

I-10 水平力を受ける半無限体中の円柱の解析について

北大 正員 芳村 仁
北見工大 正員 奥村 勇
熊谷組 正員 O 伊藤 羊

1. 緒言

一般に、地盤に埋め込まれた円柱構造物の解析は、地盤反力係数を求めChang式を解くことによって行なわれてきた。しかし、一つの連続体である地盤において周囲の影響を考慮した地盤反力係数を定めることは非常に困難である。本論文では、この地盤反力係数を用いなく解析する一近似解法を示す。すなわち、地盤の弾性的性質（ポアソン比、弾性係数）を知るのみで地盤内の円柱構造物が表面に横荷重を受けた場合の解析を行なう。さらに、オイルタンクの基礎部分などのような短柱の解析にも適用できるようにせん断変形による変位を考えたうえで厳密解と比較した。

2. 理論

(1) 概説

解析における基本的な考え方は、地盤の変位と円柱の変位が等しいと仮定する点にある。又、地盤は等方等質の半無限弾性体であるとし、表面に働く水平力は円柱の側面反力のみで抵抗するものとする。以上のような条件を基に、まずFig-1のようなモデルにおいてFig-2のように円柱と地盤を別々に考え、各々を n 個の要素に分け（等間隔）、加ゆる不静定反力を $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ とし、円柱の変位を $U_{p1}, U_{p2}, U_{p3}, \dots, U_{pn}$ 、地盤の変位を $U_{s1}, U_{s2}, U_{s3}, \dots, U_{sn}$ とする。（変位は要素の中心における変位）又、表面に働く水平力を H とすると先に述べた仮定より次のような式が成立する。

$$\{U\}_{pn} = \{U\}_{sn} \quad (1), \quad H = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n \quad (2)$$

ただし、 P は分布反力である。 $\{U\}_{pn}$ ：円柱の変位、 $\{U\}_{sn}$ ：地盤の変位

この(1)、(2)式を基に、各々のためみ性マトリックスを考える。最初に地盤の変位、次に円柱の変位、最後に計算法を述べる。

(2) 地盤の変位

地盤の変位においては、均一な等方弾性体である3次元半無限体の表面と平行な集中荷重が働いた場合の内部の変位、応力を表わしたMindlinの第2解が(3)式のように与えられている。これをさらに矩形等分布荷重が働いた場合に拡張した(5)式を利用する。

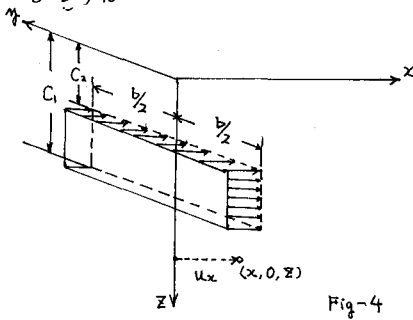
$$u_x = \frac{P}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{z^2}{R_1^3} + \frac{3-4\nu}{R_2^3} z^2 + \frac{2\lambda z}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x^2}{R_2^2}\right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2+z+\lambda} \left\{1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+\lambda)}\right\} \right] \quad (3)$$

G ：せん断弾性係数、 ν ：地盤のポアソン比

今、矩形領域を、 $y = -b/2 \sim b/2$ (y 方向、幅 B)、
 $z = C_2 \sim C_1$ (z 方向、幅 $h = C_1 - C_2$)とし積分する。
 (3)式で $x = 0$ 、 $y = y + s$ とし C についての区間
 ($C_2 \sim C_1$)、 s についての区間($-b/2 \sim b/2$)で積分する。

$$u_x = \frac{P}{16\pi G(1-\mu)Bh} \left\{ \int_{C_2}^{C_1} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ \frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2Cz}{R_2^3} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2 + z + C} \right\} dc ds \right\} \quad \text{---- (4)}$$

ここで $R_1^2 = (z-C)^2 + (y-s)^2$, $R_2^2 = (z+C)^2 + (y-s)^2$
 $B = b$, $h = C_1 - C_2$



(4)式の積分を実行し、次に u_x と矩形の中の点 z と
 してそれを代表するため、 $y = 0$ を代入して計算す
 ると次のようになる。

$$u_x = \frac{P}{16\pi G(1-\mu)BA} \left[(3-4\nu) I_1 + I_2 + 4(1-\nu)(1-2\nu) I_3 \right] \quad \text{---- (5)}$$

$$I_1 = b \log \frac{z - C_2 + \sqrt{b^2/4 + (z - C_2)^2}}{z - C_1 + \sqrt{b^2/4 + (z - C_1)^2}} \\ + (z - C_1) \log \frac{-b/2 + \sqrt{b^2/4 + (z - C_1)^2}}{b/2 + \sqrt{b^2/4 + (z - C_1)^2}} \\ - (z - C_2) \log \frac{-b/2 + \sqrt{b^2/4 + (z - C_2)^2}}{b/2 + \sqrt{b^2/4 + (z - C_2)^2}}$$

$$I_2 = (z - C_1) \log \frac{-b/2 + \sqrt{b^2/4 + (z + C_1)^2}}{b/2 + \sqrt{b^2/4 + (z + C_1)^2}} \\ - (z - C_2) \log \frac{-b/2 + \sqrt{b^2/4 + (z + C_2)^2}}{b/2 + \sqrt{b^2/4 + (z + C_2)^2}} \\ - b \log \frac{z + C_2 + \sqrt{b^2/4 + (z + C_2)^2}}{z + C_1 + \sqrt{b^2/4 + (z + C_1)^2}} \\ - \frac{8z^2}{b} \left\{ \frac{\sqrt{b^2/4 + (z + C_2)^2}}{z + C_2} - \frac{\sqrt{b^2/4 + (z + C_1)^2}}{z + C_1} \right\}$$

$$I_3 = \frac{2}{b} \left\{ (z + C_2) \sqrt{b^2/4 + (z + C_2)^2} - (z + C_1) \sqrt{b^2/4 + (z + C_1)^2} \right\} \\ - \frac{b}{2} \log \frac{z + C_1 + \sqrt{b^2/4 + (z + C_1)^2}}{z + C_2 + \sqrt{b^2/4 + (z + C_2)^2}} + \frac{2}{b} \left\{ (z + C_1)^2 - (z + C_2)^2 \right\} \\ - (z + C_1) \log \frac{-b/2 + \sqrt{b^2/4 + (z + C_1)^2}}{b/2 + \sqrt{b^2/4 + (z + C_1)^2}} \\ + (z + C_2) \log \frac{-b/2 + \sqrt{b^2/4 + (z + C_2)^2}}{b/2 + \sqrt{b^2/4 + (z + C_2)^2}}$$

ただし $B = \sqrt{\pi a^2}$ とする。 ---- (6)

地盤の変位は、(5)式を計算し重ね合わせることによ
 って求まる。今、そのたわみ性マトリックスを $[A]$
 とすると次のように表わされる。

$$\{U\}_s = [A]\{P\}, \quad \text{---- (7)}$$

ただし

$$\{U\}_s = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{Bmatrix},$$

$[A]$ の要素は非常に複雑であるので省略する。

(3)用柱の変位

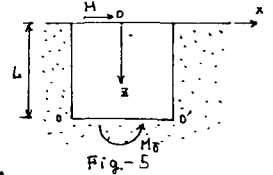
用柱の変位は、曲げ変形による変位、せん断変
 形による変位、剛体変位によって表わされる。そこ
 で、今モデルとして次のような仮定を設ける。

1. $z = 0$ において曲げ

モーメントはゼロで
 ある。($z = 0, M = 0$)

2. Fig-5において $0 \sim b$ は

鉛直方向に変化しない。



又、用柱底部は地盤から離れないものとする。

($z = L, (dx/dz)_n = 0$), (M_0 : 拘束モーメント)

曲げ変形による変位

用柱の曲げ変形による変位は、(8)式を(9)式の一
 次差分式にして解くことにする。

$$d^2x/dz^2 = -M/E_I, \quad \text{---- (8)}$$

$$x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1} = -h^2/E_I \cdot M_n, \quad \text{---- (9)}$$

境界条件

$$M_0 = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} (dx/dz)_{z=L} = 0, \text{ 即ち } x_{n+1} - x_{n-1} = 0, \\ x_{n+1} = 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{---- (10)}$$

(10)式を(9)式に代入し、(11)式のように表す。

$$x_{n-1} + x_{n+1} = 2x_n,$$

($U_{n,n}$: 要素の中間点の変位)

以上を整理してマトリックスで表わすと次のよう
 になる。

$$[B]\{U\}_M = \frac{h^2}{2E_I} [M]\{P\}, \quad \text{---- (11)}$$

ただし

$$\{U\}_M = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{Bmatrix},$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 8 & -8 & 8 & -8 & \cdots \\ 0 & 2 & -6 & 8 & -8 & 8 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 8 & -8 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 6 & 6 & \cdots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 8 & \cdots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

今、(11)式において[B]の逆マトリックスを求めることにより、曲げ変形による変位 $\{U\}_H$ は次のように表わされる。

$$\{U\}_H = \frac{h^3}{2E_p I} [B]^{-1} [M] \{P\}, \dots (12)$$

せん断変形による変位

せん断力のみによるはりのたわみ曲線 x_s の傾斜は、近似的には中立軸におけるひずみに等しいとすると次のような式が成立する。

$$dx_s/dz = \alpha_s \theta / GA, \dots (13)$$

ここに、 θ/A は平均のせん断応力度、 α_s は shear coefficient。

(13)式を1回微分すると

$$d^2 x_s / dz^2 = \alpha_s / GA (d\theta / dz) = -\frac{\alpha_s}{GA} \cdot q, \quad (q_m = \frac{P_0}{h}), (14)$$

今、Fig-6のようなある任意点にPが働いている場合を考え、それを重ね合わせることにし、せん断変形による変位を求める。

境界条件

$$x_s' \cdot z=0 = 0 \dots (15)$$

$$(dx_s/dz)_{z=0} = \alpha_s P / GA \cdot b \dots (16)$$

まず、(13)、(15)式より $0 \leq z_0 \leq b$ における変位を求め、次に $b \leq z_0 \leq b+h$ における変位を(14)、(16)式によって求めると次のように表わされる。

$$x_s = \alpha_s P / GA \cdot z_0, \quad (0 \leq z_0 \leq b) \dots (17)$$

$$x_s = \alpha_s P / GA 2h (2hz_0 - z^2) + \alpha_s P / GA \cdot b, \quad (b \leq z_0 \leq b+h) \dots (18)$$

せん断変形による変位は、(17)、(18)式によって $x_{s,z=h}$ 等を求め曲げによる変位と同様にして求める。 $z_0 \geq b+h$ においては、せん断力は0であるから変位は $x_{s,z=b+h}$ に等しい。

以上を整理してマトリックスで表わすと次のようになる。

$$\{U\}_s = \alpha_s h / 2GA \cdot [S] \{P\}, \dots (19)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} E_0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots \\ 0 & E_0 & 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots \\ 0 & 0 & E_0 & 2 & 4 & 6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad E_0 = 0.25,$$

$$\alpha_s = (7 + 6\nu_p) / 6(1 + \nu_p), \quad (\text{円形断面: G.R. Cowper-Rによる})$$

ここで、剛体変位 $\{F\}$ が求まったとすると円柱の変位は次のようになる。

$$\{U\}_p = h/2E_p I \cdot [B]^{-1} [M] \{P\} + \alpha_s h / 2GA \cdot [S] \{P\} + \{F\}, \dots (20)$$

(7)式、(20)式を(1)式に代入し整理すると次のようになる。

$$[D] \{P\} = \{F\}, \dots (21)$$

この連立一次方程式は、仮定より $F_m = \text{const.}$ なる性質を用いて次のような解法手順によって解く。

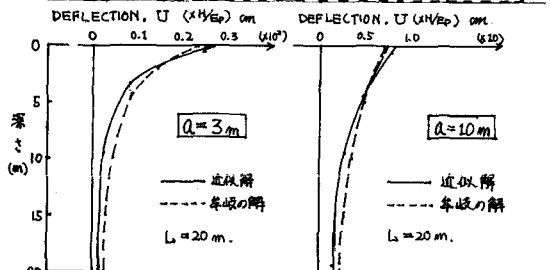
3. 計算法

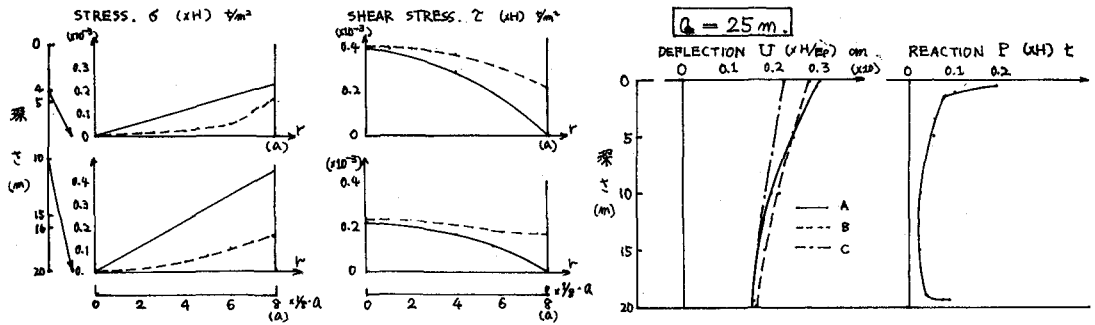
1. $P_0 = R$ とおいて(21)式を解き、 $\{P\}$ を求める。
(R:適当な定数、例: $R=0.3$)
2. (2)式によって $P_1, P_2, \dots, P_m$ を H で表わす。
($P_0 = \text{const.}$ ならば $P_1, P_2, \dots, P_m$ の比は常に一定である。)
3. (5)式によって F_0 の正解を求める。($F_0 = U_{s,z=L}$)
4. $P_1, P_2, \dots, P_m, F_0$ を(7)、(20)式に代入し、 $\{U\}_p = \{U\}_s$ を満足する α を電卓する。
5. 曲げ応力、せん断応力を求める。 END.

4. 計算例I

ここでは、円柱と地盤の弾性的性質を等しくして ($E_s = E_p, \nu_s = \nu_p$) 半径の解と比較する。

半径 a : 3, 10, 25 m, $L = 20$ m,
 $\nu_s = \nu_p = 0.3$, $E_s = E_p$, 分割数, 幅 20, 1 (m)
ディメンション (セ.メ.)





A: 近似解 (曲げ + せん断) B: 半無限体の解 C: 近似解 (曲げ)

ただし、半無限体の解は半無限体の表面の半径 a の円内に一樣なせん断力 τ_{xy} が働いた場合の $r=0$ における変位を用いた。又、半径 3, 10 m においては、A, C の差はほとんどないので C は省略した。

5. 計算例 II

ここでは、円柱と地盤の弾性的性質が異なる場合

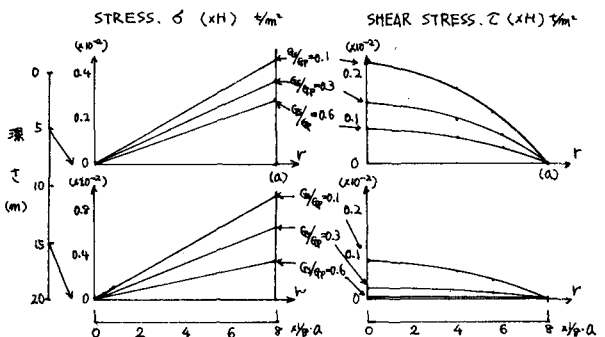
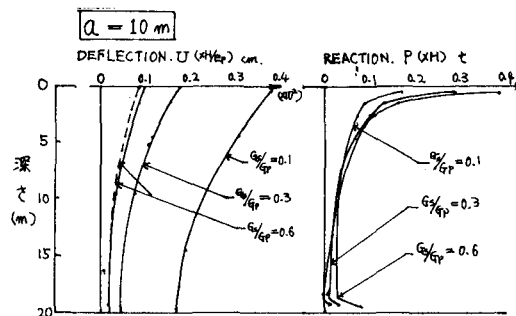
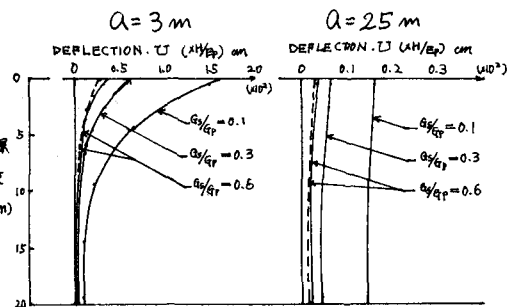
($E_s \neq E_p, \nu_s \neq \nu_p$) について 奥村の解と比較する。

半径 a : 3, 10, 25 m, $L = 20$ m,

$\nu_s = 0.45, \nu_p = 0.17, G_p/G_s$: 0.1, 0.3, 0.6

分割数, 横 20, 1 (m). ディレイション (t. m)

ただし、奥村の解は円柱 (半無限) と地盤の弾性的性質が異なる半無限体の表面の半径 a の円内に一樣なせん断力 τ_{xy} が働いた場合の変位を用いた。



6. 結 語

近似解法は、特に短柱においてせん断力による変位を考慮することによって厳密解とよく一致する値を与えている。逆に長柱においてはせん断力による影響は、無視できることを確認した。又 G_p/G_s の影響を、比較検討することもできた。今後は動的荷重が加わった場合の解析を検討する予定である。計算には、FACOM-230-75を使用した。

参考文献

- 1) 西井忠明: 構造力学, 技報堂 1973
- 2) 成田昌夫: 構造力学要論, 丸善 1974
- 3) H.G. Poulos: ANALYSIS OF THE DISPLACEMENT OF LATERALLY LOADED PILES II. PILE GROUPS