

I-7 非保存的弾性安定の直交選点法による解析について

北海道大学 正員 芳村 仁

北海道大学 正員 〇三 上 隆

1. はじめに 本報告は非保存的弾性安定問題の一解析法として直交選点法による解法を述べたものである。

構造物に作用する力は保存力と非保存力に分類される。最近、土木工学の分野でも水や風など流体の影響を受ける構造物が見受けられるようになってきた。流体から受ける力はその作用方向が構造物の変形に従って変化する力と追随力と非追随力とが呼ばれる非保存力である。したがって、そのような荷重条件下での安定性の検討も重要と思われる。

非保存的弾性問題に關しては、今日までに数多くの研究が行なわれており、考察している系の運動方程式を確立し Galerkin 法や差分法などによる研究⁽¹⁾⁽⁶⁾、変分原理に基づく有限要素法による研究⁽⁷⁾⁽¹⁰⁾ などがある。前者の運動方程式を基礎式とする場合、変数分離後の方程式は一般に非自己随伴型の常微分方程式となり通常のエネルギー原理の成立しない領域であるので、その解法は何らかの近似解法に頼らざるを得ない。

本研究は、上記解法と異なる一解析法を提示するとともに、Buck の問題および分布荷重線従動力が作用する柱などを解析し、既往の理論値との比較を行い本解析法の有用性の検討を行ったものである。

2. 解析方法 非保存系弾性安定問題の解析は、数学的には、非自己随伴境界値問題の固有値を調べる問題に帰着される。本報告では数値計算の簡易化を計るため特性方程式の固有ベクトルを選点における解の値として表わすことを試みる。

考察している系の運動方程式および境界条件式は変数分離後、次式で表わされるとする。

$$L(w) = 0 \quad \text{----- (1)}$$

$$B_n(w) = 0 \quad n=1 \sim 4 \quad \text{----- (2)}$$

L, B は線形微分演算子であり、L は最高 4 階とする。

試行関数は次式を用いる。内部選点数を N とすると

$$w(x) = \sum_{i=1}^{N+4} d_i x^{i-1} \quad \text{----- (3)}$$

内部選点はルジャンドルの多項式 $P_n(x)$ の区間 $[-1, 1]$ を $[0, 1]$ に変換した $P_n^*(x) = P_n(1-2x)$ の根を用いる。

式(3)の選点での値を求めると

$$w(x_j) = \sum_{i=1}^{N+4} x_j^{i-1} d_i \quad i=1 \sim N+2 \quad \text{----- (4)}$$

ただし、 $x_2 \sim x_{N+1}$ は内部選点、 $x_1 = 0$ $x_{N+2} = 1.0$

式(4)をマトリックス表示すると

$$\{w\} = [Q_1]\{\bar{d}_1\} + [Q_2]\{\bar{d}_2\} \quad \text{----- (5)}$$

ここで、 $\{w\}^T = \{w(x_1), w(x_2), \dots, w(x_{N+1}), w(x_{N+2})\}$

$$\{\bar{d}_1\}^T = \{d_1, d_2, \dots, d_{N+2}\}, \quad \{\bar{d}_2\}^T = \{d_{N+3}, d_{N+4}\}$$

式(5)を $\{\bar{d}_1\}$ につき解き、式(4)の $1 \sim 4$ 次微分に代

入すると

$$\{w'\} = [A_1]\{w\} + [A_2]\{\bar{d}_2\} \quad \text{----- (6)}$$

$$\{w''\} = [B_1]\{w\} + [B_2]\{\bar{d}_2\} \quad \text{----- (7)}$$

$$\{w'''\} = [C_1]\{w\} + [C_2]\{\bar{d}_2\} \quad \text{----- (8)}$$

$$\{w''''\} = [D_1]\{w\} + [D_2]\{\bar{d}_2\} \quad \text{----- (9)}$$

ここで、 $\{w\}^T = \{w'(x_1), w'(x_2), \dots, w'(x_{N+2})\}$ であり他も同様である。

(N+4)個の条件は次のように決定される。まず、N 個の条件は、N 個の内部選点での残差より定められる。

式(1)と式(6)~(9)より

$$[\alpha_1]\{w\} + [\alpha_2]\{\bar{d}_2\} - \lambda [I]\{\bar{w}_1\} = 0 \quad \text{----- (10)}$$

ここで、 $\{\bar{w}_1\}^T = \{w(x_2), w(x_3), \dots, w(x_{N+1})\}$

$$\{\bar{w}_2\}^T = \{w(x_1), w(x_{N+2}), d_{N+3}, d_{N+4}\}$$

λ は振動数パラメーターである。

残り 4 個の条件は $x_1 = 0$ と $x_{N+2} = 1$ での境界条件より定められる。式(2)と式(6)~(9)より

$$[\alpha_4]\{w\} + [\alpha_5]\{\bar{d}_2\} = 0 \quad \text{----- (11)}$$

特性方程式は式(10)と式(11)より次式で表わされる。

$$[\alpha] - \lambda [I]\{\bar{w}_1\} = 0 \quad \text{----- (12)}$$

ただし、 $[\alpha] = [\alpha_1] - [\alpha_2][\alpha_5]^{-1}[\alpha_4]$

特性方程式(12)は選点における解の値を固有ベクトルとするもので、マトリックス $[\alpha]$ は $[A_1] \sim [D_1]$, $[A_2] \sim [D_2]$ と荷重パラメーター β などにより構成される

大きさ(N×N)のマトリックス [E]は(N×N)の単位マトリックスである。

臨界荷重の決定、安定および不安定の判定は荷重パラメーターβと振動数パラメーターλからなる固有値の組(β,λ)を解く問題となる。すなわち、与えられたβで式(12)を満たすN個のλを求める。このとき、λが正の実数から一つでも負値をとるとき不安定(divergence形不安定)、正值から複素根へと変化するとflutter形不安定となる。したがって、考察している系の臨界荷重は、λが正の実数から負の実数あるいは複素根へと移行する最小の荷重パラメーターβを求めることにより得られる。

3. 数値計算例 本手法の精度は、選点法の性質上内部選点数Nに依存することになり、理論的にはN→∞の極限において厳密解に近づく。したがって、ここでは、数値解の精度および収束性の検討を目的とし以下の二つ(Fig-1, Fig-2)の数値計算を行う。



Fig-1 Column with subtangential force

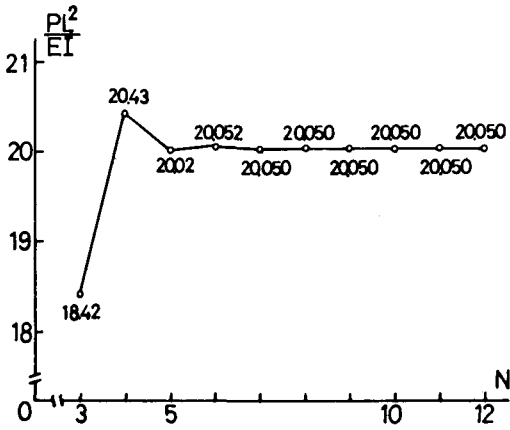


Fig-3 Beck の問題の収束性

①一端固定、他端にSubtangential な圧縮力が作用する柱(Fig-1) Fig-1に様な断面を有し自由端で荷重Pを担う柱を示す。αθは作用荷重Pと鉛直軸とのなす角であり、θは柱の自由端での接線と鉛直軸とのなす角を表わす。αは荷重の作用方向を特性づけるパラメーターで0≤α≤1の範囲である。特にα=0の場合はEulerの問題、α=1のときはBeckの問題となる。基礎方程式、境界条件は次式で表わされる。

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \beta \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \lambda w = 0, \quad \xi=0 \text{ で } w=w'=0, \quad \xi=1 \text{ で } w''=0, w'''=(\alpha-1)\beta w''$$

ここで、 $\beta = PL^2/EI$, $\lambda = \rho L^4 \omega^2/EI$, $\xi = x/L$

Fig-3はBeckの問題(α=1)の臨界荷重の内部選点数による収束状況を示すもので、横軸に内部選点数N、縦軸に臨界荷重をとる。図中、白丸の上下にNに対応するβの値が併記されている。これによると、収束性は良好でNが5ないし6以上で厳密値α0.05と一

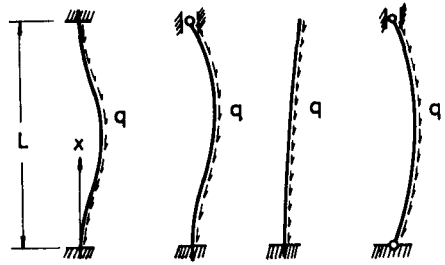


Fig-2 Columns with tangential distributed load q=q₀(L-x)

Table-1 臨界荷重の数値結果 (β*=PL ² /EI)				
解法 α	直交選点法	FEM ⁹⁾	FDM ⁶⁾	厳密解 ³⁾
0	2.4674	2.4674		2.4674
0.1	2.8295	2.830		2.830
0.2	3.3250	3.325		3.325
0.3	4.0550	4.055		4.055
0.4	5.2920	5.293		5.292
0.5	9.869	9.872		9.870
0.6	16.258	16.27		
0.7	16.787	16.80		
0.8	17.589	17.60		
0.9	18.668	18.68		
1.0	20.050	20.07	20.05	20.05

致している。

Table 1 は本解析法による理論値と既往の理論値を幾々の荷重作用方向パラメータ α の値について比較したものである。本法は内部節点数 $N=10$ による結果である。FEM(有限要素法)は荒地による変位関数として三次多項式を用い分割数=5 による結果、FDM(差分法)は杉山らによる 100 分割での Bec 長の問題に対する結果である。表よりわかるように、本解析法による計算値は既往研究結果と十分よく一致しており、本法の有効性を知らることができよう。

Fig-4 と 5 にパラメータ α を $0 \leq \alpha \leq 1$ で連続的に変化させたさいの固有値曲線を示す。Fig-4 は $0 \leq \alpha \leq 0.4$ での固有値曲線であり、Fig-5 は $0.5 \leq \alpha \leq 1.0$ でのそれである。図中、白丸は divergence 形臨界点、黒丸は flutter 形臨界点である。同図より、 $0 \leq \alpha \leq 0.4$ で固有値曲線はほぼ直線変化を示し、 $0 \leq \alpha \leq 0.5$ で divergence 形、 $0.5 < \alpha \leq 1.0$ で flutter 形の現象で不安定となることが理解できる。また、この計算例の Euler の方法(静力学的つり合い法)による特性方程式は $\cos kL = \alpha/(\alpha-1)$ 、ただし $k^2 = P/EI$ となる。この特性方程式が実根を持つ α の範囲は $0 \leq \alpha \leq 0.5$ であり、この点についても、本手法の数値結果と確かめられた。

②. 分布荷重方向従動力が作用する柱 (Fig-2).

この数値計算例は Fig-2 に示す断面一定の柱に荷重方向従動力が $q=q_0(L-\xi)$ と直線変化する場合である。境界条件は固定-固定 (C-C)、固定-支持 (C-S)、固定-自由 (C-F) および両端支持 (S-S) である。

基礎方程式および境界条件式は次式で与えられる。

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \frac{\beta}{\lambda} (1-\xi)^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \lambda w = 0$$

ただし、 $\beta = q_0 L^4 / EI$ 、 $\lambda = \rho L^4 \omega^2 / EI$ 、 $\xi = X/L$
境界条件式は、固定で $w=w'=0$
支持で $w=w''=0$
自由で $w'''=w''''=0$ である。

Fig-6 は、各種境界条件について内部節点数 N による臨界荷重 ($q_0 L^4 / EI$) の収束状態を示したものである。図中、白丸は divergence 形臨界荷重、黒丸は flutter 形臨界荷重である。内部節点数が少なすぎると境界条件、C-C および C-S で収束値と異なる不安定現象で臨界荷重が求まっているが内部節点数が 6 ないし 7 以上にな

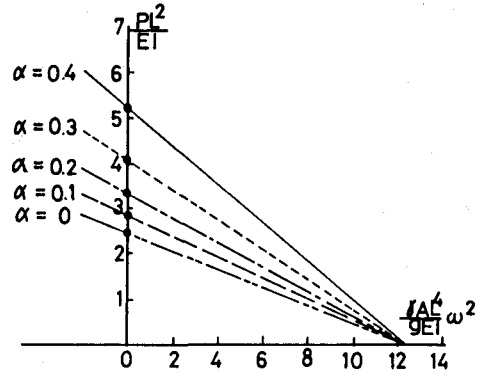


Fig-4 固有値曲線 ($0 \leq \alpha \leq 0.4$)

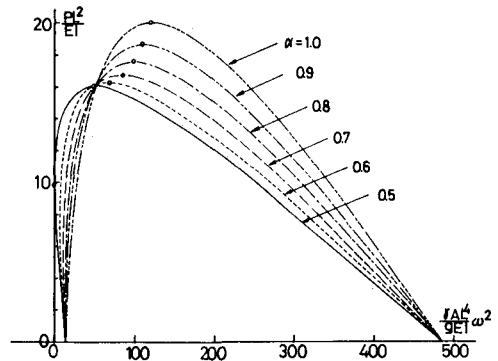


Fig-5 固有値曲線 ($0.5 \leq \alpha \leq 1.0$)

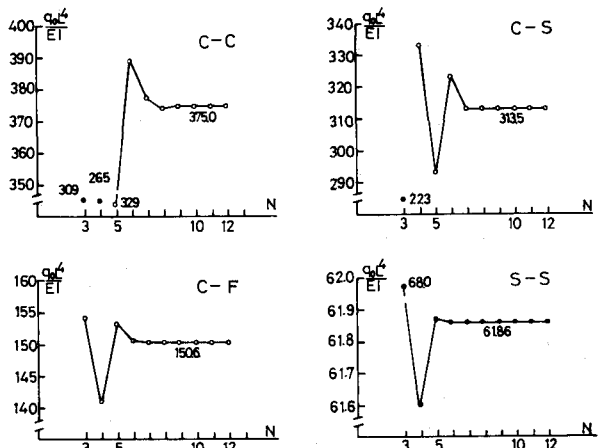


Fig-6 分布荷重方向従動力を担う柱の収束性

るし右境界条件とも一定値に収束している。

Fig-7は内部選点数 $N=10$ での4つの境界条件に対する固有値曲線である。両端支持(S-S)でdivergence形不安定, 他の境界条件はflutter形不安定である。

Table-2は本手法による理論値と既往の理論値との数値的比較を示したもので, 本法は内部選点数 $N=10$, 差分法は杉山⁶⁾による分割数100での結果である。又, ガーキン法はHauger⁷⁾らによる理論値で, 境界条件C-CとC-Sは4項近似, 他の境界条件は2項近似による値である。本解析法による理論値は他の解法による理論値と十分よく一致している。

4. まとめ

柱の非保存的弾性安定問題の一解析法として直交選点法による解法を提示し, 収束性, 精度の検討を行った結果, その有用性が確かめられた。

得られたおもな結果を要約すると次のとおりである。

① 特性方程式の固有ベクトルを選点での解の値で表わすことにより数値計算の簡易化が計られた。考察している系の基礎方程式と境界条件式が与えられれば, 式(6)~(9)のマトリックス $[A_1] \sim [b_1]$ および $[A_2] \sim [b_2]$ を用いることにより容易に特性方程式が得られる。

② 少ない内部選点数で十分正確な臨界荷重の算定が可能である。

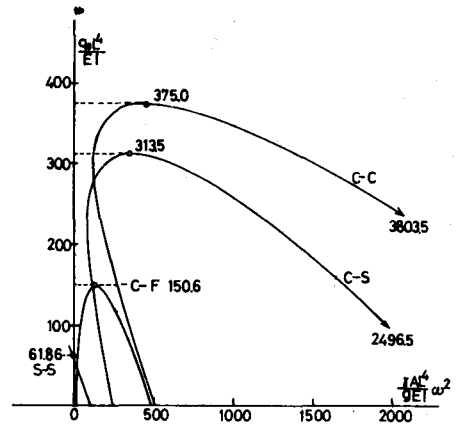


Fig-7 分存接線方向撓曲荷重を担う柱の固有値曲線 ($N=10$)

Table-2 臨界荷重の数値結果 ($\beta^* = \rho L^4 / EI$)

境界条件 \ 解法	直交選点法	差分法	ガーキン法
C-C	375.0	375.0	371.0
C-S	313.5	313.3	314.5
C-F	150.6	150.6	158.2
S-S	61.86	61.86	62.28

参考文献

- 1) Bolotin, V. V. "Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability" Pergamon Press, N.Y., 1963.
- 2) Leipholz, H. "Stability Theory" Academic Press, N.Y., 1970.
- 3) Leipholz, H. "Über die Betreibung der Ansatzfunktionen des Ritzschen und Galerkinschen Verfahrens von den Randbedingungen" Ingenieur-Archiv, vol. 36, pp. 251~261, 1967.
- 4) Hauger, W. "Die Knicklasten elastischen Stäbe unter gleichmäßig verteilten und linear veränderlichen tangential Druckkräften, Ingenieur-Archiv, 35, pp. 221~229, 1966.
- 5) Hauger, W. und Leonhard, M. "Untersuchung zur Genauigkeit des Galerkinschen Verfahrens anhand exakter Knicklasten elastischer Stäbe unter nichtkonservativer Belastung" Der Stahlbau, H. 6, pp. 169~174, 1978.
- 6) 杉山吉彦他 "差分法による柱の非保存的弾性不安定の研究" 日本機械学会論文集, 37巻, 295号, pp. 455~461, 1971.
- 7) Mote, C.D. Jr., "Nonconservative Stability by Finite Element" ASCE, Vol. 97, No. EH3, pp. 645~656, 1971.
- 8) Barsaam, R.S. "Finite element method applied to the problem of a non-conservative system" Int. J. Num. Meth. Engng, vol. 3, pp. 63~87, 1971.
- 9) Kikuchi, F. "Finite element method for non-self-adjoint Problems", Int. J. Num. Meth. Engng, vol. 6, pp. 39~54, 1973.
- 10) 会田忠義他 "変形法による骨組構造物の非保存的弾性安定解析" 土木学会論文集, No. 263, pp. 34~44, 1977.
- 11) Finlayson, B.A. "The Method of Weighted Residual and Variational Principles" Academic Press, N.Y., 1972.