# II－20 ホワイトノイズの構成法とサンプリング理論

北海道大学工学部　正員　浜中建一郎

## 1. まえがき

時系列解析におけるスペクトル理論は、確率論における定常確率過程のスペクトル表現にその理論的根拠を置いている。しかし、ここでのスペクトル概念、具体的にはランダムスペクトル測度を理解することは、かなりやっかいなことと思われる。そこで今回、ホワイトノイズを具体的に構成するという作業を通じてスペクトル表現の理解が容易になることが分ったので報告する。始めに、ホワイトノイズの構成法の一例を述べ、次にガウス定常確率過程のランダムスペクトル測度が、同様な手法で構成出来ることを示し、スペクトル表現の具体的イメージを与える。最後に、スペクトル表現の応用として、実関数におけるフーリエ変換論の中で展開されている、サンプリング理論が、確率過程に対しても同様に成立することを示す。

## 2. 準　備

ここで以後用いられる用語について若干の説明を行う。

$(T, \mathbb{B}_T, m)$　で測度空間を表わす。$T$は考えている空間、$\mathbb{B}_T$ は $T$の部分集合で作られる完全加法族、
$m$ は測度で、$\mathbb{B}_T$の元を非負の実数に写す完全加法的集合関数。

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$　で確率空間を表わす。内容は測度空間と同じだが、特に$\mathcal{B}$の元を事象とよぶ。
又．$P(\Omega)=1$

$X, Y, Z$　等で確率変数を表わす。すなわち．$X(\omega)$ は $\Omega$ の元（見本点）の実関数。

確率変数列の収束

$\text{a.s.} \lim_{n\to\infty} X_n = X$　で概収束を表わす。すなわち　$P(\omega\in\Omega \mid \lim_{n\to\infty} |X_n - X| = 0) = 1$

$P\text{-}\lim_{n\to\infty} X_n = X$　で確率収束を表わす。すなわち　$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$　, $\varepsilon > 0$

$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, X_n = X$　で平均収束を表わす。すなわち　$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^2 = 0$
$L^2(\Omega)$収束ともいう。　ここで　$E(\cdot)$ は期待値

分布収束　$X_n$の分布関数　$P_n(x) = P(X_n \le x)$ がすべての連続点で、$X$の分布関数 $P(x)$ に収束するとき、すなわち　$\lim_{n\to\infty} P(X_n \le x) = P(X \le x)$

これらの収束の間には下記の矢印で示される包含関係が分っている。

概収束 → 確率収束 → 分布収束
平均収束 → 確率収束

$L^2(\Omega)$　$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上で2乗可積分な確率変数の全体

## 3. ホワイトノイズの定義および構成

始めに、ガウスランダム測度の一つとしてホワイトノイズの定義を与え、次に具体的なランダムパルス列によって作られる確率的な過程列を考え、それがどの様な意味でホワイトノイズに近ずくのかを示すことにより、ホワイトノイズの工学的イメージの明確化を試みる。

定義1.　ガウスランダム測度（1−P199）

$(T, \mathbb{B}_T, m)$ を測度空間とする。　$\mathbb{B}_T^* = \{B\in\mathbb{B}_T \mid m(B) < \infty\}$　として

$\mathbb{B}_T^* \ni A$ に対し、$A$ をパラメータとする確率変数の系　$M(A)$ が次の性質 (M.1),(M.2) を満すとき、この $M(A)$ ををガウスランダム測度とよぶ。

(M.1)　$M(A),\ A \in \mathbb{B}_T^*$　はガウス分布　$N(0, m(A))$ を持つ　　　$N(a,b)$ は平均値 $a$、分散 $b$ の正規分布を示す

(M.2)　$\{A_n\} \subset \mathbb{B}_T^*$　,　$A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j$

$\Rightarrow$　$M(A_1), M(A_2), \cdots, M(A_m)$ は独立で、

かつ　$M(A_1 + \cdots + A_m) = M(A_1) + \cdots + M(A_m)$　a.s. $\omega$ で

定義2.　ホワイトノイズ

定義1において、$T$ を一次元の実数軸 $R$、$\mathbb{B}_T$ を $R$ 上のボレル集合、$m$ をルベーグ測度として得られる、ガウスランダム測度　$M(A)$ をホワイトノイズとよぶ。

ホワイトノイズの構成

$Y_0, Y_{11}, Y_{21}, Y_{22}, \cdots, Y_{n1}, Y_{n2}, \cdots, Y_{n,2^{n-1}}, \cdots$　を独立ガウス変数列とする。$Y_0$ は $N(0,1)$、$Y_{nj}$, $j = 1, \cdots, 2^{n-1}$ は $N(0, 1/2^{n-1})$ なる分布を持つとする。この独立ガウス変数列から次の様にして新たな変数列 $\{X_{nr}\}$ を構成する。

(1)
$$X_{11} = Y_0$$
$$X_{2,\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}X_{11} + \frac{1}{2}Y_{11}\ ,\quad X_{2,1} = \frac{1}{2}X_{11} - \frac{1}{2}Y_{11}$$
$$X_{3,\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}X_{2,\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}Y_{21}\ ,\quad X_{3,\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}X_{2,\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}Y_{21}$$
$$X_{3,\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}X_{2,1} + \frac{1}{2}Y_{22}\ ,\quad X_{3,1} = \frac{1}{2}X_{2,1} - \frac{1}{2}Y_{22}$$
$$\vdots$$

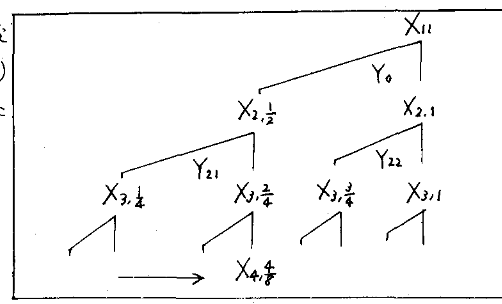

Fig - 1

この様にして順次構成した変数列 $\{X_{nr},\ r = 1/2^{n-1}, \cdots, 2^{n-1}/2^{n-1}\}$ の $n$ を固定した一組は互いに独立な変数列となり、しかも

(2)
$$E|X_{nr}|^2 = 1/2^{n-1} \qquad E|\sum_{r \le r_0} X_{nr}|^2 = r_0$$
$$\sum_{r \le r_0} X_{nr} = \sum_{r \le r_0} X_{mr}$$

ただし　$0 < r_0 \le 1$　なる有理数で、$m, n$ は添字 $r$ が $r_0$ に等しいものがあるように選ぶ

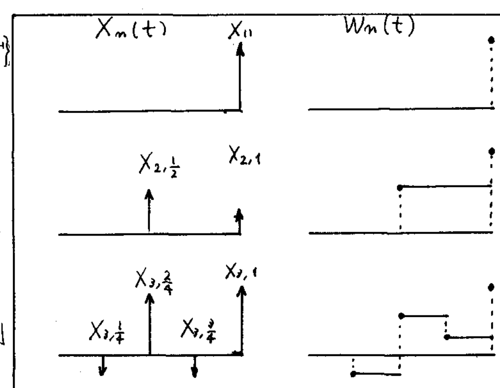

Fig - 2

次にこの $\{X_{nr}\}$ と　$\delta$-関数によって、次の様な過程の列を作る。$t \in T$ の範囲を　$T = [0, 1]$ に制限して

(3)
$$X_1(t) = X_{11}\,\delta(t-1)$$
$$X_2(t) = X_{2,\frac{1}{2}}\,\delta(t-\tfrac{1}{2}) + X_{21}\,\delta(t-1)$$
$$\vdots$$
$$X_n(t) = \sum_{r \le 1} X_{nr}\,\delta(t-r)\quad ,\ r = \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{2}{2^{n-1}}, \cdots, 1$$

これらの　$X_n(t)$ は　$\Omega \ni \omega$ を一点固定したとき、確率1で重みが有界なパルス列となるから、任意の $t \in T$ に対し、デルタ関数の意味で積分

(4)
$$\int_0^t X_n(s)\,ds \equiv W_n(t) \quad \left( = \sum_{r \le t} X_{nr} \right)$$

が存在する。従って、$T$ に含まれる任意の有理点　$a \le b$ で作られる区間　$I = (a, b]$　に対し

(5) $M_n(I) = \int_a^b X_n(t)\,dt$ は $M_n(I) = M(I)$ Ω上で一様に

又、Tに含まれる任意の実数 $a \leq b$ については、有理数列 $\{r_{ak}\}, \{r_{bk}\}$, $r_{ak} \uparrow a$, $r_{bk} \downarrow b$, $k \to \infty$ なるものを考えれば、区間 $I = (a, b]$ に対し

(6) $\underset{k\to\infty}{l.i.m.}\, M_n((r_{ak}, r_{bk}]) \equiv M_n(I) \longrightarrow M(I)$ $L^2(\Omega)$ 収束の意味で

が定まり Tに含まれている任意の区間に対し、確率変数の系 $M(I)$ が定まる。 さらに T に含まれる任意の $B \in \mathbb{B}_T^*$ に対しては、有限加法的測度から完全加法的測度を構成したのと同様の手続きを用いる(2-p23)。すなわち、T に含まれる区間の全体を $\mathcal{J}$ とすると、

$\{I_{nk}\} \subset \mathcal{J}$ で $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{nk} = B_n$ なる集合で
$m(B) = \inf_n \sum_{k=1}^{\infty} m(I_{nk})$

として定めてあるから、この $\{B_n\}$ から部分列 $B_{k_1} \supset B_{k_2} \supset \cdots \supset B_{k_n} \supset \cdots$ を選び

(7) $M(B) = \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\, M(B_{k_n})$

とすればよい。この様にしてすべての $B \in \mathbb{B}_T^*$ に対し確率変数 $M(B)$ が $L^2(\Omega)$ の元として定まった。この確率変数の系 $\{M(B)\}$ が定義2の意味で ホワイトノイズであることは容易に分る。

一方、ホワイトノイズをウィナー過程のある意味での微分、あるいは、ある意味で積分したものがウィナー過程になるものと理解した場合には、(4) で定義された $W_n(t)$ がウィナー過程に近ずくことから、$X_n(t)$ の極限をホワイトノイズと考えることも出来る。

又、(1) で独立変数列 $\{Y_{nk}\}$ から 変数列 $\{X_{nr}\}$ を構成したが、直接 $X_{nr}$ を $N(0, 1/2^{n-1})$ なる独立変数列で与えた場合、その $\{X_{nr}\}$ から作られる変数系 $M_n(\cdot)$ は $L^2(\Omega)$ 収束の保障はなくなり、結合分布収束の意味で $M(\cdot)$ に近ずくことになる。

## 4. 定常確率過程のスペクトル表現とガウス形ランダムスペクトル測度の構成

定常確率過程は直交測度によるスペクトル表現が可能なことが知られている(1-p255)。 すなわち、$X(t)$ を定常確率過程とすると、

(8) $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,dZ(\omega) = \underset{\lambda\to\infty}{l.i.m.} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\omega t}\,dZ(\omega)$

ここで $r(t)$ を $X(t)$ の自己共分散関数とし、 そのフーリエ スティールチェス 表現を

(9) $r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,dF(\omega)$ ; F は $X(t)$ の スペクトル分布

とすると、(9) 式の $Z(\omega)$ は $(R, \mathbb{B}, F)$ 上の、$L^2(\Omega)$ に値をとる直交測度である。
このとき $Z(\omega)$ をランダムスペクトル測度ともよぶ。

定義3. 直交測度 (1-p251)

$(T, \mathbb{B}_T, m)$ を測度空間とする。 $\mathbb{B}_T^* = \{B \in \mathbb{B}_T \mid m(B) < \infty\}$ として
$\mathbb{B}_T^* \ni A$ に対し、Aをパラメータとする確率変数系 $M(A)$ が次の性質 (0.1) を満すとき 直交測度とよぶ。

(0.1) $E(M(S_1)\overline{M(S_2)}) = m(S_1 \cap S_2)$ ; $S_1, S_2 \in \mathbb{B}_T^*$

以下でランダムスペクトル測度 $Z(\omega)$ の構成を試みるのだが、$X(t)$ が定常過程であるということだけでは、$Z(\omega)$ の分布形は定まらず構成することは出来ない。従ってここでは $X(t)$ を最も基本的な確率過程であるガウス過程とする。すると $Z(\omega)$ もガウス形となり（1-p266）、直交性と独立性とは同等となるから、$Z(\omega)$ はガウスランダム測度になる。従って、前節で述べた構成法が応用出来ることになる。

始めに、スペクトルがある有限区間内でのみ値を持つ場合を考える。すなわち、ある $a, b \in R$ があって

(10) $$X(t) = \int_a^b e^{i\lambda t}\, dZ(\lambda)$$

区間 $T=[a, b]$ に対し 分割列 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n, \cdots$ を順次、前分割の2細分割になる様、次の様に定める。

$\Delta_1$ ; $a = \lambda_{10} < \lambda_{11} = b$

$\Delta_2$ ; $a = \lambda_{20} < \lambda_{21} < \lambda_{22} = b$

$\vdots$ $\qquad \vdots$

$\Delta_n$ ; $a = \lambda_{n0} < \lambda_{n1} < \cdots < \lambda_{n,2^{n-1}} = b$

$\vdots$ $\qquad \vdots$

ただし $\lambda_{nk} = \lambda_{n-1,\frac{k}{2}}$ $k$は偶数

又一般性を失うことなく $\lambda=a$ で $F(\lambda)$ は連続と仮定

区間 $\delta_{nk} = (\lambda_{n,k-1}, \lambda_{nk}]$ に対し $F(\delta_{nk}) = F(\lambda_{nk}) - F(\lambda_{n,k-1})$, $Z(\delta_{nk}) = Z(\lambda_{nk}) - Z(\lambda_{n,k-1})$ と書くと、固定された $n$ に対し $Z(\delta_{nk}); k=1,\cdots,2^{n-1}$ は互に独立で $N(0, F(\delta_{nk}))$ なる分布を持つ。従って、すべての $n$ と $k$ に対し分布 $N(0, F(\delta_{nk}))$ を持つ独立変数列 $Y_{nk}$ を考えて、

(12) $$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} e^{i\lambda_{nk} t}\, Y_{nk}$$

を作ると、結合分布収束の意味で $X(t)$ に収束する。ここではホワイトノイズの場合と同様、より強い収束、平均収束する様なランダムスペクトル測度の構成を試みる。独立変数列 $\{Y_{nk}\}$ を前述のとうりとし、$Y_0$ をそれらと独立な、分布 $N(0, F(\delta_{11}))$ を持つ変数とする。新たな変数列 $\{Z_{nk}\}$ を次の様に構成する。

(13)
$$Z_{11} = Y_0$$
$$Z_{21} = f_{21}(Z_{11} + Y_{11}), \quad Z_{22} = f_{22}(Z_{11} - Y_{11})$$
$$Z_{31} = f_{31}(Z_{21} + Y_{21}), \quad Z_{32} = f_{32}(Z_{21} - Y_{21}), \quad Z_{33} = f_{33}(Z_{22} + Y_{22}), \quad Z_{34} = f_{34}(Z_{22} - Y_{22})$$
$$\vdots$$

ただし $f_{nk} = \sqrt{\dfrac{F(\delta_{nk})}{2F(\delta_{11})}}$

このとき、$n$を固定すると $\{Z_{nk}\}$ は互いに独立でしかも、$E|\sum_{\nu=1}^{k} Z_{n\nu}|^2 = F(\lambda_{nk})$

これらの変数列から、次の様な過程列を作る。

(14)
$$Z_1(t) = Z_{11}\,\delta(t-\lambda_{11})$$
$$Z_2(t) = Z_{21}\,\delta(t-\lambda_{21}) + Z_{22}\,\delta(t-\lambda_{22})$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$Z_n(t) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} Z_{nk}\,\delta(t-\lambda_{nk})$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

これらの過程列から、ホワイトノイズの場合と同様の手続き（5），（6），（7）式によって、$\mathcal{B}_T^* \ni B$ に対し $M(B)$ が定まり、これを $Z(B)$ と考えることにより、ランダムスペクトル測度が構成された。

ただし、（6）式での有理数列は 数列 $\{\lambda_{nk}\}$ に置きかえて考える。

以上のことから、（14）式で表わされる過程列が、定常確率過程のスペクトル概念の実体を示す一つの具体例であるといえる。

又、無限区間にスペクトルが分布している場合は、適当な有限区間で打切って、近似とするか、次節で述べるサンプリング理論を用いるとよい。

## 5. 確率過程におけるサンプリング理論

実関数のフーリェ変換論におけるサンプリング理論は、謂ゆるサンプリング定理（3－P61）として次の様にまとめられている。すなわち、$f(t)$ をフーリェ変換可能な関数、$g(\omega)$ をそのフーリェ変換とし、今

(15) $\quad g(\omega) = 0 \qquad |\omega| \geq \omega_c$

とすると、$f(t)$ は $\Delta t = \pi/\omega_c$ として $f_n = f(n\Delta t)$ の値だけで全て決定される。

ここでは工学的便い易さを考え、(15) 式の制限をせず、次の様にまとめておく。すなわち、$f(t)$, $g(\omega)$ をフーリェ変換の対として、$f_n$ を前述のとうりとし

$$\hat{g}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(\omega + 2k\omega_c)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{in\pi\omega/\omega_c}\,\hat{g}(\omega)\,d\omega$$

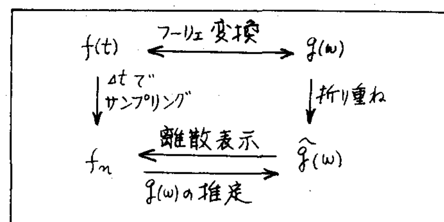

Fig － 3

一方、$f(t)$ のサンプル値 $f_n$ から、$\Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\pi\omega/\omega_c}$ によって $g(\omega)$ を推定すると、実は $\hat{g}(\omega)$ を求めていることになる。勿論、$g(\omega)$ が (15) を満していれば $\hat{g}(\omega) = g(\omega)$。

これらの関係を Fig－3に図示している。さて、定常確率過程においても同様のことが成立することを以下で示す。定常確率過程 $X(t)$ に対し、(8), (9)式の様にスペクトル表現が与えられたとする。(8) 式に $t = n\Delta t$ を代入して、

(16) $$X(n\Delta t) = \underset{\lambda\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\omega n\Delta t}\,dZ(\omega)$$

$\lambda \to \infty$ はどんな部分列で考えてもよいから

$$= \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-(2m+1)\omega_c-0}^{(2m+1)\omega_c} e^{in\pi\omega/\omega_c}$$

$$= \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=-m}^{m}\int_{-\omega_c-0}^{\omega_c} e^{in\pi\omega/\omega_c}\,dZ(\omega+2k\omega_c)$$

$$\overset{(注1)}{=} \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\omega_c-0}^{\omega_c} e^{in\pi\omega/\omega_c}\,d\Big(\sum_{k=-m}^{m} Z(\omega+2k\omega_c)\Big)$$

(注1)
これが成り立つのは、次のことによっている。すなわち、
$Z_1$, $Z_2$ を直交測度
$g(t) \in L^2(T)$
なら
$$\int_a^b g(t)\,dZ_1 + \int_a^b g(t)\,dZ_2 = \int_a^b g(t)\,d(Z_1+Z_2)$$

さて、

$$\tilde{Z}_m(\omega) = \sum_{k=-m}^{m} Z(\omega+2k\omega_c) \quad ; \; -\omega_c < \omega \leq \omega_c$$

とかくと、

(17) $$X(n\Delta t) = \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\omega_c-0}^{\omega_c} e^{in\pi\omega/\omega_c}\,d\tilde{Z}_m(\omega)$$

この極限の性質を順を追って調べてみる。

(i) $\tilde{Z}_m$ は $I = (-\omega_c, \omega_c]$, $\tilde{F}_m(S) = \sum_{k=-m}^{m} F(S+2k\omega_c)$ ; $S \in \mathcal{B}_I$ としたとき $(I, \mathcal{B}_I, \tilde{F}_m)$ 上の直交測度である。

これは

$\forall S \in \mathcal{B}_I$ に対し $\tilde{Z}_m(S) \in L^2(\Omega)$

$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{B}_I$ に対し $E\{\tilde{Z}_m(S_1)\overline{\tilde{Z}_m(S_2)}\} = \tilde{F}_m(S_1 \cap S_2)$

により示される。

(ii) $\forall S \in \mathcal{B}_I$ に対し、$\hat{Z}(S) = \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\tilde{Z}_m(S)$, $F(S) = \lim_{m\to\infty}\tilde{F}_m(S)$ とすると、$\hat{Z}$ は $(I, \mathcal{B}_I, \hat{F})$ 上の直交測度である。

これは

$\forall S \in \mathbb{B}_I$ に対し　$E|\tilde{Z}(S)|^2 < \infty$ より　$\hat{Z}(S) \in L^2(\Omega)$

$\forall S_1, S_2 \in \mathbb{B}_I$ に対し　$E\{\tilde{Z}_1(S_1)\overline{\tilde{Z}(S_2)}\} = \tilde{F}(S_1 \cap S_2)$　（内積の連続性より）

により示される。

(iii) 任意の $n$ に対し

$$\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-\omega_c-0}^{\omega_c} e^{in\pi\omega/\omega_c}\, d\tilde{Z}_m(\omega) = \int_{-\omega_c-0}^{\omega_c} e^{in\pi\omega/\omega_c}\, d\hat{Z}(\omega)$$

これは.

$g(\omega) = e^{in\pi\omega/\omega_c}$ , $E|\cdot|^2 = \|\cdot\|^2$

$g_k(\omega) = \sum \alpha_k \chi_{B_k} \to g(\omega)$　$I$ 上で一様に

に対し

$$\left\| \int_I g\, d\hat{Z} - \int_I g\, d\tilde{Z}_m \right\|^2$$

$$\le \left\| \int_I g\, d\hat{Z} - \int_I g_k\, d\hat{Z} \right\|^2 + \left\| \int_I g_k\, d\hat{Z} - \int_I g_k\, d\tilde{Z}_m \right\|^2$$

$$+ \left\| \int_I g_k\, d\tilde{Z}_m - \int_I g\, d\tilde{Z}_m \right\|^2 \quad \to 0$$

（直交測度による積分の性質（1−p254），$|\alpha_k| \le 1$，$B_i \cap B_j = \phi$ ; $i \ne j$　等から）

以上をまとめると.

$$X_n = X(n\Delta t) = \int_{-\omega_c-0}^{\omega_c} e^{in\pi\omega/\omega_c}\, d\hat{Z}(\omega)$$

$\hat{Z}$ は $(I, \mathbb{B}_I, \tilde{F})$ 上の直交測度

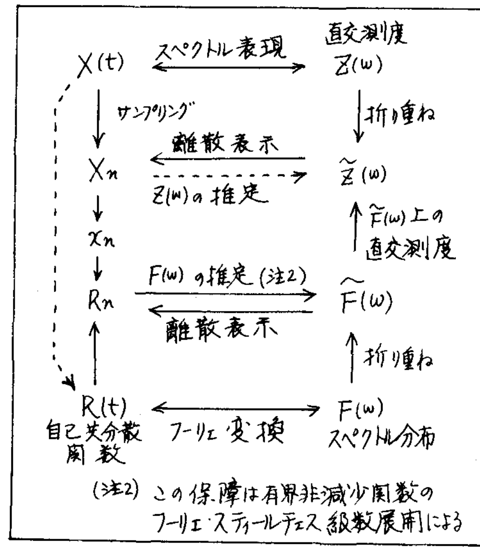

Fig − 4

が示された。　この事実はFig−4　中の矢印 $\hat{Z}(\omega) \to X_n$ の保障を与えるものである。さて実関数でのサンプリング理論（Fig−3）が確率過程でも同様に成立することを示すには、逆の矢印 $X_n \to \hat{Z}(\omega)$ を示す必要がある。実際それは示すことが出来る。しかし工学的な問題においては、$\{X_n\}$ の見本値列 $\{x_n\}$ しか与えられてない事が大部分であるから、Fig−4の下のループによって示さなければならない。実際それは $R_n$ と $\tilde{F}(\omega)$ がフーリエ・スティールチェス級数展開によって結ばれている事実（4−p74）により示すことが出来る。結局 $\{x_n\}$ から $\{R_n\}$ を通して $\tilde{F}(\omega)$ を求め、前述の (ii) の事実により $\hat{Z}(\omega)$ が決まる。　勿論 $X(t)$ が ガウス形であることを仮定すれば、3節で述べたように $\hat{Z}(\omega)$ を実際に構成出来る。

## 6.　あとがき

以上述べた中で、他の書物から引用した部分は肩書に頁数も付記したので参照されたい。又著者自身調べた事に対し、紙面の制限により一切証明を載せることが出来なかった。又、スペクトル表現を用いた確率過程のシミュレーションに関し、これらの結果を用いて興味ある事実が分ったので別の機会に報告したい。


最後に、この報告をまとめるにあたり、数学および確率論について、初歩の段階から御指導、御教授いただいた、京都大学数理解析研究所大学院生、大野泰治郎氏、浅野弘明氏に心からの謝意を表したい。


### 参　考　文　献


1.　伊藤清；確率論，岩波書店，1974
2.　伊藤清三；ルベーグ積分入門，裳華房，昭和49
3.　A、パポリス（大槻喬訳）；工学のための応用フーリエ積分，オーム社，昭和49
4.　河田龍夫；フーリエ解析と確率論入門，日本評論社，昭和49