

II-15 有限要素法による地下塩水拡散解析

室蘭工業大学 正会員 藤間 聡

1 まえがき

近年地下水の水質汚染が著しく進行し、水資源及び環境問題に支障をきたしている。この原因と考えられるものの多くは、過剰揚水による塩水侵入の増長、人工函養を図るための異質水の注入及び産業廃棄物の帯水層への圧入であり、人為的な原因が地下水系に与える影響は極めて大きい。このような事態に対応するには、汚染物質の地下侵入を防止する一方、汚染現象機構の的確な把握と予測の早期確立が必要となる。

本文は有限要素法を用いた数値モデルにより、沿岸地域に侵入した塩水の帯水層中の移動とその濃度の予測を行い、基礎的な塩水拡散現象を調べるものである。

2 多孔質内拡散基本式

拡散は、ある系内において物質の非平衡状態を解消するため、平衡状態に近づくための物質移動現象である。この移動現象を分けると、拡散物質の分子運動及び媒体である流体の渦動のような不規則運動と流体の規則的な流動によるものがあげられる。前者が拡散、後者は分散といわれているが、本文では両者を区別せず拡散とよぶことにする。

沿岸帯水層で見られる比較的高い濃度で侵入する塩水の場合、塩分濃度、流体密度及び流速が相互に連成し、濃度は地下水の流動に影響を与えると同時に、地下水の流動は濃度に影響を与え、いわゆる連鎖関係を有する。このため塩水侵入は、単一地下水流のように水頭分布だけでは流れ方向が予測できない非均質流体の挙動を呈する。

(a) 運動方程式

地下水がDarcy則に従うと仮定するならば、流体の実速度 V は次式で与えられる。

$$V = - \frac{k}{\alpha \mu} (\nabla p + \rho g \nabla z) \quad \dots (1)$$

(1)式中、 k : 真の透水係数、 α : 空隙率、 μ : 粘性係数、 p : 圧力、 ρ : 密度、 g : 重力加速度、 z : 基準面からの任意点までの高さ。

(b) 質量保存式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad \dots (2)$$

(2)式において、圧力伝播に比して密度の経時変化は非常に小さいものと考えられるので、左辺第1項は無視でき、次の(3)式が成立する。

$$\nabla \cdot (\rho V) = \rho \nabla \cdot V + V \cdot \nabla \rho = 0 \quad \dots (3)$$

一方拡散物質である塩分に関しては、Fickの第1則を用いて(4)式で表示する。

$$\rho_s V_s = \rho_s V - \theta \cdot \nabla \rho_s \quad \dots (4)$$

上式中、 ρ_s : 塩分密度、 V_s : 塩分流速、 θ : 拡散係数。

(c) 拡散方程式

(4)式を拡散物質に関する質量保存式(5)に代入すると、拡散方程式が得られる。

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s V_s) = 0 \quad \dots (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + p_s \nabla \cdot V + V \cdot \nabla p_s - \nabla \cdot (\mathcal{D} \cdot \nabla p_s) = 0 \quad \dots (6)$$

(d) 状態方程式

$$p = p_0 + \alpha(C - C_0) \quad \dots (7)$$

ここで、 p_0 : 淡水密度、 α : 定数、 C : 濃度、 C_0 : 基準濃度。

以上の (1) から (7) 式までを用いて、地下帯水層内の塩水拡散を解析する。

3 塩水拡散の数値モデル

数値モデルは、常に境界条件及び初期条件が与えられた場の方程式を解くことにより求められる。場の方程式は、本文においては流動方程式及び物質移動方程式である。前述の如く、塩水拡散は流速と濃度が連成しなければならぬ非線形問題であるため、解析においては、数値モデルも流動モデルと物質移動モデルに区別し、流動モデルから求めた流速を用いて、移動モデルで物質移動方程式を解く手法をとった。

拡散方程式 (6) は変分原理が存在しないので、Galerkin法による重味付残差法を使用して定式化を行い、有限要素は、四節変アイソパラメトリック要素を用いた。

3-1 流動モデルの定式化

流速を求めるため式 (1)、(3) の定式化を行う。重味付残差法は原微分方程式の解と数値解析による近似解とは、完全には一致せず何らかの残差 ε が生じ、このため与えられた領域内で重味を付けた残差が平均的に零になるように係数を決定する方法である。また Galerkin法は近似解を多項式で表わす際に用いられる補間関数と重味関数とを一致させる方法である。

式 (1) 及び (3) から

$$\mathcal{L}_1(V, p) = p \nabla \cdot V + V \cdot \nabla p = 0, \quad \mathcal{L}_2(u, p) = u - \frac{k}{\mu \lambda} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \mathcal{L}_3(V, p) = V - \frac{k}{\mu \lambda} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + p g \right) \quad \dots (8)$$

次に求めるべき水理量を多項式で近似する。

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) u_i, \quad \bar{v} = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) v_i, \quad \bar{p} = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) p_i, \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad \dots (9)$$

(9) 式中、 u : 水平方向流速、 v : 鉛直方向流速、 N_i : 近似形状関数。

(9) 式を (8) 式に代入して残差 ε を求め、重味関数 N_i と直交化させる。

$$\langle \varepsilon_1, N_i \rangle = \int N_i (\mathcal{L}_1 - p \nabla \cdot V - V \cdot \nabla p) dR = 0$$

$$\langle \varepsilon_2, N_i \rangle = \int N_i \left(\mathcal{L}_2 - \bar{u} - \frac{k}{\mu \lambda} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) dR = 0 \quad \dots (10)$$

$$\langle \varepsilon_3, N_i \rangle = \int N_i \left(\mathcal{L}_3 - \bar{V} - \frac{k}{\mu \lambda} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + p g \right) \right) dR = 0$$

この操作を解析全領域について行う。定式化により得られる結果をマトリックス表示すると次式になる。

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad \dots (11)$$

ただし、 $[A]$, $\{X\}$, $\{F\}$ は、

$$[A_{ij}] = \iint \begin{bmatrix} N_i \sum_{k=1}^4 (p_k N_k \frac{\partial N_j}{\partial x} + p_k \frac{\partial N_k}{\partial x} N_j) & N_i \sum_{k=1}^4 (p_k N_k \frac{\partial N_j}{\partial y} + p_k \frac{\partial N_k}{\partial y} N_j) & 0 \\ N_i N_j & 0 & N_i \frac{k}{\mu} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ 0 & N_i N_j & N_i \frac{k}{\mu} \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{bmatrix} dx dy,$$

$$\{X_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ p_i \end{Bmatrix}, \quad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \iint N_i \frac{k g}{\mu} \sum_{k=1}^4 p_k N_k dx dy \end{Bmatrix}$$

と与えられる。

3-2 物質移動モデルの定式化

流動モデルと同様に重味付残差法で定式化を行う。

$$\bar{C} = \sum_{i,j} N_i(x,y) C_{ij} \quad \dots (12)$$

(14)式及び(16)式を用いて、領域全体を考えると、移動方程式は次の式になる。

$$\{B\}\{C\} + \{D\}\{dC/dt\} = \{F\} \quad \dots (13)$$

ここで、 $\{B\}$, $\{D\}$, $\{F\}$ の要素は、それぞれ以下で与えられる。

$$\{B_{i,j}\} = \iint \left\{ \sum_{k,l} \left(u_{lx} \frac{\partial N_l}{\partial x} + v_{ly} \frac{\partial N_l}{\partial y} \right) N_j \cdot N_i + (u_{lx} N_l \frac{\partial N_j}{\partial x} + v_{ly} N_l \frac{\partial N_j}{\partial y}) N_i + (u_{lx} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x}) + (v_{ly} \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y}) \right\} dx dy$$

$$\{D_{i,j}\} = N_j \cdot N_i, \quad \{F_i\} = \int V_m \cdot n \cdot N_i ds$$

(13)式の第二項には時間に関する一階微分が含まれているため、任意時刻における濃度を決定する場合には、微小時間において定常状態が成り立つと仮定して、順次計算を行わなければならない。

計算手法は、計算機容量の軽減を図り煩雑を避けるため一般に次の差分法を用いる。

$$\{B\}(\varepsilon\{C\}_{t+\Delta t} + (1-\varepsilon)\{C\}_t) + (1/\Delta t)\{D\}(\{C\}_{t+\Delta t} - \{C\}_t) = \varepsilon\{F\}_{t+\Delta t} + (1-\varepsilon)\{F\}_t \quad \dots (14)$$

上式中、 ε は重味で、 $0 \leq \varepsilon \leq 1$ である。本解析では計算を簡便に行うため、 $\varepsilon = 0$ の陽型式差分法を用いた。

計算過程は、領域全体に初期条件として、任意の濃度を仮定し、これに基づき(11)式により流速を決定する。算出された流速を(14)式に既知値として与え、濃度を求める。この濃度で再び流速を計算し許容値以内に収束するまで反復する。濃度が収束後、時刻 Δt に従い新しい濃度を求めることになる。

この計算過程には、不都合な点が含まれている。(11)式のマトリックス $[A]$ の対角項に零要素が存在し、かつマトリックス自体が非対称のため、このままではいかなる手法を用いても計算が出来ない。このため零対角項を除き、列も大幅に再配置しなければならない。

4 解析結果及び考察

図-1は右側水域が塩水、左側水域が淡水とした場合、帯水層内に塩水が侵入し、その後定常状態に達した際の塩分濃度分布を等濃度曲線で示している。この解析に用いた帯水層の物理的性質は砂粒子粒径 $d = 1.0 \text{ mm}$ 、透水係数 $K = 0.29 \text{ cm/sec}$ 、水平方向拡散係数 $Dx = 0.2 \text{ cm}^2/\text{sec}$ 、鉛直方向拡散係数 $Dy = 0.02 \text{ cm}^2/\text{sec}$ である。また淡水密度 $\rho_f = 1.000$ 、塩水密度 $\rho_s = 1.0245$ 、粘性係数は 15°C における淡水の値 $\mu = 1.163 \text{ g sec/cm}^2$ を使用した。

図中には、塩・淡水面が拡散の有無によりいかに異なるかを比較するため、淡・塩水を非混合同時流として解析した場合の内部境界面を併せて掲げている。この両者の比較から、非混合流体として仮定した場合には、塩水は、帯水層を貫通する形が得られ、楔の先端は淡水域まで達している。現在、沿岸地域で揚水する場合、この非混合同時流解析にて、塩水が混入しない最大可能揚水量及び揚水井の位置を予測しているが、拡散を考慮した解析

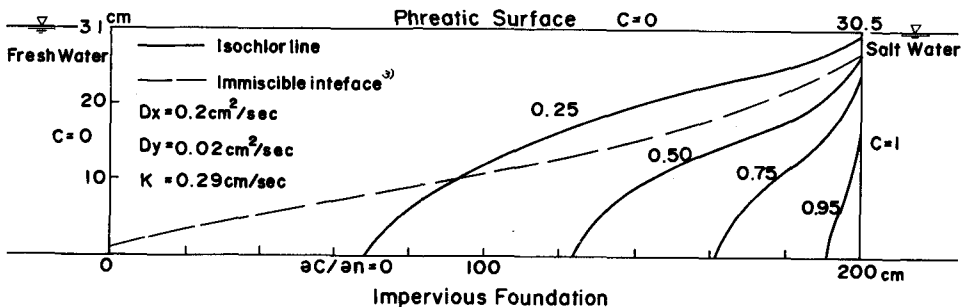


図-1 帯水層内定常塩分濃度分布

すは、汽水域が内部境界面より上方にも存在しており、特に帯水層右半分領域では、淡水の揚水は不可能と思われる。各等濃度線の形状は、ほぼ放物線形を呈しており、等濃度線の先端部は、底部を不浸透と仮定しているため勾配が漸次急となっている。等濃度線間隔は、帯水層底部で最大となり、侵入面近傍の上方部分で狭くなる。このため、濃度勾配は他の部分に比較して急となり、多量の塩分を輸送する。また拡散物質は等濃度線と直交する方向に移動する。この結果塩水は帯水層下方から上方へ移動し循環流が生ずる。この循環流のため、帯水層に侵入した塩水は、拡散帯で希釈された後塩水域に排出され水平方向に輸送される塩分は少なくなる。

次に拡散係数 D について検討を行う。拡散現象を解析する際に指針となるパラメータはPéclet数である。Péclet数は移流項と拡散係数との比、 $Pe = Vd/Dd$ で表される。空隙物質内の拡散に関しては、既往の研究結果²⁾から、 $Pe \leq 0.2$ の領域では、分子拡散、 $0.2 < Pe \leq 5$ では分子拡散と分散、 $5 < Pe < 200$ では分散が卓越し、 $Pe > 200$ では分散作用のみと分類される。

本解析結果では、実流速は $V = 0.5 \text{ mm/sec}$ 程度であり非常に緩慢な流れである。分子拡散係数 $Dd = 1.5 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{sec}$ の値を用いると、 $Pe \approx 200$ であり、この場合は上記の分類から、拡散は分散が卓越した状態となる。分散作用による拡散の水平及び鉛直方向拡散係数を予測すると、

$$Pe = 200 \text{ とし } D_x = 200Dd = 0.003, \quad D_y = 0.00015 \text{ cm}^2/\text{sec}$$

が得られる。この結果、解析に使用した $D_x = 0.2$ 、 $D_y = 0.02 \text{ cm}^2/\text{sec}$ であるので図-1の塩水侵入は過大に算定されたことになる。

図-2は、定常状態塩水拡散の解析条件と同じ値を用いて、淡水のみに占められた帯水層に塩水が侵入する過程を0.5等濃度線により表わしたものである。

0.5濃度線は、侵入初期の状態($t = 10 \text{ min}$)では、先端部が帯水層中間部まで直立しており、塩分移動は水平方向に卓越する。時間の経過とともに、漸次直立部分が短くなり、実流速が最大である底部に沿って分散作用の伝達力により淡水領域に侵入し、定常状態の分布に漸近する。先端部の侵入速度が次第に遅くなるのは、拡散により塩水密度が減少して水頭が低くなるため、実流速が小さくなる結果と考えられる。

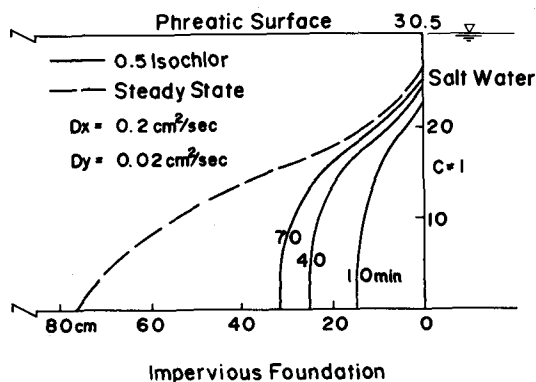


図-2 非定常状態における0.5濃度線の変化

定常及び非定常の解析結果、いずれの状態においても塩水の循環流が予測され、このため水平方向への塩水輸送が弱められ、塩水侵入は非混合流として解析した場合より短かく狭い範囲になる。

以上重味付残差法を使用して、非常に単純な形状を有する帯水層における塩水侵入について、等濃度線を得ることに主眼を置いて解析を行って、非均質流体の拡散現象を数値シミュレーションすることが可能であることが分り、また同時に拡散機構の基本的特性を捉えることができた。しかしながら塩水域における境界条件の与え方、拡散係数の推定に問題が残し、併せて計算機の大容量使用等のコスト面からの検討が必要となろう。

本研究は室蘭工業大学河海工学研究室にまねかれたもので、御助言を頂いた近藤敏郎教授に感謝の意を表し、また研究の一部には当時大学院生であった寺島俊夫君の助力を得たことを記し感謝いたします。

本研究の数値解析計算には北海道大学大型計算機センターのFACOM 230-75を使用したことを付記する。

参考文献

- 1) 尾島 勝：揚水による塩水化現象の変化に関する解析，第24回海岸工学講演会論文集，1977
- 2) Raudkivi, A.T. and R.A. Callander: Analysis of Groundwater Flow, Edward Arnold, 1976
- 3) 藤間 聡：有限要素法による堤体内自由水面形状解析，土木学会北海道支部論文報告集 32号，1976