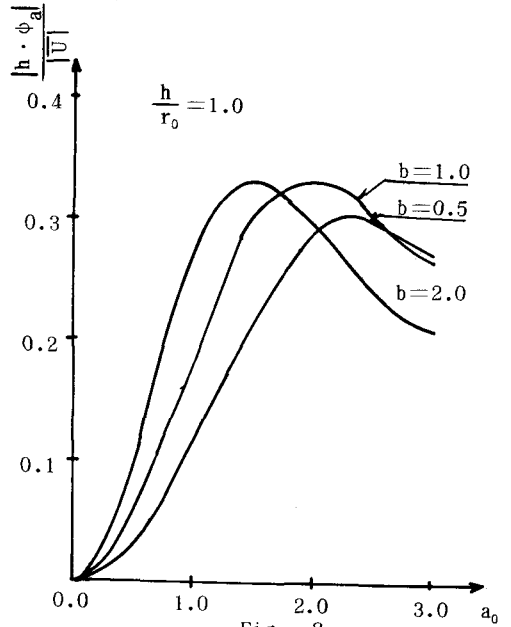


Fig.-8

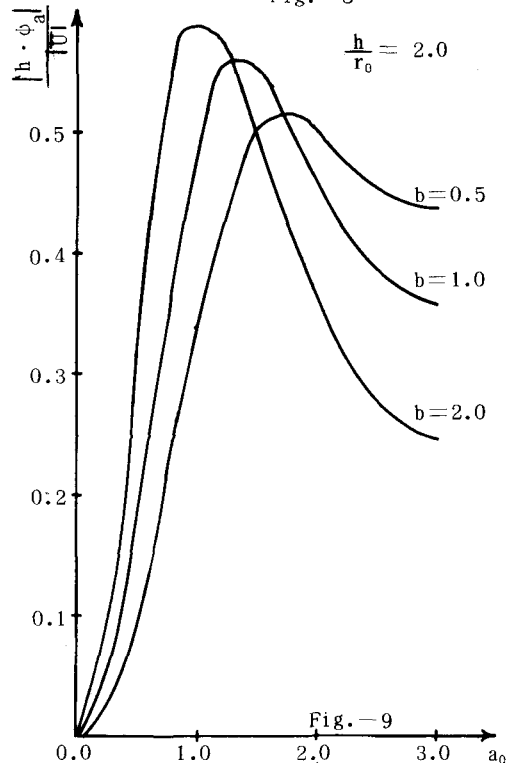


Fig.-9