

II-17 結氷河川の氷厚に関する一考察

北見工業大学 正員 佐渡公明

1. まえがき

結氷河川の氷厚を理論的に求める問題は、水と氷の2相界面が時間とともに移動する一次元熱伝導の相変化問題である。従来、この問題は筆者の知る範囲で J. Stefan¹⁾, F. Neumann¹⁾, 鎌田等により解析されている。しかしながら、これらは水深を無限大として、河床土中の地温の影響が考慮されていない。また気温の扱い方が理論的に不明確であると思われる。本論文では、積雪表面や氷盤表面と大気間の熱収支と熱伝達の式を整理した場合、気温は平衡温度の一部を構成し、熱伝達率が明確に表示されることを示す。次に、地温の影響は次のように扱う。すなわち河床での熱交換を考慮した水温分布を求め、アイスカバー(=氷盤)下面に流入する熱流束を決定するのである。

2. 氷厚成長の理論式

図-1は、河川横断面の結氷状態を示したものである。座標軸はx軸を流れ方向に、y軸を河幅方向に、z軸を水深方向に取っている。河川水と接触しているアイスカバー下面(z=0)の成長と融解を支配する基本式は、次の熱収支方程式である。

$$\gamma_1 l \frac{dh_1}{dt} + Q_2 = Q_1 \quad (1)$$

ここに、 γ_1 : 氷の単位重量, l : 氷の融解熱, h_1 : 氷厚,
 t : 時間, Q_2 : 河水から氷盤に流入する熱流束,
 Q_1 : 氷盤と積雪を通して大気へ流出する熱流束

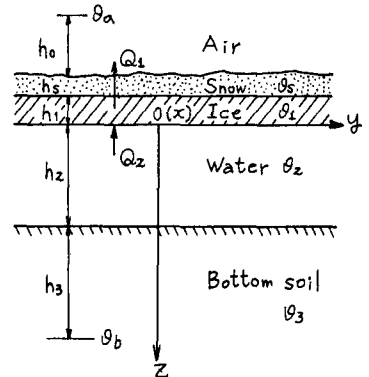


図-1 河川横断面の結氷状態

アイスカバー下面に空気が入り、河川水の流水が開水路状態になつて
 いる場合も実際にはなるに見受けられるが、本論文ではそのような場合は考慮しない。式(1)を解くに当たって
 問題は Q_1 , Q_2 をいかに表現するかである。 Q_2 については次の3節で詳しく述べることにして、先ず Q_1 につ
 いて述べる。 Q_1 の決定は、大気の熱作用を表わす積雪面での全熱収支の条件と氷盤下面で $\theta_i = 0$ の条件に
 より、氷盤-積雪の温度分布を解くことになる。積雪面と大気間の熱収支要素には、積雪面を温める過程として
 日射による短波放射 I , 大気の長波放射 R_2 があり、積雪面を冷やす過程として積雪面からの長波逆放射 R_1 ,
 蒸発に伴う潜熱量 LE および対流による顕熱量 H の輸送がある。積雪面に対する加熱を正として、以上の各熱収
 支項の総和は、平衡温度 θ_s^* を用いて次のように示される。

$$(1 - A_{surf}) I - R + H + LE = \alpha_s (\theta_s^* - \theta_{surf}) \quad (2)$$

ここに、 A_{surf} : 積雪面のアルベド, L : 蒸発の潜熱, α_s : 熱伝達率, θ_{surf} : 積雪表面の温度,
 R : 有効長波放射 $= R_1 - R_2$

次に各熱収支項の算定は、文献(3), (4)などにより次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} R &= R_0 + 4\sigma T_0^3 (\theta_{surf} - \theta_a), & R_0 &= \sigma T_a^4 (1 - c_1 - c_2 \sqrt{e_a})(1 - c_3 n^2) \\ H &= h(\theta_a - \theta_{surf}), & h &= c_p \gamma_a C H U(h_0) \\ LE &= k(e_a - e_{surf}) = k(\Delta E - \varphi \theta_a + \varphi \theta_{surf}), & k &= L \gamma_a C E \frac{0.622}{P} U(h_0) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに記号は次の通りである。

σ : ステファン・ボルツマン定数, $T_0 = 273.2$, $T_a = \theta_a + T_0$, c_1, c_2, c_3 : 定数, n : 雲量,

h : 顕熱伝達係数, k : 潜熱伝達係数, C_p : 空気の定圧比熱, γ_a : 空気の単位重量, P : 大気圧,
 $\theta_a, e_a, u(h_0)$: 積雪面上の高度 h_0 に於る気温, 水蒸気圧力, 風速 ΔE : 飽差 $= e(\theta_a) - e_a$,
 φ : 飽和水蒸気圧力曲線 e の θ_a の点に於る変化率, CH, CE : 顕熱, 水蒸気輸送に対するバルク輸送係数
 式(3)と式(2)に代入し, 積雪がある場合の熱伝達率 α_s と平衡温度 θ_s^* を求めれば

$$\alpha_s = h + \varphi k + 4\sigma T_s^3 \quad (4)$$

$$\theta_s^* = \theta_a + \frac{(1 - A_{surf})I - R_0 - k\Delta E}{\alpha_s} \quad (5)$$

となる。式(5)の $(1 - A_{surf})I - R_0$ は放射射計を用いれば直接この値を測定することが出来る。 CH, CE は文献(4)では $u(h_0)$ から求めている。なお式(2)~(5)は, 積雪がなく氷盤表面が直接大気と接している場合は添字 $surf, s$ を氷盤表面に取ればよい, また氷盤もなく開水路状態の流水では $surf, s$ を水面に取ればよい。

次に, 氷盤-積雪の温度分布を定常とすれば, Q_1 は氷盤・積雪の熱伝導と大気の熱伝達より次のようになる。

$$Q_1 = \frac{-\theta_s^*}{\frac{h_i}{\lambda_i} + \frac{h_s}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha_s}} \quad (6)$$

ことに, λ_i : 氷の熱伝導率, λ_s : 積雪の熱伝導率である。式(6)と式(1)に代入して

$$\gamma_{il} \frac{dh_i}{dt} = \frac{-\theta_s^*}{\frac{h_i}{\lambda_i} + \frac{h_s}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha_s}} - Q_2 \quad (7)$$

式(7)と初期条件 $t=0$ で $h_i = h_{in}$ のもとで積分し, Δt 時間での h_i 氷厚が成長したとすれば

$$-\frac{\lambda_i \theta_s^*}{Q_2} \log e \left(1 + \frac{Q_2 \Delta h_i}{\lambda_i B \theta_s^*} \right) - \frac{\Delta h_i}{Q_2} = \frac{\Delta t}{\gamma_{il}}, \quad B = 1 + \frac{Q_2}{\theta_s^*} \left(\frac{h_{in}}{\lambda_i} + \frac{h_s}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha_s} \right) \quad (8.1) \quad (8.2)$$

ただし, 式(8.1)の Δh_i 以外の物理量は 0~ Δt 間で定数としている。式(8.1)に於て $Q_2 \Delta h_i / \lambda_i B \theta_s^* < 1$ なので, 対数を級数展開し第2項まで取ると Δh_i は次のように求まる。

$$\Delta h_i = B \left\{ \sqrt{\left(h_{in} + \frac{h_s \lambda_i}{\lambda_s} + \frac{\lambda_i}{\alpha_s} \right)^2 - \frac{2 \lambda_i \theta_s^*}{\gamma_{il}} \Delta t} - \left(h_{in} + \frac{h_s \lambda_i}{\lambda_s} + \frac{\lambda_i}{\alpha_s} \right) \right\} \quad (9)$$

積雪表面の温度 θ_{surf} が既知のときは, 大気の熱伝達は考慮しなくてよいので

$$\Delta h_i' = B' \left\{ \sqrt{\left(h_{in} + \frac{h_s \lambda_i}{\lambda_s} \right)^2 - \frac{2 \lambda_i \theta_{surf}}{\gamma_{il}} \Delta t} - \left(h_{in} + \frac{h_s \lambda_i}{\lambda_s} \right) \right\} \quad (10)$$

$$B' = 1 + \frac{Q_2}{\theta_{surf}} \left(\frac{h_{in}}{\lambda_i} + \frac{h_s}{\lambda_s} \right)$$

となる。また積雪がない場合は, 式(9)に於て $h_s = 0$, $\alpha_s \rightarrow \alpha_i$, $\theta_s^* \rightarrow \theta_i^*$ において次式が得られる。

$$\Delta h_i'' = B'' \left\{ \sqrt{\left(h_{in} + \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right)^2 - \frac{2 \lambda_i \theta_i^*}{\gamma_{il}} \Delta t} - \left(h_{in} + \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right) \right\} \quad (11)$$

$$B'' = 1 + \frac{Q_2}{\theta_i^*} \left(\frac{h_{in}}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_i} \right)$$

さらに式(11)で氷盤表面の温度 θ_i が既知のときは,

$$\Delta h_i''' = B''' \left\{ \sqrt{h_{in}^2 - \frac{2 \lambda_i \theta_i}{\gamma_{il}} \Delta t} - h_{in} \right\}, \quad B''' = 1 + \frac{Q_2 h_{in}}{\theta_i \lambda_i} \quad (12)$$

氷厚成長に関する Stefan の式は, 式(12)で Q_2 の影響を無視して $B''' = 1$ としたものである。また θ_i は気温 θ_a に等しくないと注意しなければならない。一般には, 積雪表面温度や氷盤表面温度はデータとして

入手し難く、気温を便するだけではないと思う。その際、式(9)、(11)から分かるように、気温は式(5)で定義される平衡温度を通して間接的に Δh_2 に影響し、併せて熱伝達率 α を考慮しなければならない。

3. 水温分布

本節では、 Q_2 の算定について述べる。式(9)から分かるように氷厚に及ぼす Q_2 の影響は係数 B の形で入っているが、 Q_2 が増加すると B が減少($\because \theta_2^* < 0$)し、氷厚も減少する。 Q_2 は水温分布 $\theta_2(z, t)$ が分かれば式で求められる。

$$Q_2 = -\lambda_2 \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (13)$$

ところで、水温分布は河床土中の熱保存、流水の乱流熱交換そして熱に変化する損失水頭以上の三者によって決まる。特に、積氷前・積氷期間中の水温分布は、水塊と河床底面との間の熱交換の影響を強く受けるものと思われ、土中の温度分布 $\theta_3(z, t)$ が問題となる。また、河川や湖のアイスカバー下面の氷の成長・融解は流水の状態に密接に関連し、流速が増せば Q_2 が増加するものと思われる。しかし、流速を考慮して問題を解くことは非常に難解で、本論文では第一近似として流速を考慮しないことにする。以上により、 θ_2 の決定には図-1の記号のものに次の方程式を解くことになる。

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} = a_j \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial z^2}, \quad (j = 2, 3) \quad (14.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{境界条件} \quad z=0 \text{ じ} \quad \theta_2=0, \quad z=h_2+h_3 \text{ じ} \quad \theta_3=\theta_b=\text{const.} \\ \text{接続条件} \quad z=h_2 \text{ じ} \quad \theta_2=\theta_3, \quad \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} = \lambda_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \\ \text{初期条件} \quad t=0 \text{ じ} \quad \theta_j(z, 0) = f_j(z), \quad (j=2, 3) \end{array} \right\} \quad (14.2)$$

ここで、 a_j は温度伝導率、 h_3 は地温の年変化が達しない深さすなわち年変化の不易層である。また時刻の原点は、連続したアイスカバーが水面上に形成された任意の時刻 t とする。

式(14.1)の解は、 a_j 一定として、ラプラス変換を適用して得られる連立2階非同次線形微分方程式をグリーン関数を用いて解き、この逆ラプラス変換の積分を留数を用いて行うことにより次のように得られる。

$$\begin{aligned} \theta_2(z, t) = & S_2(z) + Zb \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \alpha \beta_n h_3 \cdot \sin \beta_n z \cdot e^{-a_2 \beta_n^2 t}}{(a h_3 \cos^2 \beta_n h_2 + b h_2 \cos^2 \alpha \beta_n h_3)} \int_0^{h_2} (f_2(\xi) - S_2(\xi)) \sin \beta_n \xi d\xi \\ & - Zab \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_n h_2 \cdot \cos \alpha \beta_n h_3 \cdot \sin \beta_n z \cdot e^{-a_2 \beta_n^2 t}}{(a h_3 \cos^2 \beta_n h_2 + b h_2 \cos^2 \alpha \beta_n h_3)} \int_{h_2}^{h_2+h_3} (f_3(\xi) - S_3(\xi)) \sin \alpha \beta_n (h_2+h_3-\xi) d\xi \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \theta_3(z, t) = & S_3(z) - Z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_n h_2 \cdot \cos \alpha \beta_n h_3 \cdot \sin \alpha \beta_n (h_2+h_3-z) \cdot e^{-a_2 \beta_n^2 t}}{(a h_3 \cos^2 \beta_n h_2 + b h_2 \cos^2 \alpha \beta_n h_3)} \int_0^{h_2} (f_2(\xi) - S_2(\xi)) \sin \beta_n \xi d\xi \\ & + Za \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \beta_n h_2 \cdot \sin \alpha \beta_n (h_2+h_3-z) \cdot e^{-a_2 \beta_n^2 t}}{(a h_3 \cos^2 \beta_n h_2 + b h_2 \cos^2 \alpha \beta_n h_3)} \int_{h_2}^{h_2+h_3} (f_3(\xi) - S_3(\xi)) \sin \alpha \beta_n (h_2+h_3-\xi) d\xi \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、

$$S_2(z) = \frac{\theta_b \lambda_3 z}{\lambda_3 h_2 + \lambda_2 h_3}, \quad S_3(z) = \frac{\theta_b \{ \lambda_3 h_2 + \lambda_2 (z - h_2) \}}{\lambda_3 h_2 + \lambda_2 h_3}, \quad a = \sqrt{\frac{a_2}{a_3}}, \quad b = \sqrt{\frac{c_2 \gamma_3 \lambda_3}{c_2 \gamma_2 \lambda_2}}$$

c_j は比熱である。固有値 β_n は次の方程式より得られる。

$$\tan \alpha \beta h_3 + b \tan \beta h_2 = 0 \quad (17)$$

固有値 β_n は、無数ありいずれも実数値重複せず、各正の固有値に対し絶対値が相等しい負の固有値が存在する。式(15)の第1項の $S_2(z)$ は水中の定常温度分布を表わし、第2項は初期値の温度分布 $f_2(z)$ と定常値 $S_2(z)$ との差が時間とともに次第に減少していくことを表わしている。また、第3項は河床の熱交換による水温変化を表わしており、土中の初期温度分布 $f_3(z)$ と定常分布 $S_3(z)$ との差に関連している。

式(15)を直接式(13)に代入して、 Q_z を求めたのは式が複雑で実用計算には向かない。そこで、不層の深さ、初期温度分布に対し次の近似を行い、このときの水温を θ'_z とする。

$$h_3 \rightarrow \infty, \quad f_2(z) \doteq 0, \quad f_3(z) \doteq \bar{\theta}_3$$

$\bar{\theta}_3$ は $t=0$ に於ける土中の平均温度である。かくして、 θ'_z 、 Q_z 及び河床面の熱流束 Q_b はそれぞれ次のように得られる。

$$\theta'_z(z, t) = \frac{\bar{\theta}_3}{2a} \frac{b}{1+b} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-b}{1+b} \right)^n \left\{ \operatorname{erf} \frac{zn+1+x}{2\sqrt{F_0}} - \operatorname{erf} \frac{zn+1-x}{2\sqrt{F_0}} \right\} \quad (18)$$

$$Q_z(t) = \frac{\lambda_2 \bar{\theta}_3}{ah_2 \sqrt{\pi F_0}} \frac{b}{1+b} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-b}{1+b} \right)^n e^{-\frac{(zn+1)^2}{4F_0}} \quad (19)$$

$$Q_b(t) = \frac{\lambda_2 \bar{\theta}_3}{2ah_2 \sqrt{\pi F_0}} \frac{b}{1+b} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-b}{1+b} \right)^n \left\{ e^{-\frac{n^2}{F_0}} + e^{-\frac{(n+1)^2}{F_0}} \right\} \quad (20)$$

ここに、 $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \quad F_0 = \frac{a_2 t}{h_2^2}$

F_0 はフーリエ数と呼ばれる無次元数である。式(19)より時間 $0 \sim \Delta t$ 間の平均値 $\bar{Q}_z$ を求め、これを前節の係数 B に代入すれば Δh_1 を求めることができる。

最後に、流速 v_z の影響を考慮する場合には、式(14.1)の第1式と $z=0$ の境界条件は次のようになり、 $x=0$ の条件が増える。

$$\frac{\partial \theta_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} = a_z \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial z^2} + \frac{q_z}{c_z \gamma_z} \quad (21.1)$$

$$\left. \begin{aligned} z=0 \text{ で } -\lambda_z \frac{\partial \theta_z}{\partial z} &= \alpha_s (\theta_z - \theta_s^*) \\ x=0 \text{ で } \theta_z &= \psi_z(z, t) \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

q_z は損失水頭などによる内部熱源である。 α_s と θ_s^* を水面に対して求めると、この式は書きしていないときの水温を表わすことになる。

4. あとがき

本論文では、氷厚に関する理論式を展開し、地温の影響、熱伝達率、平衡温度について述べた。具体的な数値計算例は講演会当日に発表する。今後の課題としては、式(21.1)を差分法により解き、流速の影響を検討することである。

参考文献

- 1) H. S. Carslaw, J. C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids, 2nd, Clarendon Press, 1959
- 2) 鎌田新悦: 河川の結氷とこれに伴う水理に関する研究, 土木試験所報告, 第38号, 1965.
- 3) 新井正, 西沢利栄: 水温論, 共立出版, 1974.
- 4) 近藤純正: 海面と大気間の運動量・顕熱・水蒸気に対する輸送係数, 防災科学技術センター研究報告, 第10号, 1974.