

I — 6 等分布荷重を受ける薄肉梁の断面形状による弾性不安定について

北海道大学 工学部 正 員 能 町 純 雄
北海道大学 工学部 正 員 角 田 与史雄
北海道大学 工学部 学生員 ○高 橋 義 裕

1. まえがき

最近構造物の軽量化とともにスレンダーな断面部材の使用頻度が高まっており、これら薄肉断面部材に関する全体のおよび局部的座屈強度の検討が理論的ならびに実験的に行なわれており大きな工学的成果をあげている。しかし、これらの検討は、座屈の原因となる座屈前応力分布が部材軸方向に一定で、部材幅方向にのみ変化する分布状態での座屈問題に集中している。⁽¹⁾⁻⁽²⁾ 一方、鉄道橋、クレーンガーダ等に見られる様に上フランジに直接荷重が載荷される様な場合では、座屈前応力分布が二次元的に変化し、かつすべての二次元応力成分を含む座屈問題となり、解析が非常に複雑となるため実験的研究に主力が注がれており、耐荷力としての研究が進められている。⁽³⁾

フランジを有しない周辺単純支持平板の片側上縁に直接荷重が載荷された場合の弾性座屈の研究としてZetlin⁽⁴⁾、White⁽⁵⁾、Rockey⁽⁶⁾、Khan⁽⁷⁾らの研究を挙げることができる。また、一様圧縮、一様曲げ、さらに一様残留応力を考慮しての座屈解析も有限帯板法等の解析手法により広範囲にわたり行なわれ興味ある結果が得られている。しかし、フランジを有する薄肉断面部材の上縁に等分布荷重が作用する場合のように部材軸方向にも部材幅方向にも二次元的に変化する座屈前応力分布に対する座屈問題は、まだ十分に解析されていない様である。本論文では、すべての二次元応力分布を座屈前応力とする帯板要素の要素式を設定し、これを用いて等分布上縁載荷を受ける、I-型、L-型、T-型の各断面形に対しての弾性座屈について検討したものである。

2. 解析方法

解析には、有限帯板法 (F.S.M.)を用いた。いまFig-1(a)で示される幅 b 、長さ l 、板厚 t の帯板要素において、(b)で示される座屈前応力分布 $\{\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*\}$ が作用し、(c)で示される境界断面力 $\{T, S, Q, M\}$ とで釣合っており、対応する境界変位を $\{u, v, w, \theta\}$ とするととき帯板要素の全ポテンシャルエネルギー π は次のようになる。

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} D \int_0^l \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \\ & - \frac{1}{2} N \int_0^l \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (1-\nu) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ & - \frac{1}{2} t \int_0^l \int_0^b \sigma_x^* \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy \\ & - \frac{1}{2} t \int_0^l \int_0^b \sigma_y^* \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ & - t \int_0^l \int_0^b \tau_{xy}^* \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dx dy \\ & - \int_0^l \left\{ (T_{x=0}) u + (S_{y=0}) v + (Q_{y=0}) w + (M_{x=0}) \theta \right. \end{aligned}$$

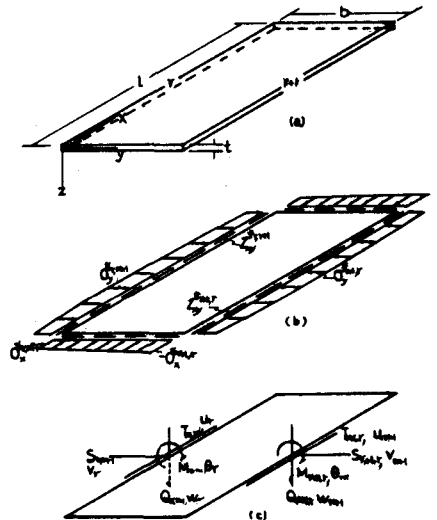


Fig-1

$$+ (T_{x=l}) u + (S_{y=l}) v + (Q_{y=l}) w + (M_{x=l}) \theta \} dx \quad \text{ここで } D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad N = \frac{Et}{1-\nu^2} \quad \text{である。}$$

次に帯板要素内の座屈前応力分布 $\{\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*\}$ および座屈変形により生ずる面外変位 w 、面内変位 u, v の分布を短辺方向 y に対し、次の様に仮定する。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \tau_{xy}^* \end{Bmatrix} = (1-\eta) \begin{Bmatrix} \sigma_x^{*,r+1} \\ \sigma_y^{*,r+1} \\ \tau_{xy}^{*,r+1} \end{Bmatrix} + \eta \begin{Bmatrix} \sigma_x^{*,r+1,r} \\ \sigma_y^{*,r+1,r} \\ \tau_{xy}^{*,r+1,r} \end{Bmatrix} \quad \text{----- (2-a)}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3\eta^2+2\eta^3 & \eta-2\eta^2+\eta^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \\ b\theta_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\eta^2-2\eta^3 & -\eta^2+3\eta^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r+1} \\ v_{r+1} \\ w_{r+1} \\ b\theta_{r+1} \end{Bmatrix} \quad \text{----- (2-b)}$$

ここで $\eta = y/b$ 、 $\sigma_x^{*,r+1}$ 、 $\sigma_y^{*,r+1}$ 、 $\tau_{xy}^{*,r+1}$ 、 u_r 、 v_r 、 w_r 、 $b\theta_r$ 等は、帯板要素の節線 r および $r+1$ に作用する座屈前応力分布、境界変位である。式(2-a)、(2-b)を式(1)に代入し、それぞれの境界変位により変分をとれば対応する境界断面力の式が次の様に得られる。

式(3)で与えられるマトリックス係数 A_{11} 、 A_{12} 、 $\dots$ 、 A_{88} 等の内容については、省略するが、 x についての微分を含む形で与えられる。いま x 軸方向の境界条件を両端単純支持とすることにより各境界断面力と対応する境界変位および座屈前応力分布をフーリエ級数展開することができ、有限フーリエ変換によりそれぞれのフーリエ係数で与えられる帯板要素の要素剛性方程式が次の様に得られる。

$$\begin{Bmatrix} T_{r,r+1} \\ S_{r,r+1} \\ Q_{r,r+1} \\ M_{r,r+1} \\ T_{r+1,r} \\ S_{r+1,r} \\ Q_{r+1,r} \\ \dot{M}_{r+1,r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & A_{15} & A_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & A_{25} & A_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & A_{37} & A_{38} \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & 0 & 0 & A_{47} & A_{48} \\ A_{51} & A_{52} & 0 & 0 & A_{55} & A_{56} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & 0 & 0 & A_{65} & A_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{73} & A_{74} & 0 & 0 & A_{77} & A_{78} \\ 0 & 0 & A_{83} & A_{84} & 0 & 0 & A_{87} & A_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \\ \theta_r \\ u_{r+1} \\ v_{r+1} \\ w_{r+1} \\ \theta_{r+1} \end{Bmatrix} \quad \text{----- (3)}$$

$$\{f\}_e = [K] \{\delta\}_e - \lambda [K^G] \{\delta\}_e \quad \text{----- (4)}$$

ここで $\{f\}_e$ ：要素境界断面力ベクトル、 $[K]_e$ ：要素剛性マトリックス、 $\{\delta\}_e$ ：要素境界変位ベクトル、 $[K^G]_e$ ：要素安定係数マトリックス、 λ ：座屈荷重強度を与える指標である。要素安定係数マトリックスは、要素剛性マトリックスを用いて作用荷重に対する応力分布を求め、この応力分布を座屈前応力分布として組み立てる。次に要素剛性方程式を全要素にわたり重ね合わせることににより系全体の剛性方程式が得られる。すなわち

$$\{f\} = [K] \{\delta\} - \lambda [K^G] \{\delta\} \quad \text{----- (5)}$$

従って、座屈問題は、式(5)の安定限界を求めることなので

$$\{0\} = ([K] - \lambda [K^G]) \{\delta\} \quad \text{----- (6)}$$

となり $\{\delta\} \neq 0$ より $|[K] - \lambda [K^G]| = 0$ の固有方程式を得、 λ は、その固有値として求め、座屈変形モードは、その固有ベクトルとして求まる。

3. 数値計算

単純支持薄肉断面材として、I型断面、L型断面、T型断面の3種断面をとりあげ、等分布上縁載荷によって弾性座屈をする場合について、その断面形状および部材長等と座屈係数との関係を明らかにするため数値計算を行ないパラメトリックな検討を行なった。パラメータとしては、Fig-2で示される断面諸元と部材長 l とに対し、 l/H 、 H/t_f 、 B/H を用いた。ここで $t_f = t_w$ とした。また、分割数はすべての断面についてフランジ幅 B を2分割、ウェブ高さ H を8分割とした。

Fig-3で示される
座屈係数 k は

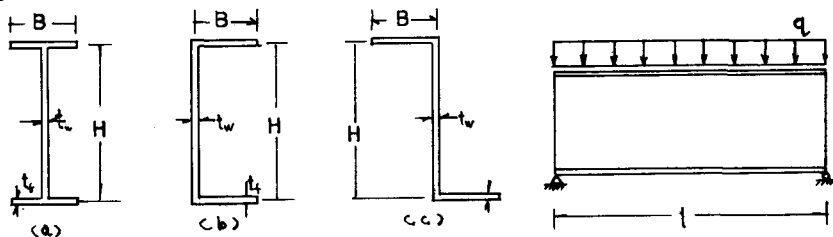


Fig-2

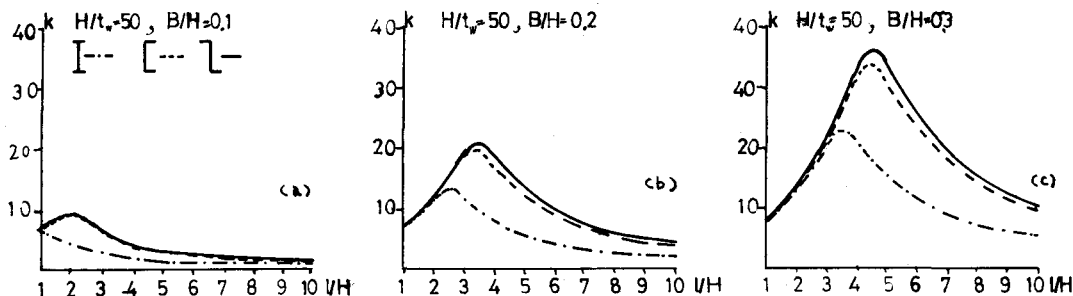


Fig-3

$$q_{cr} = k \frac{D_w \pi^2}{l^2} \quad D_w = \frac{E t_w^3}{12(1-\nu^2)} \quad (7)$$

の表現式で整理したもので、Fig-5で示される座屈係数 k' は

$$\frac{q_{cr}}{t_w} = k' \frac{E \pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_w}{H} \right)^3 \quad (8)$$

の表現式で整理したものである。ここに k と k' の間には、 $k = (1/H)^2 k'$ の関係がある。

Fig-3は $H/t_w = 50$ とし、 B/H 、 $1/H$ をパラメータにとり、縦軸に座屈係数 k 、横軸に $1/H$ をとりプロットしたものである。Fig-4は、Fig-3(c)に対する各断面形についての座屈モードを示したものである。Fig-3とFig-4よりプロットされた曲線のピーク値より左側の領域では、フランジとウェブの接

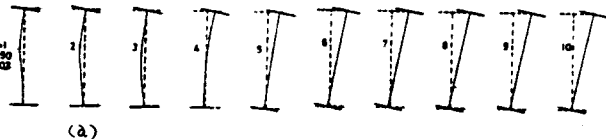
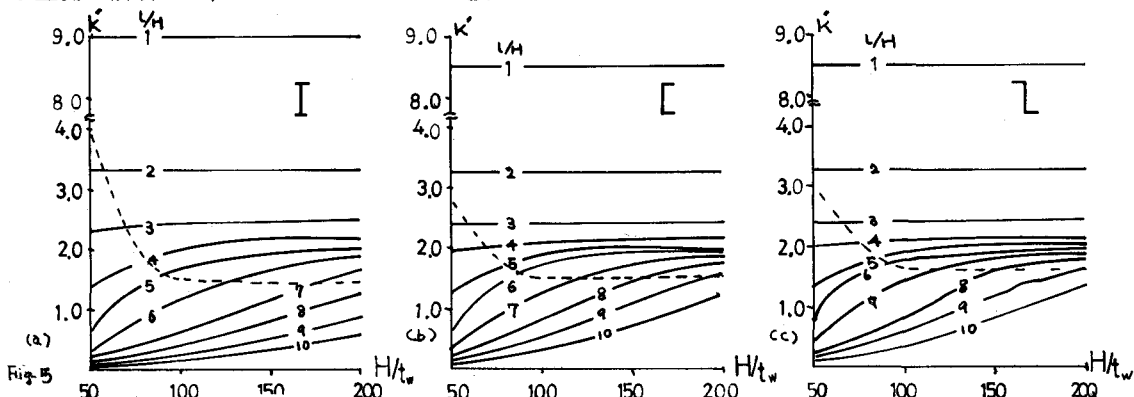


Fig-4



合部の移動はほとんど見られないウェブの局部座屈が支配的な領域であり、右側の領域では、上述接合部の移動が見られる全体座屈が支配的な領域であることが分かる。ウェブ座屈が支配的な領域において

は断面形状による座屈係数 k の差異はほとんどみられない。しかし全体座屈領域においてはI-型断面は他の2つの断面に比べてその座屈係数の値は、約半分である。これは、I-型断面の場合同じ B/H に対し片側張出し幅の大きさが他の断面の張出し幅の半分となっているためと思われる。また同じ張出し幅を有するL-型断面と[-型断面の場合は、 B/H の値が小さい領域では、両者の座屈係数に差異はほとんど見られず、 B/H が大きくなるに従いその座屈係数に差が生じ、L-型断面の座屈係数の方が[-型断面の座屈係数の約1割大きくなっている。

Fig-5は、 $B/H=0.3$ とし、各断面について $1/H$ と H/t_w をパラメータにとり縦軸に式(8)で示される座屈係数 k 、横軸に H/t_w をとりプロットしたものである。Fig-4で示される座屈変形モードより横軸に平行な部分は、ウェブの局部座屈が支配的な部分であり、右上がりの部分は全体座屈が支配的な部分である。 $1/H$ が1または2のように部材長がウェブ高さと同じかやや大きい形状では、 H/t_w の値が変化しても座屈係数 k は、どの断面形状においてもほぼ一定値を保っている。したがって式(8)よりウェブ高さ H を一定とした場合その座屈荷重 q_{cr} は t_w の3乗に比例し、また逆に t_w を一定とした場合には H の2乗に逆比例することになる。また、図中に引かれている破線は、各断面についてFig-3で示されるグラフ(Fig-3では $H/t_w=50$ の場合しか示されていない)のピーク値より求めたものである。従ってこの破線より上の領域ではウェブ座屈が、下の領域では全体座屈が支配的であることを示している。このことより与えられた H/t_w と $1/H$ を有する部材が局部座屈を生ずる可能性があるか、全体座屈を生ずる可能性があるかを判断することができる。

4. あとがき すべての二次元応力分布を座屈前応力とする帯板要素の要素剛性方程式を設定し等分布上縁載荷を受ける薄肉断面部材の弾性座屈に関する解析を行なった。要素分割は、ウェブ部を8分割、フランジ部を2分割とした。パラメータとして、 $1/H$ 、 B/H 、 H/t_w を用いた。また、本計算では $t_f=t_w$ とした。その結果を要約すると次のようになる。1). 局部座屈領域と全体座屈領域とを分けるパラメータとして B/H の値が大きく関係している。局部座屈領域においては、断面形状によらずその座屈係数 k はほぼ同一となっている。このことは、局部座屈領域においては、そのフランジ幅(張出し幅)の影響が座屈係数 k に対しほとんどないことを示している。また全体座屈領域では、同一の B/H に対し、その座屈係数 k の値は、I-型断面の場合は、[-型断面、L-型断面の約半分である。また[-型断面とL-型断面の座屈係数 k を比べてみるとL-型断面のその方が約1割くらい大きくなっている。2). $1/H$ が1~2の場合、つまり部材長がウェブ高さと同じかやや大きい形状では、ウェブ高さ H が一定の場合は q_{cr} は t_w の3乗に比例し、また逆に t_w を一定とした場合には H の2乗に逆比例する。このことは、I-型断面、[-型断面、L-型断面のいずれについてもいえる。

数値計算は、北海道大学大型計算機センターのFACOM 230-75およびHITAC M-180を使用した。

(参考文献)

- 1) 吉田一郎：帯板要素による座屈解析、日本造船学会論文集、第130号、pp. 161~171、1971年
- 2) 吉田 博：H型鋼柱の局部座屈と曲げ座屈強度、土木学会論文報告集、第243号、pp. 19~32、1975年11月
- 3) Bergfelt, A. : Studies and tests on slender plate girdes without stiffeners, I A B S E, Colloquium, pp. 67~82, 1971
- 4) Zetlin, L. : Elastic instability of flat plates subjected to partial edge loads, Pros. of A. S. C. E., Vol. 81, Paper No.795, pp.795-1~795-24, 1955
- 5) White, R. N., and Cottingham, W. S. : Stability of partial edge loadings, Pros. of A. S. C. E., No. EM5, pp. 67~85, Oct., 1962
- 6) Rockey, K. C. and Bagchi, D. K. : Buckling of plate girder webs unde partial edge loadings, Int. J. mech. Sci., Vol.12, pp. 61~76, 1970
- 7) Khan, M. Z., Johns, K. C. and Hayman, B. : Buckling of plates with partially loaded edges, Pros. of A. S. C. E., No.ST3, pp.543~558, Mar. 1977