

I-4 偏心荷重による吊橋の立体解析と構造特性

北海道大学工学部 正員 渡辺 昇
 北海道大学工学部 正員 ○佐藤 浩一
 本州四国連絡橋公団 正員 大島 久

1. まえがき

偏心荷重による図-1のような吊橋の立体解析は種々なされているが、その場合塔頂における塔とケーブルとの結合状態は図-2(a)のようにローラ結合として解析している。図-2(b)のようにピン(ヒンジ)結合として解析した例は文献(4)で示されている。また、図-2(c)のような塔頂に作用する圧縮力Nを考慮した例は文献(5)で示されている。

本報告はローラ結合とピン結合との構造上の差が吊橋構造全体にどのような影響を及ぼすかを中心に解析するものである。解析法としては荷重項を含んだ形で剛性マトリックスを誘導し、要素数を少なくして解析する。比較した項目は次の通りである。

- (1) 曲げ解析と立体解析との比較
- (2) 塔の変形を無視した場合(ローラ結合)と考慮した場合(ピン結合)との比較
- (3) 塔頂に作用する圧縮力Nを無視した場合と考慮した場合との比較
- (4) 塔の斜材を無視した場合と考慮した場合との比較
- (5) ケーブルの温度変化を無視する場合と考慮する場合との比較

上記の項目について、ケーブルの最大付加水平張力、塔頂の最大水平変位、補剛桁の最大たわみ図、補剛桁の最大曲げモーメント図、補剛桁の最大ねじり角図、補剛桁の最大曲げねじりモーメント図を示すものである。

2. 吊橋の微分方程式

- (イ) ローラ結合の場合の微分方程式は文献(1)のものを用いた。
 (ロ) ピン結合の場合の微分方程式は文献(5)の(2n+2)本の式を用いた。

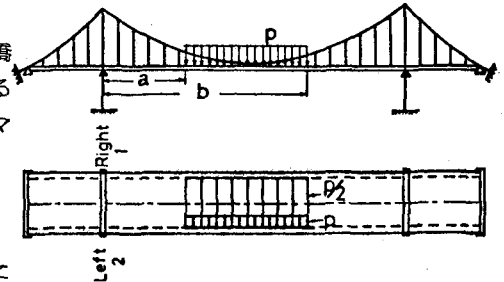


Fig.-1 吊橋の偏心荷重

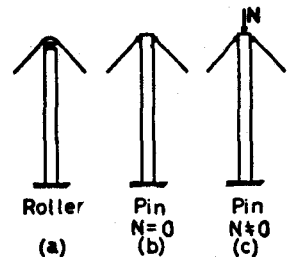


Fig.-2

$$EI \cdot V''(x) - (H_1 + H_2) \cdot V'(x) + (H_1 - H_2) \cdot e \cdot \theta''(x) = p(x) + \sum_{k=1}^n (H_{p1k} + H_{p2k}) \cdot y_k'' \quad \dots (1)$$

$$EC_M \cdot \theta''(x) - GI_T \cdot \theta'(x) - (H_1 + H_2) \cdot e^2 \cdot \theta''(x) + (H_1 - H_2) \cdot e \cdot V'(x) = m_T(x) + p(x) \cdot e - \sum_{k=1}^n (H_{p1k} - H_{p2k}) \cdot e \cdot y_k'' \quad \dots (2)$$

$$H_{pij} \frac{L_{cj}}{E_c A_c} + y_j'' \int_0^{l_j} V_i(x_j) dx_j \pm \alpha_T \cdot \Delta T \cdot L_{Tj} \quad \dots (3.1)$$

$$= (H_{p1j-1} - H_{p1j}) \times G_{11}(j) + (H_{p2j-1} - H_{p2j}) \times G_{21}(j) + (H_{p1j+1} - H_{p1j}) \times G_{11}(j+1) + (H_{p2j+1} - H_{p2j}) \times G_{21}(j+1) \quad \dots (3.2n)$$

以上の諸式において特別の指示のない記号は文献(3),(4)の記号を用いた。また、ローラ結合とピン結合との相互関係、 H_{pij} の求め方、および剛性マトリックスの求め方は文献(4)を参照されたい。

3. 数値計算例 図-3のような現在計画中の本州四国連絡橋の因島大橋を例にとつた。

3.1 断面諸元

主構幅=26m, $E=2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$, $E_c=2.0 \times 10^7 \text{ t/m}^2$,
 $G=8.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$, $H_g=19372 \text{ t/Br.}$,
 $A_c=0.4562 \text{ m}^2/\text{Br.}$, $f_1=f_3=7.559\text{m}$, $f_2=76 \text{ m}$,
 死荷重 $g_1=g_3=21.09 \text{ t/m}$, $g_2=20.31 \text{ t/m}$,
 $I_1=I_3=4.216 \text{ m}^4/\text{Br.}$, $I_2=4.904 \text{ m}^4/\text{Br.}$,
 $J_1=J_3=2.9011 \text{ m}^4/\text{Br.}$, $J_2=4.1691 \text{ m}^4/\text{Br.}$, $C_{M1}=C_{M3}=786.353 \text{ m}^6/\text{Br.}$, $C_{M2}=648.876 \text{ m}^6/\text{Br.}$.
 主塔は図-4のような変断面とした。

線荷重と等分布荷重は図-6のように载荷した。

図-5における左側塔頂に $P=1\text{ton}$ が作用した時の左右の塔頂水平変位を表-1に示してある。表-1のLeftは式(3)の $G_{2i}(j)$ であり, Rightは式(3)の $G_{1i}(j)$ を示している。

3.2 载荷幅

最初に各種の影響線(付加水平張力, 塔頂水平変位, たわみ, 曲げモーメント, ねじり角, 曲げねじりモーメント等の影響線)を求め, 最大あるいは最小となる橋軸方向の载荷幅の基準を決め, その前後の数種類の载荷幅を用いて計算し, その中で最大あるいは最小となるものをそれぞれ最大値あるいは最小値とした。

このようにして求めた载荷幅の一例は図-7の通りである。

CASE 1 は側径間中央点のたわみ, 曲げモーメント, ねじり角, 曲げねじりモーメントの最大値, また, 塔頂水平変位の最小値を求める場合の载荷状態である。

CASE 2 は側径間中央点のたわみ, 曲げモーメント, ねじり角, 曲げねじりモーメントの最小値, また, 塔頂水平変位の最大値を求める载荷状態である。CASE 3 は中央径間 $0.2 l_2$ 点の曲げモーメントの最大値を求める载荷状態である。CASE 4 は中央径間

$0.2 l_2$ 点の曲げモーメントの最小値を求める载荷状態である。CASE 5 は中央径間 $0.3 l_2$ 点のたわみの最大値を求める载荷状態である。CASE 6 は中央径間 $0.3 l_2$ 点のたわみの最小値を求める载荷状態である。CASE 7 は中央径間中央点 $0.5 l_2$ 点のねじり角の最大値を求める载荷状態である。CASE 8 はケーブルの付加水平張力の最大値を求める载荷状態である。その他の载荷状態も同様に求まるが, ここでは省略する。なお, ケーブルの付加水平張力を求める場合にLagrangeの補間公式を用い, 精度は

$\epsilon = 10^{-4}$ とした。この精度で判定した後には前述の数種類の载荷幅を用いて計算し, その中で各種の最大あるいは最小となるものをそれぞれ最大値あるいは最小値とした。

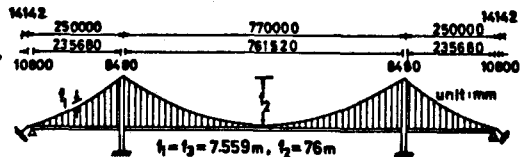
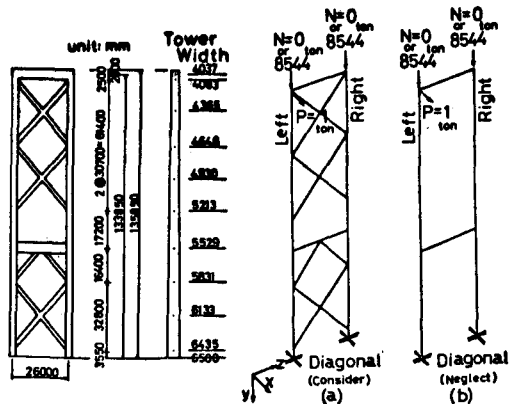


Fig. -3 因島大橋の一般図



3. 3 因島大橋の構造特性

前節で決定した載荷幅を用いて、最大付加水平張力、最大塔頂水平変位、最大たわみ図、最大曲げモーメント図、最大ねじり角図、最大曲げねじりモーメント図等を求める。図中あるいは表中で D は死荷重を表わし、L は活荷重を表わしている。また、A は曲げ解析を表わし、B は立体解析を表わしている。ケーブルの温度変化は $\pm 30^{\circ}\text{C}$ とする。

(イ) 最大付加水平張力

表一2,3はケーブルの温度変化のみによる水平張力の変化を示したものである。表一4,5は付加水平張力の最大値を示したものである。

D+L-30°C で最大となる。

Increments of Horizontal Cable Tension				
D+30°C				
	Roller	Side Span	Center Span	Side Span
Diagonal (Consider)	Pin N=0 ton	-119.3	-119.3	-119.3
	Pin N=8544 ton	-127.1	-118.8	-127.1
Diagonal (Neglect)	Pin N=0 ton	-119.9	-119.3	-119.9
	Pin N=8544 ton	-127.0	-118.8	-127.0
		-119.8	-119.3	-119.8

Table-2 unit: tons

Increments of Horizontal Cable Tension				
D-30°C				
	Roller	Side Span	Center Span	Side Span
Diagonal (Consider)	Pin N=0 ton	121.8	121.8	121.8
	Pin N=8544 ton	129.6	121.3	129.6
Diagonal (Neglect)	Pin N=0 ton	122.4	121.8	122.4
	Pin N=8544 ton	129.5	121.2	129.5
		122.3	121.8	122.3

Table-3 unit: tons

Increments of Horizontal Cable Tension (Left) (Maximum)					
CASE 8 D+L-30°C					
			Side Span	Center Span	Side Span
		Roller	A	1848.1	1848.1
			B	1766.8	1766.8
Diagonal (Consider)	Pin N=0 ton	A	1845.2	1848.3	1845.2
		B	1759.4	1768.9	1759.4
	Pin N=8544 ton	A	1847.8	1848.1	1847.8
		B	1761.3	1768.6	1761.3
Diagonal (Neglect)	Pin N=0 ton	A	1845.2	1848.3	1845.2
		B	1759.9	1768.7	1759.9
	Pin N=8544 ton	A	1847.9	1848.1	1847.9
		B	1761.7	1768.5	1761.7

Table-4 unit: tons

Increments of Horizontal CASE 8 Cable Tension (Right) (Maximum) D+L -30°C						
			Side Span	Center Span	Side Span	
		Roller	A	1848.1	1848.1	1848.1
			B	1532.8	1532.8	1532.8
Diagonal (Consider)	Pin N=0 ton	A	1845.2	1848.3	1845.2	
		B	1537.0	1531.0	1537.0	
	Pin N=8544 ton	A	1847.8	1848.1	1847.8	
		B	1538.1	1531.0	1538.1	
Diagonal (Neglect)	Pin N=0 ton	A	1845.2	1848.3	1845.2	
		B	1536.6	1531.2	1536.6	
	Pin N=8544 ton	A	1847.9	1848.1	1847.9	
		B	1537.7	1531.2	1537.7	

Table-5 unit: tons

以上の数値より、ケーブルの温度変化のみによる水平張力の変化は $+30^{\circ}\text{C}$ で約120 tons減少する。また、曲げ解析と立体解析とでは多少差異が生ずるが、塔とケーブルとの結合状態の差によつてはほとんど差異が生じない。

(ロ) 最大塔頂水平変位

CASE 1 の場合の D+L-30°C と CASE 2 の場合の D+L+30°C とのうちで最大の方が塔頂の最大水平変位となる。この例では後者の方が最大となり、その値は曲げ解析で約33cm、立体解析で左側塔頂で約31cm、右側塔頂で約29cmの塔頂水平変位が生ずる。なお、塔頂水平変位が側径間の方向に変位する場合を負とし、中央径間の方向に変位する場合を正とする。表一6,7 に示してある。

Horizontal Displacements of Main Tower (Minimum)				
CASE 1 D+L-30°C				
	Tower Top	A	B	
Diagonal (Consider)	Roller	Right	0.0000	0.0000
		Left	0.0000	0.0000
	Pin N=0 ton	Right	-0.2360	-0.2144
		Left	-0.2360	-0.2207
Diagonal (Neglect)	Pin N=8544 ton	Right	-0.2388	-0.2170
		Left	-0.2388	-0.2234
	Pin N=0 ton	Right	-0.2360	-0.2145
		Left	-0.2360	-0.2208
		Right	-0.2389	-0.2170
		Left	-0.2389	-0.2234

Table-6 unit: m

Horizontal Displacements of Main Tower (Maximum)				
CASE 2 D+L+30°C				
	Tower Top	A	B	
Diagonal (Consider)	Roller	Right	0.0000	0.0000
		Left	0.0000	0.0000
	Pin N=0 ton	Right	0.3273	0.2920
		Left	0.3273	0.3108
Diagonal (Neglect)	Pin N=8544 ton	Right	0.3307	0.2952
		Left	0.3307	0.3140
	Pin N=0 ton	Right	0.3273	0.2920
		Left	0.3273	0.3109
		Right	0.3308	0.2952
		Left	0.3308	0.3141

Table-7 unit: m

(ハ) 補剛桁のたわみと曲げモーメント

曲げ解析と立体解析とを比較しながら図示すれば図-8 から図-13 のようになる。

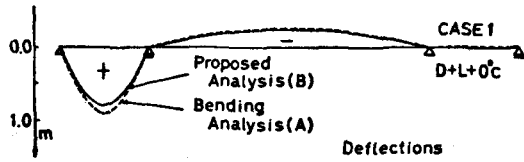


Fig. -8 0.5 l_1 点の最大たわみ

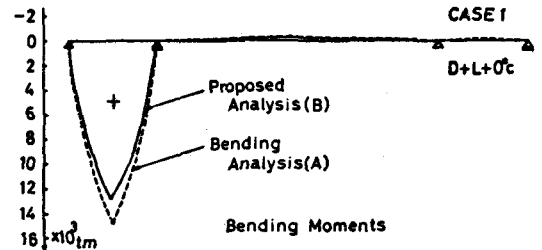


Fig. -11 0.5 l_1 点の最大曲げモーメント

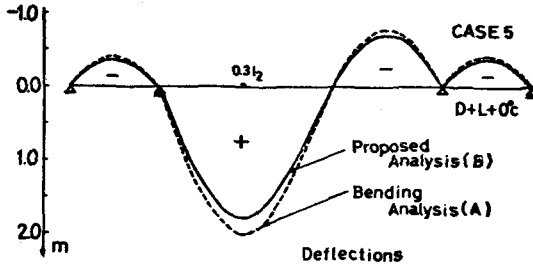


Fig. -9 0.3 l_2 点の最大たわみ

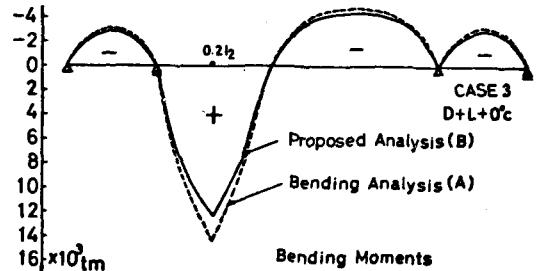


Fig. -12 0.2 l_2 点の最大曲げモーメント

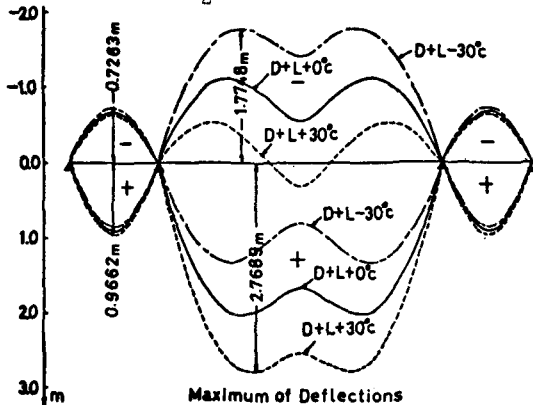


Fig. -10 最大たわみ図

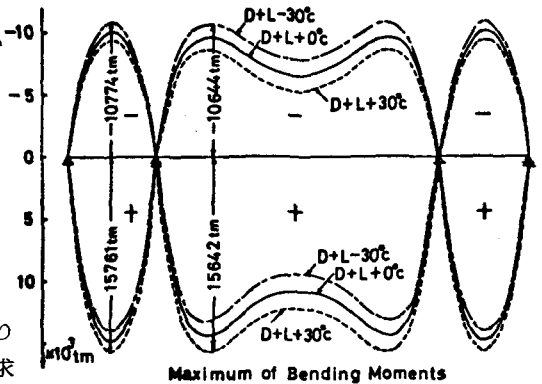


Fig. -13 最大曲げモーメント図

図-8 より側径間中央点のたわみの最大値が求まり、図-9 より中央径間 0.3 l_2 点のたわみの最大値が求まる。同様に、各点の最大値と最小値を求めれば図-10 のようになる。図-11 より側径間中央点の曲げモーメントの最大値が求まり、図-12 より中央径間 0.2 l_2 点の曲げモーメントの最大値が求まる。同様に、各点の最大値と最小値を求めれば図-13 のようになる。以上の図より曲げ解析と立体解析とを比較すればたわみ、曲げモーメントとも多少差異が生ずることがわかる。また、たわみ、曲げモーメントともケーブルの温度変化によつてかなり影響をうけることがわかる。また、塔とケーブルとの結合状態の差によつてたわみおよび曲げモーメントともほとんど差異が生じない。

(二) 補剛桁のねじり角と曲げねじりモーメント

立体解析によるねじり角と曲げねじりモーメントの側径間中央点と中央径間中央点の最大値と最小値を表示したのが表-8 から表-15 である。ねじり角の各点の最大値と最小値を同様に求めて図示すれば図-14 のようになる。曲げねじりモーメントの各点の最大値と最小値を同様に求めて図示すれば図-15 のようになる。以上の表および図よりわかるように、ケーブルの温度変化による影響はほとんどないことがわかる。また、塔とケーブルとの結合状態の差によつてねじり角および曲げねじりモーメントともほとんど差異が生じない。

0.5 $\frac{1}{2}$ θ - Maximum
(Positive)

		D+L+30°C	D+L+0°C	D+L-30°C
	Roller	1.8241	1.8220	1.8198
Diagonal (Consider)	Pin N=0 ton	1.8016	1.7996	1.7975
	Pin N=8544 ton	1.8031	1.8012	1.7991
Diagonal (Neglect)	Pin N=0 ton	1.8032	1.8011	1.7990
	Pin N=8544 ton	1.8047	1.8027	1.8007

unit : $\times 10^3$ Radian

Table-8

0.5 $\frac{1}{2}$ θ - Minimum
(Negative)

		D+L+30°C	D+L+0°C	D+L-30°C
	Roller	-0.6942	-0.6878	-0.6815
Diagonal (Consider)	Pin N=0 ton	-0.6471	-0.6409	-0.6346
	Pin N=8544 ton	-0.6492	-0.6433	-0.6373
Diagonal (Neglect)	Pin N=0 ton	-0.6505	-0.6442	-0.6380
	Pin N=8544 ton	-0.6527	-0.6467	-0.6407

unit : $\times 10^3$ Radian

Table-9

0.5 $\frac{1}{2}$ θ - Maximum
(Positive)

		D+L+30°C	D+L+0°C	D+L-30°C
	Roller	5.9127	5.9747	6.0364
Diagonal (Consider)	Pin N=0 ton	5.7844	5.8478	5.9107
	Pin N=8544 ton	5.7919	5.8554	5.9186
Diagonal (Neglect)	Pin N=0 ton	5.7936	5.8568	5.9197
	Pin N=8544 ton	5.8012	5.8646	5.9276

unit : $\times 10^3$ Radian

Table-10

0.5 $\frac{1}{2}$ θ - Minimum
(Negative)

		D+L+30°C	D+L+0°C	D+L-30°C
	Roller	-0.4871	-0.4806	-0.4742
Diagonal (Consider)	Pin N=0 ton	-0.4545	-0.4484	-0.4424
	Pin N=8544 ton	-0.4566	-0.4505	-0.4445
Diagonal (Neglect)	Pin N=0 ton	-0.4568	-0.4507	-0.4447
	Pin N=8544 ton	-0.4589	-0.4529	-0.4468

unit : $\times 10^3$ Radian

Table-11

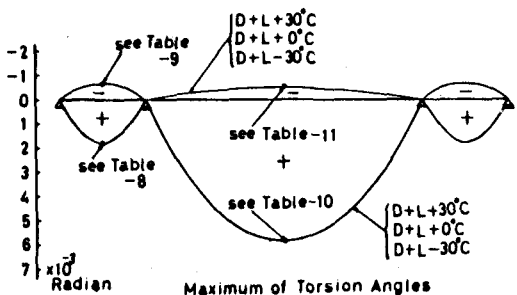


Fig.-14 最大ねじり角図

0.5 $\frac{1}{2}$ M_w - Maximum
(Positive)

		D+L+30°C	D+L+0°C	D+L-30°C
	Roller	7496.7	7489.7	7482.6
Diagonal (Consider)	Pin N=0 ton	7438.2	7431.5	7424.6
	Pin N=8544 ton	7442.1	7435.7	7429.2
Diagonal (Neglect)	Pin N=0 ton	7442.3	7435.5	7428.6
	Pin N=8544 ton	7446.2	7439.8	7433.2

unit : tm^2

Table-12

0.5 $\frac{1}{2}$ M_w - Minimum
(Negative)

		D+L+30°C	D+L+0°C	D+L-30°C
	Roller	-1760.9	-1743.3	-1725.6
Diagonal (Consider)	Pin N=0 ton	-1641.8	-1624.5	-1607.1
	Pin N=8544 ton	-1646.9	-1630.4	-1613.8
Diagonal (Neglect)	Pin N=0 ton	-1650.4	-1633.0	-1615.6
	Pin N=8544 ton	-1655.6	-1639.0	-1622.4

unit : tm^2

Table-13

0.5 $\frac{1}{2}$ M_w - Maximum
(Positive)

		D+L+30°C	D+L+0°C	D+L-30°C
	Roller	4857.2	4858.5	4859.7
Diagonal (Consider)	Pin N=0 ton	4848.8	4850.2	4851.5
	Pin N=8544 ton	4849.3	4850.7	4852.0
Diagonal (Neglect)	Pin N=0 ton	4849.4	4850.8	4852.1
	Pin N=8544 ton	4849.9	4851.3	4852.6

unit : tm^2

Table-14

0.5 $\frac{1}{2}$ M_w - Minimum
(Negative)

		D+L+30°C	D+L+0°C	D+L-30°C
	Roller	-812.5	-800.3	-788.2
Diagonal (Consider)	Pin N=0 ton	-825.7	-813.3	-801.1
	Pin N=8544 ton	-824.9	-812.5	-800.2
Diagonal (Neglect)	Pin N=0 ton	-824.7	-812.4	-800.2
	Pin N=8544 ton	-823.9	-811.6	-799.3

unit : tm^2

Table-15

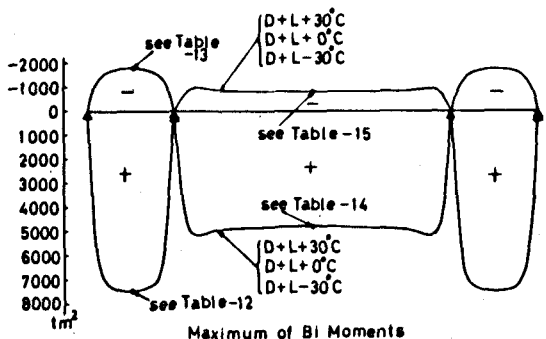


Fig.-15 最大曲げねじりモーメント図

4. あとがき

本報告の特徴と結論は次の通りである。

4. 1 本報告の理論および解析の特徴

- (イ) 塔の変形を考慮した曲げ解析と立体解析は著者らの誘導したケーブル条件式を用いた。
- (ロ) 従来の解析理論(ローラ結合)では曲げ解析および立体解析とも塔頂水平変位は生じないものとしていたが、本解析理論(ピン結合)では塔頂水平変位が生ずるものとしている。
- (ハ) 曲げ解析と立体解析との微分方程式の相互関係を明確にすることができた。
- (ニ) 三径間単純吊橋を例にとれば、塔の変形を無視した従来の曲げ解析ではケーブルに関して一次不静定構造物としているが、塔の変形を考慮した場合の本報告による曲げ解析ではケーブルに関して三次不静定構造物としている。一方、塔の変形を無視した場合の従来の立体解析ではケーブルに関して二次不静定構造物としているが、塔の変形を考慮した場合の本報告による立体解析では六次不静定構造物として理論を組み立てているのが特徴である。
- (ホ) 解析法としては荷重項を含んだ形で剛性マトリックスを誘導しているので、要素の間に載荷された場合でも解析できる。従つて、要素数を極端に減少させて解析できる。この場合、付加水平張力算定時に必要な式(3)のたわみおよびねじり角の積分値はシンプソン公式を用いずに求めることができる。本計算例では、曲げ解析の場合には、側径間を一要素、中央径間を二要素で解析した。立体解析の場合には、側径間を二要素、中央径間を四要素で解析した。

4. 2 本報告の数値計算による結論

- (イ) 本報告で数値計算の結果により比較検討した項目は最大付加水平張力、最大塔頂水平変位、補剛桁の最大たわみ、補剛桁の最大曲げモーメント、補剛桁の最大ねじり角、補剛桁の最大曲げねじりモーメントである。なお、ケーブルの温度変化による各項目に及ぼす影響をも考慮した。
- (ロ) 上記の項目について、曲げ解析と立体解析とを比較すれば多少差異が生じている。
- (ハ) 上記の項目について、塔の変形を無視した場合(ローラ結合)と塔の変形を考慮した場合(ピン結合)とを比較すればほとんど差異が生じていない。この傾向は曲げ解析および立体解析に共通である。ただし、ローラ結合の場合は曲げ解析および立体解析とも塔頂水平変位は生じない。
- (ニ) 上記の項目について、塔頂に作用する圧縮力Nを無視した場合と考慮した場合とを比較すれば、ほとんど差異が生じていない。この傾向は曲げ解析および立体解析に共通である。
- (ホ) 上記の項目について、塔の斜材を無視した場合と考慮した場合とを比較すれば、ほとんど差異が生じていない。この傾向は曲げ解析および立体解析に共通である。
- (ヘ) 上記の項目の中で、ケーブルの温度変化の影響をうける項目は付加水平張力、塔頂水平変位、補剛桁のたわみと補剛桁の曲げモーメントであり、補剛桁のねじり角と補剛桁の曲げねじりモーメントはほとんど影響をうけない。

参考文献

- 1) Hawranek, A., u. Steinhardt, O. : Theorie und Berechnung der Stahlbrücken. Springer, 1958.
- 2) 渡辺 昇, 佐藤浩一, 戸田 久 : 多径間吊橋のねじりを考慮した剛性マトリックス解析法について。土木学会北海道支部論文報告集 第34号, 1978.
- 3) 佐藤浩一, 渡辺 昇, 大島 久 : 剛性マトリックス法による吊橋のねじり解析。土木学会第33回年次学術講演会講演概要集 第I部, 1978.
- 4) 渡辺 昇, 佐藤浩一 : 剛性マトリックス法による塔のねじれ変形を考慮した吊橋のねじり解析。土木学会北海道支部論文報告集 第35号, 1979.
- 5) 佐藤浩一, 渡辺 昇, 大島 久 : 塔の変形を考慮した吊橋の立体解析。土木学会第34回年次学術講演会講演概要集 第I部, 1979.

本計算は北海道大学大型計算機センターのFACOM 230-75 および HITAC M-180 を利用した。