

I-3 3次元弾性論に基づく扇形厚板の解析について

北見工業大学 正員 〇三宅和子
北見工業大学 正員 奥村 勇

1. まえがき

厚板の解析には Rissner の理論や Mindlin および Love の理論など数多く見受けられ、これらの理論に基づく研究も多く報告されている。しかし、厚板理論による解析には、変位あるいは応力成分に近似が入っていたり、境界条件が Saint-Venant の原理によって満足されている場合が多く、荷重直下部分や厚板周辺の境界では十分な精度の結果を得ることはあつかいといわれている。本研究は、中央に部分分布荷重を受け $\theta =$ 一定の 2 直線辺が単純支持され、 r が一定の 2 円弧辺が自由な扇形厚板を、厚板理論によらず、厳密な 3 次元弾性論に基づき解析し、扇形厚板の応力および変形状態を明らかにしたものである。また、3 次元弾性論の解に円筒座標系における拡張された Neuber の解を用い、有限円筒あるいは部分円筒殻の非軸対称問題を解析する際に有用な一般解を導出し、それを厚板解析に適用した。このような扇形厚板の 3 次元解析は、あまり見受けられないようである。

2. 変位ポテンシャル U と変位および応力成分

物体力がない場合の弾性体のつり合い方程式の解は、拡張された Neuber の解を用いることにより、変位ベクトルで次のように表わすことができる。

$$2GU = -\nabla^2 \Phi + 4(1-\nu)\Phi + 2\nabla \cdot \mathcal{U} \quad \text{----- (1)}$$

ここで、 $U = (U_r, U_\theta, U_z)$, $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_r, \mathcal{U}_\theta, \mathcal{U}_z)$,

$$\mathcal{U} = (0, 0, \mathcal{U}_z) \quad \text{----- (1-1)}$$

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \mathcal{U}_z = 0 \quad \text{----- (1-2)} \quad \nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{----- (1-3)}$$

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r + (1/r^2)\partial^2/\partial \theta^2 + \partial^2/\partial z^2 \quad \text{----- (1-4)}$$

G, ν はそれぞれせん断弾性係数およびポアソン比を表わす。

図-1 に示したように $\theta = 0$ で対称であることを考慮して、式(1-2)

および式(1-3)より変位ポテンシャルを求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_z &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos m\theta \{ J_m(\alpha_{mn}r) \{ A_{mn}'' \cosh \alpha_{mn}z + L_{mn}'' \sinh \alpha_{mn}z \} + Y_m(\alpha_{mn}r) \{ A_{mn}' \cosh \alpha_{mn}z + L_{mn}' \sinh \alpha_{mn}z \} \} \\ \Phi_\theta &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos m\theta \{ J_m(\alpha_{mn}r) \{ G_{mn}'' \sinh \alpha_{mn}z + M_{mn}'' \cosh \alpha_{mn}z \} + Y_m(\alpha_{mn}r) \{ G_{mn}' \sinh \alpha_{mn}z + M_{mn}' \cosh \alpha_{mn}z \} \} \\ \mathcal{U}_z &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin m\theta \{ J_m(\alpha_{mn}r) \{ B_{mn}'' \cosh \alpha_{mn}z + G_{mn}'' \sinh \alpha_{mn}z \} + Y_m(\alpha_{mn}r) \{ B_{mn}' \cosh \alpha_{mn}z + G_{mn}' \sinh \alpha_{mn}z \} \} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (2)}$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_r &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos m\theta \cos \beta_n z \{ D_{mn}'' I_m(\beta_n r) + D_{mn}' K_m(\beta_n r) \} \\ \Phi_\theta &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos m\theta \cos \beta_n z \left\{ \left(\frac{\beta_n}{r} \right) \{ F_{mn}'' I_{m-1}(\beta_n r) + F_{mn}' I_{m+1}(\beta_n r) + E_{mn}'' K_{m-1}(\beta_n r) + E_{mn}' K_{m+1}(\beta_n r) \} \right. \\ \Phi_z &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin m\theta \cos \beta_n z \left\{ \left(\frac{\beta_n}{r} \right) \{ -F_{mn}'' I_{m-1}(\beta_n r) + F_{mn}' I_{m+1}(\beta_n r) - E_{mn}'' K_{m-1}(\beta_n r) + E_{mn}' K_{m+1}(\beta_n r) \} \right. \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (3)}$$

$$\Phi_r^0 = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\theta \{ D_{m0}'' Y_m^m + D_{m0}' Y_m^{-m} \}, \quad \Phi_\theta^0 = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\theta \{ F_{m0}'' Y_m^{m+1} + E_{m0}' Y_m^{m+1} \}, \quad \Phi_z^0 = \sum_{m=0}^{\infty} \sin m\theta \{ F_{m0}'' Y_m^{m+1} - E_{m0}' Y_m^{m+1} \} \quad \text{----- (4)}$$

ここで、 $A_{mn}, L_{mn}, \dots, F_{mn}, E_{mn}$ は境界条件によって決定される未知定数、 α_{mn}, β_n および m は変数である。

変位成分は次式により求められる。

$$\text{式(2) からは, } 2GU_r = (-z)\partial\Phi_r/\partial r - \partial\Phi_\theta/\partial r + (z/r)\partial\mathcal{U}_z/\partial\theta, \quad 2GU_\theta = (-z/r)\partial\Phi_r/\partial\theta - (1/r)\partial\Phi_\theta/\partial\theta - 2\partial\mathcal{U}_z/\partial r, \\ 2GU_z = (-z)\partial\Phi_z/\partial z - \partial\Phi_\theta/\partial z + (3-4\nu)\Phi_z \quad \text{----- (5)}$$

$$\text{式(3) からは, } 2GU_r^0 = (-r)\partial\Phi_r/\partial r - \partial\Phi_\theta/\partial r + (3-4\nu)\Phi_r, \quad 2GU_\theta^0 = -\partial\Phi_r/\partial\theta + (1/r)\partial\Phi_\theta/\partial\theta + 4(1-\nu)\Phi_\theta, \\ 2GU_z^0 = (-r)\partial\Phi_r/\partial z - \partial\Phi_\theta/\partial z \quad \text{----- (6)}$$

$$\text{式(4) からは, } 2GU_r^0 = (-r)\partial\Phi_r^0/\partial r - \partial\Phi_\theta^0/\partial r + (3-4\nu)\Phi_r^0, \quad 2GU_\theta^0 = -\partial\Phi_r^0/\partial\theta - (1/r)\partial\Phi_\theta^0/\partial\theta + 4(1-\nu)\Phi_\theta^0, \\ 2GU_z^0 = 0 \quad \text{----- (7)}$$

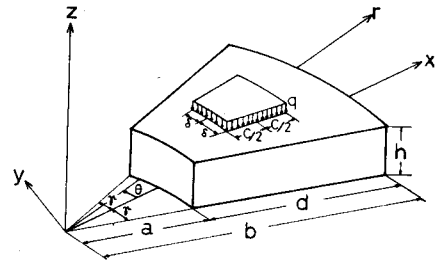


図-1 扇形厚板

肩添字 1, 2 および 0 は、変位ポテンシャルの形によって便宜的に付したもので、それらをそれぞれ相加したもののが求められる変位成分である。また、応力成分は円筒座標系における応力とひずみの関係式より求められる。

3. 境界条件

図-1 に示したように内半径 a 、外半径 b および中心角 2α で、2 直線辺が単純支持され、2 円弧辺が自由な扇形厚板の中央に部分分布荷重を担う場合の境界条件は次のようである。

$$\theta = \pm\alpha \text{ において } \sigma_{\theta\theta} = 0, u_r = 0, u_\theta = 0 \quad \dots (8) \quad r = a, b \text{ において } \sigma_{rr} = 0, \sigma_{r\theta} = 0, \sigma_{rz} = 0 \quad \dots (9)$$

$$z = 0 \text{ において } \sigma_{zz} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{\theta z} = 0 \quad \dots (10) \quad z = h \text{ において } \sigma_{zz} = -p(r, \theta), \sigma_{rz} = 0, \sigma_{\theta z} = 0 \quad \dots (11)$$

上記の境界条件を満たすために助変数を次のように定める。

$$\beta_n = n\pi/\alpha \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad m = \pi/2\alpha \quad (\alpha=1, 3, 5, \dots, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}), \quad \alpha_{ms} = \lambda_{ms}/a \quad (s=1, 2, 3, \dots) \quad \dots (12)$$

式 (10) および式 (11) の σ_{rz} と $\sigma_{\theta z}$ の境界条件より、次の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} G_{rs}^{(1)} &= 0, \quad L_{rs}^{(1)} = (1-2\nu) M_{rs}^{(1)}/\alpha_{ms}, \quad G_{rs}^{(2)} = 0, \quad L_{rs}^{(2)} = (1-2\nu) M_{rs}^{(2)}/\alpha_{ms} \\ B_{rs}^{(1)} &= 0, \quad A_{rs}^{(1)} = \{ C_{rs}^{(1)}(1-2\nu - \alpha_{ms}h \coth \alpha_{ms}h) - M_{rs}^{(1)} \alpha_{ms}h \} / \alpha_{ms} \\ B_{rs}^{(2)} &= 0, \quad A_{rs}^{(2)} = \{ C_{rs}^{(2)}(1-2\nu - \alpha_{ms}h \coth \alpha_{ms}h) - M_{rs}^{(2)} \alpha_{ms}h \} / \alpha_{ms} \end{aligned} \right\} \quad \dots (13)$$

式 (9) の $[\sigma_{r\theta}]_{r=a} = 0$ および $[\sigma_{\theta z}]_{r=b} = 0$ の条件より、未知定数の間に次の関係を設ける。

$$C_{rs}^{(1)} = - \frac{J_m'(\alpha_{ms}a)}{Y_m'(\alpha_{ms}a)} C_{rs}^{(2)}, \quad M_{rs}^{(1)} = - \frac{J_m'(\alpha_{ms}a)}{Y_m'(\alpha_{ms}a)} M_{rs}^{(2)} \quad \dots (14)$$

$$J_m'(\lambda_{ms} \frac{b}{a}) Y_m'(\lambda_{ms}) - J_m'(\lambda_{ms}) Y_m'(\lambda_{ms} \frac{b}{a}) = 0 \quad \dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{mn}^{(1)} &= \frac{1}{2} (f_1 F_{mn}^{(1)} + f_2 F_{mn}^{(2)} + e_1 E_{mn}^{(1)} + e_2 E_{mn}^{(2)}) \\ D_{mn}^{(2)} &= \frac{1}{2} (f_1' F_{mn}^{(1)} + f_2' F_{mn}^{(2)} + e_1' E_{mn}^{(1)} + e_2' E_{mn}^{(2)}) \end{aligned} \right\} \quad \dots (16)$$

$$\text{ここで } f_1 = -(m-2+2\nu) - (1/\Gamma_{mn}) [\lambda_a (k_b m/\beta_{nb} - k_b') \{ m(m-2+2\nu)/\beta_{na} + \beta_{na} \} - (k_a m/\beta_{na} - 1) \{ m(m-2+2\nu)/\beta_{nb} + \beta_{nb} \}]$$

$$f_2 = m+2-2\nu - (1/\Gamma_{mn}) [\lambda_a (k_b m/\beta_{nb} - k_b') \{ m(m+2-2\nu)/\beta_{na} + \beta_{na} \} - (k_a m/\beta_{na} - 1) \{ m(m+2-2\nu)/\beta_{nb} + \beta_{nb} \}]$$

$$e_1 = (1/\Gamma_{mn}) [k_b k_a m(1-\varepsilon^2)/\varepsilon + k_b \{ m(m-2+2\nu)/\beta_{nb} + \beta_{nb} \} - k_b' k_a \{ m(m-2+2\nu)/\beta_{na} + \beta_{na} \}] K_{m+1}(\beta_{na})/I_m(\beta_{nb})$$

$$e_2 = (1/\Gamma_{mn}) [k_b k_a m(1-\varepsilon^2)/\varepsilon + k_b \{ m(m+2-2\nu)/\beta_{nb} + \beta_{nb} \} - k_b' k_a \{ m(m+2-2\nu)/\beta_{na} + \beta_{na} \}] K_{m+1}(\beta_{na})/I_m(\beta_{nb})$$

$$f_1' = (1/\Gamma_{mn}) [\lambda_a m(1-\varepsilon^2)/\varepsilon - \lambda_a' \{ m(m-2+2\nu)/\beta_{nb} + \beta_{nb} \} + i_b' \lambda_a \{ m(m-2+2\nu)/\beta_{na} + \beta_{na} \}] I_m(\beta_{nb})/K_{m+1}(\beta_{na})$$

$$f_2' = (1/\Gamma_{mn}) [\lambda_a m(1-\varepsilon^2)/\varepsilon - \lambda_a' \{ m(m+2-2\nu)/\beta_{nb} + \beta_{nb} \} + i_b' \lambda_a \{ m(m+2-2\nu)/\beta_{na} + \beta_{na} \}] I_m(\beta_{nb})/K_{m+1}(\beta_{na})$$

$$e_1' = m-2+2\nu - (1/\Gamma_{mn}) [k_a (m/\beta_{nb} + i_b') \{ m(m-2+2\nu)/\beta_{na} + \beta_{na} \} - k_b (\lambda_a m/\beta_{na} + \lambda_a') \{ m(m-2+2\nu)/\beta_{nb} + \beta_{nb} \}]$$

$$e_2' = -(m+2-2\nu) - (1/\Gamma_{mn}) [k_a (m/\beta_{nb} + i_b') \{ m(m+2-2\nu)/\beta_{na} + \beta_{na} \} - k_b (\lambda_a m/\beta_{na} + \lambda_a') \{ m(m+2-2\nu)/\beta_{nb} + \beta_{nb} \}]$$

$$\text{さらに } \Gamma_{mn} = (\lambda_a m/\beta_{na} + \lambda_a') (k_b m/\beta_{nb} - k_b') - (k_a m/\beta_{na} - 1) (m/\beta_{nb} + i_b'), \quad \varepsilon = b/a$$

$$\lambda_a = I_m(\beta_{na})/I_m(\beta_{nb}), \quad \lambda_a' = I_{m+1}(\beta_{na})/I_m(\beta_{nb}), \quad i_b' = I_{m+1}(\beta_{nb})/I_m(\beta_{nb})$$

$$k_a = K_m(\beta_{na})/K_{m+1}(\beta_{na}), \quad k_b = K_m(\beta_{nb})/K_{m+1}(\beta_{nb}), \quad k_b' = K_{m+1}(\beta_{nb})/K_{m+1}(\beta_{na})$$

助変数中の λ_{ms} は式 (15) を満足する根であり、また、式 (11) の $p(r, \theta)$ は根 λ_{ms} に基づいて部分分布荷重を Fourier-Dini 展開したもので次のようになる。

$$P(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} E_{ns} \cos m\theta \tilde{C}_m(\alpha_{ns}r) \quad \text{----- (17)}$$

こゝで、
$$E_{ns} = \frac{(88/\pi) \sin(\pi\theta/2s)}{(\varepsilon^2 \lambda_{ms}^2 - m^2) \tilde{C}_m^2(\varepsilon \lambda_{ms}) - (\lambda_{ms}^2 - m^2) \tilde{C}_m^2(\lambda_{ms})} \{ K_2 \tilde{C}_{m+1}(K_2) - K_1 \tilde{C}_{m+1}(K_1) + \frac{2m}{s} K_2 \tilde{C}_{m+1}(K_2) \times S_m(K_2) - \tilde{C}_m(K_2) S_{m+1}(K_2) \} - \frac{2m}{s} K_1 \{ \tilde{C}_{m+1}(K_1) S_m(K_1) - \tilde{C}_m(K_1) S_{m+1}(K_1) \} \quad (m \text{ は偶数 } \varepsilon \in 3)$$
さらに、 $K_1 = \frac{\lambda_{ms}}{2} (1 + \frac{b}{a} - \frac{c}{a})$, $K_2 = \frac{\lambda_{ms}}{2} (1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a})$ であり、上式中の $\tilde{C}_m(\alpha_{ns}r)$ および $S_m(\alpha_{ns}r)$ はヤコビ円柱関数、Schläfli の多項式を表わし、次式となる。

$$\tilde{C}_m(\alpha_{ns}r) = J_m(\alpha_{ns}r) - \frac{J_m'(\lambda_{ms})}{Y_m'(\lambda_{ms})} Y_m(\alpha_{ns}r) \quad \text{----- (18)}$$

$$S_m(\alpha_{ns}r) = \pi \sum_{n=-m}^{\infty} \{ J_m(\alpha_{ns}r) Y_n(\alpha_{ns}r) - J_n(\alpha_{ns}r) Y_m(\alpha_{ns}r) \} \quad \text{----- (19)}$$

式(13), (14) および式(16)の関係と、式(18)の円柱関数を用いて応力成分を表わすと次のようである。

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^I = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{ns} \cos m\theta \{ \{ m(m-1)/(\alpha_{ns}r)^2 \} \tilde{C}_m(\alpha_{ns}r) + (1/\alpha_{ns}r) \tilde{C}_{m+1}(\alpha_{ns}r) \} [\tilde{C}_{ts}^{(u)} \{ (1-2\nu - \alpha_{ns}h \coth \alpha_{ns}h) \\ & \times \cosh \alpha_{ns}z + \alpha_{ns}z \sinh \alpha_{ns}z \} - M_{ts}^{(u)} \{ (\alpha_{ns}h - \alpha_{ns}z) \cosh \alpha_{ns}z - (1-2\nu) \sinh \alpha_{ns}z \}] - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{ns} \\ & \times \cos m\theta \tilde{C}_m(\alpha_{ns}r) [\tilde{C}_{ts}^{(u)} \{ (1 - \alpha_{ns}h \coth \alpha_{ns}h) \cosh \alpha_{ns}z + \alpha_{ns}z \sinh \alpha_{ns}z \} - M_{ts}^{(u)} \{ (\alpha_{ns}h - \alpha_{ns}z) \\ & \times \cosh \alpha_{ns}z - \sinh \alpha_{ns}z \}] \quad \text{----- (20)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^I = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-\alpha_{ns}) \cos m\theta \tilde{C}_m(\alpha_{ns}r) [\tilde{C}_{ts}^{(u)} \{ (1 + \alpha_{ns}h \coth \alpha_{ns}h) \cosh \alpha_{ns}z - \alpha_{ns}z \sinh \alpha_{ns}z \} + M_{ts}^{(u)} \{ (\alpha_{ns}h \\ & - \alpha_{ns}z) \cosh \alpha_{ns}z + \sinh \alpha_{ns}z \}] \quad \text{----- (21)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^I = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-\alpha_{ns}) \sin m\theta \{ \{ m(m-1)/(\alpha_{ns}r)^2 \} \tilde{C}_m(\alpha_{ns}r) - (m/\alpha_{ns}r) \tilde{C}_{m+1}(\alpha_{ns}r) \} [\tilde{C}_{ts}^{(u)} \{ (1-2\nu - \alpha_{ns}h \\ & \times \coth \alpha_{ns}h) \cosh \alpha_{ns}z + \alpha_{ns}z \sinh \alpha_{ns}z \} - M_{ts}^{(u)} \{ (\alpha_{ns}h - \alpha_{ns}z) \cosh \alpha_{ns}z - (1-2\nu) \sinh \alpha_{ns}z \}] \quad \text{--- (22)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{II} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (\beta_n^2/2) \cos m\theta \cos \beta_n z [F_{tn}^{(u)} \{ I_m(\beta_n r) [2m-3+2\nu + f_1 + m(m-1) \{ 2(m-4+4\nu) + f_1 \} \\ & \div (\beta_n r)^2 \} + I_{m+1}(\beta_n r) \{ (m-1)(m-4+4\nu) - f_1 + (\beta_n r)^2 \} / \beta_n r + f_1' \{ K_m(\beta_n r) \{ m(m-1)/(\beta_n r)^2 \\ & + 1 \} + K_{m+1}(\beta_n r)/\beta_n r \}] - F_{tn}^{(u)} \{ I_m(\beta_n r) [3-2\nu - f_2 - f_2 m(m-1)/(\beta_n r)^2] - I_{m+1}(\beta_n r) \{ (m+1) \\ & \times (m+4-4\nu) - f_2 + (\beta_n r)^2 \} / \beta_n r - f_2' \{ K_m(\beta_n r) \{ m(m-1)/(\beta_n r)^2 + 1 \} + K_{m+1}(\beta_n r)/\beta_n r \} \\ & - E_{tn}^{(u)} \{ K_m(\beta_n r) [2m-3+2\nu - e_1' + m(m-1) \{ 2(m-4+4\nu) - e_1' \} / (\beta_n r)^2] - K_{m+1}(\beta_n r) \{ (m \\ & - 1)(m-4+4\nu) + e_1' + (\beta_n r)^2 \} / \beta_n r - e_1 \{ I_m(\beta_n r) \{ m(m-1)/(\beta_n r)^2 + 1 \} - I_{m+1}(\beta_n r)/\beta_n r \} \\ & + E_{tn}^{(u)} \{ K_m(\beta_n r) [3-2\nu + e_2' + e_2' m(m-1)/(\beta_n r)^2] + K_{m+1}(\beta_n r) \{ (m+1)(m+4-4\nu) + e_2' \\ & + (\beta_n r)^2 \} / \beta_n r + e_2 \{ I_m(\beta_n r) \{ m(m-1)/(\beta_n r)^2 + 1 \} - I_{m+1}(\beta_n r)/\beta_n r \}] \} \quad \text{----- (23)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{II} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-\beta_n^2/2) \cos m\theta \cos \beta_n z [F_{tn}^{(u)} \{ (f_1 + 2m+2\nu) I_m(\beta_n r) + \beta_n r I_{m+1}(\beta_n r) + f_1' K_m(\beta_n r) \} \\ & + F_{tn}^{(u)} \{ (f_2 + 2\nu) I_m(\beta_n r) + \beta_n r I_{m+1}(\beta_n r) + f_2' K_m(\beta_n r) \} + E_{tn}^{(u)} \{ e_1 I_m(\beta_n r) + (e_1' - 2m - 2\nu) \\ & \times K_m(\beta_n r) + \beta_n r K_{m+1}(\beta_n r) \} + E_{tn}^{(u)} \{ e_2 I_m(\beta_n r) + (e_2' - 2\nu) K_m(\beta_n r) + \beta_n r K_{m+1}(\beta_n r) \}] \quad \text{--- (24)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{II} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-\beta_n/2) \sin m\theta \cos \beta_n z [F_{tn}^{(u)} \{ I_m(\beta_n r) [m(m-1) \{ 2(m-4+4\nu) + f_1 \} / (\beta_n r)^2 + m \\ & - 2+2\nu \} + I_{m+1}(\beta_n r) \{ (m-1)(m-4+4\nu) + m f_1 \} / \beta_n r + m f_1' \{ (m-1) K_m(\beta_n r)/(\beta_n r)^2 \\ & - K_{m+1}(\beta_n r)/\beta_n r \}] + F_{tn}^{(u)} \{ I_m(\beta_n r) [m+2-2\nu + f_2 \cdot m(m-1)/(\beta_n r)^2] - I_{m+1}(\beta_n r) \{ (m+1) \\ & \times (m+4-4\nu) - m f_2 \} / \beta_n r + m f_2' \{ (m-1) K_m(\beta_n r)/(\beta_n r)^2 - K_{m+1}(\beta_n r)/\beta_n r \}] - E_{tn}^{(u)} \\ & \times \{ K_m(\beta_n r) [m(m-1) \{ 2(m-4+4\nu) - e_1' \} / (\beta_n r)^2 + m-2+2\nu] - K_{m+1}(\beta_n r) \{ (m-1)(m-4 \\ & + 4\nu) - m e_1' \} / \beta_n r - m e_1' \{ (m-1) I_m(\beta_n r)/(\beta_n r)^2 + I_{m+1}(\beta_n r)/\beta_n r \}] - E_{tn}^{(u)} \{ K_m(\beta_n r) [m+2-2\nu \\ & - e_2' m(m-1)/(\beta_n r)^2] + K_{m+1}(\beta_n r) \{ (m+1)(m+4-4\nu) + m e_2' \} / \beta_n r - m e_2' \{ (m-1) I_m(\beta_n r) \\ & \div (\beta_n r)^2 + I_{m+1}(\beta_n r)/\beta_n r \}] \} \quad \text{----- (25)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r0}^{II} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \{ m(m-1) D_{t0}^{(u)} r^{m-2} + m(m+1) D_{t0}^{(u)} r^{m-2} + (m+1)(m-2) F_{t0} r^m + (m-1) \\ & \times (m+2) E_{t0} r^m \} \quad \text{----- (26)} \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz}^{II} = 4\nu \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \{ (m+1) F_{t0} r^m - (m-1) E_{t0} r^m \} \quad \text{----- (27)}$$

$$\nabla_0^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sin m\theta \{ m(m-1) D_{x0}^{(1)} r^{m-2} - m(m+1) D_{x0}^{(2)} r^{-m-2} + m(m+1) F_{x0} r^m - m(m-1) \times E_{x0} r^{-m} \} \text{----- (28)}$$

応力成分は、それぞれ添字 1, 2 および 0 を付したものを相加して得られる。

4. 8群の連立一次方程式

式(10) および式(11) の ∇_{zz} についての条件を満足するには、 ∇_{zz}^2 および ∇_{zz}^0 の式中の変数 r について λ_{ms} に基づいてDirichlet展開することが必要となる。 $z=0$ および $z=h$ における ∇_{zz}^2 および ∇_{zz}^0 のDirichlet展開の結果を用いて境界条件を満たすと次式が得られる。

$\{\nabla_{zz}\}_{z=0}=0$ より、

$$\alpha_{ms} [C_{xs}^{(1)} \{ (1 + \alpha_{ms} h \coth \alpha_{ms} h) + M_{xs}^{(1)} \alpha_{ms} h \} + \sum_{n=1}^{\infty} (1/a^2) \{ n h_{xs}^{(1)} I_m(\beta_{nb}) F_{xn}^{(1)} + n h_{xs}^{(2)} I_m(\beta_{nb}) F_{xn}^{(2)} + n h_{xs}^{(3)} K_{m+1}(\beta_{na}) E_{xn}^{(1)} + n h_{xs}^{(4)} K_{m+1}(\beta_{na}) E_{xn}^{(2)} \} - \delta_1 V (\delta_1 F_{x0} a^m + \delta_2 E_{x0} a^{-m}) = 0 \text{----- (29)}$$

$\{\nabla_{zz}\}_{z=h} = -P(r, \theta)$ より、

$$\alpha_{ms} [C_{xs}^{(1)} \{ (1 + \alpha_{ms} h \coth \alpha_{ms} h) \cosh \alpha_{ms} h - \alpha_{ms} h \sinh \alpha_{ms} h \} + M_{xs}^{(1)} \sinh \alpha_{ms} h] + \sum_{n=1}^{\infty} (1/a^2) \times \{ (-1)^n n h_{xs}^{(1)} I_m(\beta_{nb}) F_{xn}^{(1)} + (-1)^n n h_{xs}^{(2)} I_m(\beta_{nb}) F_{xn}^{(2)} + (-1)^n n h_{xs}^{(3)} K_{m+1}(\beta_{na}) E_{xn}^{(1)} + (-1)^n n h_{xs}^{(4)} K_{m+1}(\beta_{na}) E_{xn}^{(2)} \} - \delta_1 V (\delta_1 F_{x0} a^m + \delta_2 E_{x0} a^{-m}) = E_{xs} \text{----- (30)}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} n h_{xs}^{(1)} &= (\lambda_{ms}^2 / \Delta_{ms}) \omega [C_m(\varepsilon \lambda_{ms}) \{ m(f_1 + 2m + 2V - 2\omega) + (\beta_{nb})^2 + \beta_{nb} i b' (f_1 + m + 2V - 2\omega) + l_1(m k_b - \beta_{nb} k_b') \} - C_m(\lambda_{ms}) \{ i a [m(f_1 + 2m + 2V - 2\omega) + (\beta_{na})^2] + \beta_{na} \times i a' (f_1 + m + 2V - 2\omega) + l_1(m k_a - \beta_{na}) \} \} \\ n h_{xs}^{(2)} &= (\lambda_{ms}^2 / \Delta_{ms}) \omega [C_m(\varepsilon \lambda_{ms}) \{ m(f_2 + 2V - 2\omega) + (\beta_{nb})^2 + \beta_{nb} i b' (f_2 + 2V - m - 2\omega) + l_2(m k_b - \beta_{nb} k_b') \} - C_m(\lambda_{ms}) \{ i a [m(f_2 + 2V - 2\omega) + (\beta_{na})^2] + \beta_{na} i a' (f_2 + 2V - m - 2\omega) + l_2(m k_a - \beta_{na}) \} \} \\ n h_{xs}^{(3)} &= (\lambda_{ms}^2 / \Delta_{ms}) \omega [C_m(\varepsilon \lambda_{ms}) \{ l_3(m + \beta_{nb} i b') + k_b [m(e_1' - 2m - 2V + 2\omega) - (\beta_{nb})^2] - \beta_{nb} k_b' (e_1' - m - 2V + 2\omega) \} - C_m(\lambda_{ms}) \{ l_3(m i a + \beta_{na} i a') + k_a [m(e_1' - 2m - 2V + 2\omega) - (\beta_{na})^2] - \beta_{na} (e_1' - m - 2V + 2\omega) \} \} \\ n h_{xs}^{(4)} &= (\lambda_{ms}^2 / \Delta_{ms}) \omega [C_m(\varepsilon \lambda_{ms}) \{ l_4(m + \beta_{nb} i b') + k_b [m(e_2' - 2V + 2\omega) - (\beta_{nb})^2] - \beta_{nb} k_b' (e_2' - 2V + m + 2\omega) \} - C_m(\lambda_{ms}) \{ l_4(m i a + \beta_{na} i a') + k_a [m(e_2' - 2V + 2\omega) - (\beta_{na})^2] - \beta_{na} (e_2' - 2V + m + 2\omega) \} \} \end{aligned}$$

$$\delta_1 = m(m+1) \{ \varepsilon^m C_m(\varepsilon \lambda_{ms}) - C_m(\lambda_{ms}) \} / \Delta_{ms}$$

$$\delta_2 = m(m-1) \{ \varepsilon^{-m} C_m(\varepsilon \lambda_{ms}) - C_m(\lambda_{ms}) \} / \Delta_{ms}$$

$$\Delta_{ms} = (\varepsilon^2 \lambda_{ms}^2 - m^2) C_m^2(\varepsilon \lambda_{ms}) - (\lambda_{ms}^2 - m^2) C_m^2(\lambda_{ms})$$

$$\omega = (\beta_{na})^2 / \{ \lambda_{ms}^2 + (\beta_{na})^2 \}$$

$$l_1 = (1/\Gamma_{mn}) [m i a (1 - \varepsilon^2)/\varepsilon - i a' \{ m(m-2+2V)/\beta_{nb} + \beta_{nb} \} + i b' i a \{ m(m-2+2V) \div \beta_{na} + \beta_{na} \}]$$

$$l_2 = (1/\Gamma_{mn}) [m i a (1 - \varepsilon^2)/\varepsilon - i a' \{ m(m+2-2V)/\beta_{nb} + \beta_{nb} \} + i b' i a \{ m(m+2-2V) \div \beta_{na} + \beta_{na} \}]$$

$$l_3 = (1/\Gamma_{mn}) \{ m k_b k_a (1 - \varepsilon^2)/\varepsilon + k_b \{ m(m-2+2V)/\beta_{nb} + \beta_{nb} \} - k_b' k_a \{ m(m-2+2V)/\beta_{na} + \beta_{na} \} \}$$

$$l_4 = (1/\Gamma_{mn}) [m k_b k_a (1 - \varepsilon^2)/\varepsilon + k_b \{ m(m+2-2V)/\beta_{nb} + \beta_{nb} \} - k_b' k_a \{ m(m+2-2V)/\beta_{na} + \beta_{na} \}]$$

また、式(9) の ∇_{rr} および $\nabla_{r\theta}$ の境界条件は ∇_{rr} および $\nabla_{r\theta}$ を $r=a, b$ においてFourier級数展開することによって満たすことができ、 $\{\nabla_{rr}\}_{r=a,b}=0$ および $\{\nabla_{r\theta}\}_{r=a,b}=0$ より得られる結果を順に示すと次のようになる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_m(\lambda_{ms}) (4/\ell) \{ \omega(m^2 - \lambda_{ms}^2) - m^2 V \} \{ C_{ts}^{(n)} (-1)^n \sinh \alpha_{ms} h + M_{ts}^{(n)} \{ (-1)^n \cosh \alpha_{ms} h - 1 \} \} / \lambda_{ms}^2 + (\beta_{sa})^2 \{ (1/\alpha^2) \{ A_{11} F_{tn}^{(n)} I_m(\beta_{sa} b) + A_{12} F_{tn}^{(n)} I_m(\beta_{sa} b) + A_{13} E_{tn}^{(n)} K_{m+1}(\beta_{sa} a) + A_{14} E_{tn}^{(n)} K_{m+1}(\beta_{sa} a) \} = 0 \quad \text{--- (31)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_m(\varepsilon \lambda_{ms}) \{ 4/(\varepsilon^2 \ell) \} \{ \omega(m^2 - \varepsilon^2 \lambda_{ms}^2) - m^2 V \} \{ C_{ts}^{(n)} (-1)^n \sinh \alpha_{ms} h + M_{ts}^{(n)} \{ (-1)^n \cosh \alpha_{ms} h - 1 \} \} / \lambda_{ms}^2 + (\beta_{sa})^2 \{ (1/\alpha^2) \{ A_{21} F_{tn}^{(n)} I_m(\beta_{sa} b) + A_{22} F_{tn}^{(n)} I_m(\beta_{sa} b) + A_{23} E_{tn}^{(n)} K_{m+1}(\beta_{sa} a) + A_{24} E_{tn}^{(n)} K_{m+1}(\beta_{sa} a) \} = 0 \quad \text{--- (32)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_m(\lambda_{ms}) (4m/\ell) (\omega - V) \{ C_{ts}^{(n)} (-1)^n \sinh \alpha_{ms} h + M_{ts}^{(n)} \{ (-1)^n \cosh \alpha_{ms} h - 1 \} \} / \lambda_{ms}^2 + (\beta_{sa})^2 \{ (1/\alpha^2) \{ A_{31} F_{tn}^{(n)} I_m(\beta_{sa} b) + A_{32} F_{tn}^{(n)} I_m(\beta_{sa} b) + A_{33} E_{tn}^{(n)} K_{m+1}(\beta_{sa} a) + A_{34} E_{tn}^{(n)} K_{m+1}(\beta_{sa} a) \} = 0 \quad \text{--- (33)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_m(\varepsilon \lambda_{ms}) \{ 4m/(\varepsilon^2 \ell) \} (\omega - V) \{ C_{ts}^{(n)} (-1)^n \sinh \alpha_{ms} h + M_{ts}^{(n)} \{ (-1)^n \cosh \alpha_{ms} h - 1 \} \} / \lambda_{ms}^2 + (\beta_{sa})^2 \{ (1/\alpha^2) \{ A_{41} F_{tn}^{(n)} I_m(\beta_{sa} b) + A_{42} F_{tn}^{(n)} I_m(\beta_{sa} b) + A_{43} E_{tn}^{(n)} K_{m+1}(\beta_{sa} a) + A_{44} E_{tn}^{(n)} K_{m+1}(\beta_{sa} a) \} = 0 \quad \text{--- (34)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \because A_{11} &= \{ (\beta_{sa})^2/2 \} \{ \lambda_a [2m-3+2V+f_1+m(m-1) \{ 2(m-4+4V)+f_1 \} / (\beta_{sa})^2 + \lambda_a' \{ (m-1)(m-4+4V)-f_1+(\beta_{sa})^2 \} / \beta_{sa} + \ell_1 \{ k_a \{ m(m-1)/(\beta_{sa})^2 + 1 \} + (1/\beta_{sa}) \} \} \\ A_{12} &= \{ -(\beta_{sa})^2/2 \} \{ \lambda_a [3-2V-f_2-f_2 m(m-1)/(\beta_{sa})^2 - \lambda_a' \{ (m+1)(m+4-4V)-f_2+(\beta_{sa})^2 \} / \beta_{sa} - \ell_2 \{ k_a \{ m(m-1)/(\beta_{sa})^2 + 1 \} + (1/\beta_{sa}) \} \} \\ A_{13} &= \{ -(\beta_{sa})^2/2 \} \{ k_a [2m-3+2V-e_1'+m(m-1) \{ 2(m-4+4V)-e_1' \} / (\beta_{sa})^2 - \{ (m-1)(m-4+4V)+e_1'+(\beta_{sa})^2 \} / \beta_{sa} - \ell_3 \{ \lambda_a \{ m(m-1)/(\beta_{sa})^2 + 1 \} - \lambda_a' / \beta_{sa} \} \} \\ A_{14} &= \{ (\beta_{sa})^2/2 \} \{ k_a [3-2V+e_2'+e_2' m(m-1)/(\beta_{sa})^2 + \{ (m+1)(m+4-4V)+e_2'+(\beta_{sa})^2 \} / \beta_{sa} + \ell_4 \{ \lambda_a \{ m(m-1)/(\beta_{sa})^2 + 1 \} - \lambda_a' / \beta_{sa} \} \} \\ A_{31} &= \{ -(\beta_{sa})^2/2 \} \{ \lambda_a [m-2+2V+m(m-1) \{ 2(m-4+4V)+f_1 \} / (\beta_{sa})^2 + \lambda_a' \{ (m-1)(m-4+4V)+m f_1 \} / \beta_{sa} + m \ell_1 \{ k_a(m-1)/(\beta_{sa})^2 - (1/\beta_{sa}) \} \} \\ A_{32} &= \{ -(\beta_{sa})^2/2 \} \{ \lambda_a [m+2-2V+f_2 m(m-1)/(\beta_{sa})^2 - \lambda_a' \{ (m+1)(m+4-4V)-m f_2 \} / \beta_{sa} + m \ell_2 \{ k_a(m-1)/(\beta_{sa})^2 - 1/\beta_{sa} \} \} \\ A_{33} &= \{ (\beta_{sa})^2/2 \} \{ k_a [m-2+2V+m(m-1) \{ 2(m-4+4V)-e_1' \} / (\beta_{sa})^2 - \{ (m-1)(m-4+4V)-m e_1' \} / \beta_{sa} - m \ell_3 \{ \lambda_a(m-1)/(\beta_{sa})^2 + (\lambda_a' / \beta_{sa}) \} \} \\ A_{34} &= \{ (\beta_{sa})^2/2 \} \{ k_a [m+2-2V-e_2' m(m-1)/(\beta_{sa})^2 + \{ (m+1)(m+4-4V)+m e_2' \} / \beta_{sa} - m \ell_4 \{ \lambda_a(m-1)/(\beta_{sa})^2 + \lambda_a' / \beta_{sa} \} \} \end{aligned}$$

$A_{21}, \dots, A_{24}$ および $A_{41}, \dots, A_{44}$ については、対称面の都合上省略する。

また、この条件より、 $n=0$ の項について4元の連立一次方程式が得られ、 $m \neq 1$ として解くと次式となる。

$$F_{t0} a^m = (-1/\sqrt{2m}) \sum_{s=1}^{\infty} (-mV/\ell \lambda_{ms}^2) \{ C_{ts}^{(s)} \sinh \alpha_{ms} h + M_{ts}^{(s)} (\cosh \alpha_{ms} h - 1) \} \{ \tilde{C}_m(\lambda_{ms}) \} \varepsilon^{-2m} + (m-2) \varepsilon^{-2} - m + 1 \} + \tilde{C}_m(\varepsilon \lambda_{ms}) \varepsilon^{-m-2} \{ \varepsilon^{2m} + (m-2) \varepsilon^2 - m + 1 \} \quad \text{--- (35)}$$

$$E_{t0} a^{-m} = (1/\sqrt{2m}) \sum_{s=1}^{\infty} (-mV/\ell \lambda_{ms}^2) \{ C_{ts}^{(s)} \sinh \alpha_{ms} h + M_{ts}^{(s)} (\cosh \alpha_{ms} h - 1) \} \{ \tilde{C}_m(\lambda_{ms}) \} \varepsilon^{-2m} - \varepsilon^2 \times (m+2) + m + 1 \} + \tilde{C}_m(\varepsilon \lambda_{ms}) \varepsilon^{-m-2} \{ \varepsilon^{-2m} - (m+2) \varepsilon^2 + m + 1 \} \quad \text{--- (36)}$$

$$D_{t0} a^{m-2} = (1/m \sqrt{2m}) \sum_{s=1}^{\infty} (-mV/\ell \lambda_{ms}^2) \{ C_{ts}^{(s)} \sinh \alpha_{ms} h + M_{ts}^{(s)} (\cosh \alpha_{ms} h - 1) \} \{ \tilde{C}_m(\lambda_{ms}) \} (m+2) \times \varepsilon^{-2m} - m^2 \varepsilon^2 + (m+1)(m-2) \} + \tilde{C}_m(\varepsilon \lambda_{ms}) \varepsilon^{-m} \{ (m+2) \varepsilon^{2m} - m^2 \varepsilon^{-2} + (m+1)(m-2) \} \quad \text{--- (37)}$$

$$D_{t0} a^{-m-2} = (-1/m \sqrt{2m}) \sum_{s=1}^{\infty} (-mV/\ell \lambda_{ms}^2) \{ C_{ts}^{(s)} \sinh \alpha_{ms} h + M_{ts}^{(s)} (\cosh \alpha_{ms} h - 1) \} \{ \tilde{C}_m(\lambda_{ms}) \} (m-2) \times \varepsilon^{2m} + m^2 \varepsilon^2 - (m-1)(m+2) \} + \tilde{C}_m(\varepsilon \lambda_{ms}) \varepsilon^m \{ (m-2) \varepsilon^{-2m} + m^2 \varepsilon^{-2} - (m-1)(m+2) \} \quad \text{--- (38)}$$

$$\therefore \because \Omega_m = \varepsilon^{2m} + \varepsilon^{-2m} - 2 - m^2 (\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} - 2)$$

したがって、式(29), (30), (31), (32), (33), (34), (35) および式(36)の8群の無限連立一次方程式を解き、未知定数 $C_{ts}^{(s)}$, $M_{ts}^{(s)}$, $F_{tn}^{(s)}$, $F_{tn}^{(s)}$, $E_{tn}^{(s)}$, $E_{tn}^{(s)}$, F_{t0} および E_{t0} を数値的に求めることになる。 D_{t0} および D_{t0} は $C_{ts}^{(s)}$ および $M_{ts}^{(s)}$ が求められれば、式(37) および式(38)より求められる。

5. 数値計算例

式の無次元化および数値計算を行う際に生じる桁落ちの影響を緩和し、反復法における解の収束を助けるために未知定数を次のように置き換える。

$$\left. \begin{aligned} C_{ts}^{(1)}/a\delta &= e^{-\alpha_{ts}h} \bar{C}_{ts} + \bar{M}_{ts}, & M_{ts}^{(1)}/a\delta &= e^{-\alpha_{ts}h} \bar{C}_{ts} - \bar{M}_{ts}, & F_{tn}^{(1)} I_m(\beta_n b)/a^2\delta &= \bar{F}_{tn}^{(1)}, \\ F_{tn}^{(2)} I_m(\beta_n b)/a^2\delta &= \bar{F}_{tn}^{(2)}, & E_{tn}^{(1)} K_{n+1}(\beta_n a)/a^2\delta &= \bar{E}_{tn}^{(1)}, & \bar{E}_{tn}^{(2)} K_{n+1}(\beta_n a)/a^2\delta &= \bar{E}_{tn}^{(2)}, \\ D_{to}^{(1)} a^{m-2}/\delta &= \bar{D}_{to}^{(1)}, & D_{to}^{(2)} a^{m-2}/\delta &= \bar{D}_{to}^{(2)}, & F_{to} a^m/\delta &= \bar{F}_{to}, & E_{to} a^{-m}/\delta &= \bar{E}_{to} \end{aligned} \right\} \text{----- (39)}$$

上記の未知定数を用いて8群の無限連立一次方程式、変位成分および応力成分の式を無次元化し、数値計算を行った。計算例として、扇形の外半径と内半径の比 $b/a=8.0$ 、 θ が一定の2直線辺の長さと厚さの比 $d/h=2.0$ 、扇形の中心角 $2\delta=\pi/2$ およびポアソン比 $\nu=0.17$ で、荷重の載荷区間を $C/d=0.25$ 、 $\delta=\pi/16$ の場合の $\theta=0$ の面における σ_{rr} 、 $\sigma_{\theta\theta}$ および σ_{zz} の分布を、応力値を縦軸に、 z/h をパラメータ、 r/a を横軸にとり、図-2から図-4に示した。厚板表面における σ_{rr} の値は、荷重作用域の境界で、大きな圧縮応力から引張応力に急変し、 $r=a \sim r=3.625a$ と $r=5.375a \sim r=b$ の区間での分布状態が違っている。次に図-3からは、厚板表面の荷重作用部分の $\sigma_{\theta\theta}$ の値が大きくなり、また、 $r=a$ において、応力集中の傾向が生じていることが、図-4からは、 $z=0.8h$ 、 $r=b$ で小さな値であるが σ_{zz} が引張応力になることがわかる。

6. あとがき

扇形厚板を厳密な3次元弾性論に基づいて解析した結果、厚板理論による方法では十分な精度を期待できない厚板周辺あるいは荷重載荷部分の変形および応力状態を明らかにすることができた。

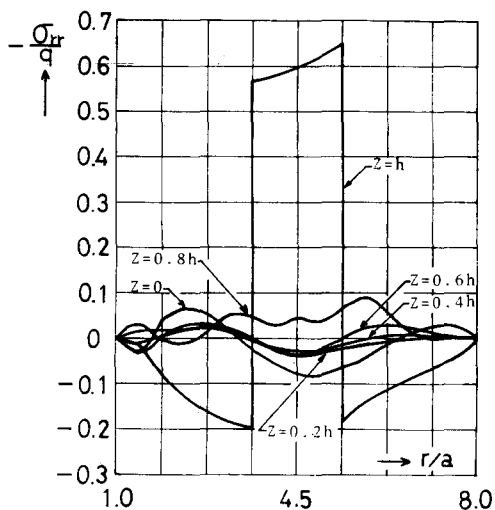


図-2 σ_{rr} の分布

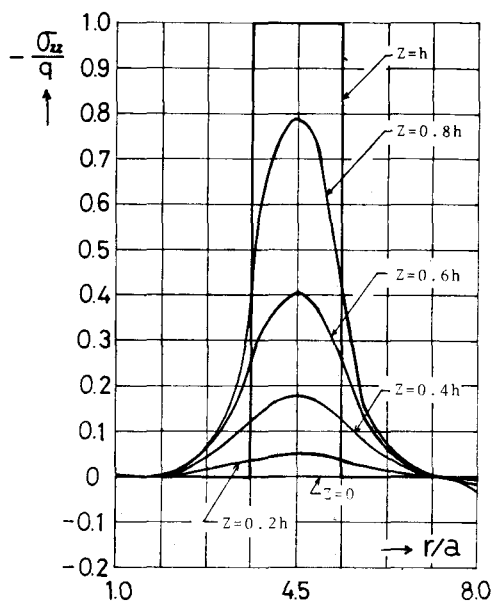


図-4 σ_{zz} の分布

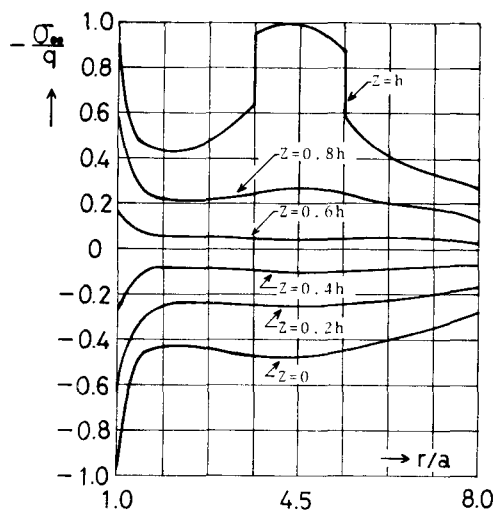


図-3 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布