土木学会北海道支部　論文報告集　昭和53年度

II－9　種々の確率分布形による確率水文量推定の信頼度の検討

北海道大学　工学部　学生員　○ 堀川　明広
同　　上　正員　星　清

1. はじめに　水工計画の基礎資料となる水文諸量の確率統計解析においては、観測値の理論確率分布形へのあてはめが必要となる場合が多い。
そして、我々が現実にまず直面する問題は理論確率分布選択の決定である。　一般に我々がもつ小標本観測値では、統計的適合度検定だけでは理論分布形選択の優劣をつけがたいのが実状である。　本報告においても、水文量解析のための分布形を固定化しようとするものではなく、むしろ、確率分布形採用および分布形を規定するパラメータの推定法の選択決定に際して、実用上どのような問題が生ずるかを明らかにしようとするものである。

我々が採用している確率分布形は数多くあるが、そのうちでも最も広範囲に用いられている非対称確率分布形はガンマ分布と対数正規分布である。　また、確率分布形は分布形を規定するパラメータの数によって異なるが、広く用いられているものは 2変数分布と 3変数分布である。　本報告では、 2変数分布として、Gamma (GM) 、Log Gamma (LG) 、2－parameter Log Normal (2LN) 、 3変数分布として、Pearson Type 3 (P3) 、 Log Pearson Type 3 (LP3) 、 3－parameter Log Normal (3LN)分布を採用する。　6個の確率分布形とその分布特性値を表－1に示す。

確率分布形が決定されると、次に問題となるのが分布パラメータの推定法である。　周知のように、パラメータ推定法には、積率法 (M.M.) と最尤解法 (M.L.)がある。　本報告でも、 2つの推定法を採用し、解法の実際上の問題点について述べる。

T－年確率水文量の算定は治水計画における設計荷重ともいえる。T－年確率水文量は統計的推定である以上、推定値の信頼度を知っておくことは重要である。　具体的には、再現期間を T 年として、確率水文量を $E(x_T)$ 、その推定の分散を $Var(x_T)$ とすれば、 T－年確率水文量は近似的に平均値$E(x_T)$ 、分散 $Var(x_T)$ の正規分布に従がう。　この時、 $Var(x_T)$ は標本数 N、確率分布形、パラメータ推定法、および推定パラメータの分散・共分散に依存する。　本報告では、 T－年確率水文量推定とその信頼度を比較検討する。

2. 基礎事項　以後の理論展開においての説明の重複をさけるため、ここに基本式を述べる。

2. 1 標本統計量の分散・共分散[2)]　積率法によって分布パラメータの推定を行なう場合、推定パラメータの分散・共分散を求めるには、標本統計量の分散・共分散を知る必要がある。
今、標本数を Nとして、標本平均値、標準偏差、歪度をそれぞれ、μ 、σ 、g とすれば、これらの統計量の分散・共分散は次式で与えられる。

$$Var(\mu) = \mu_2/N, \quad Var(\sigma) = \mu_2(C_4-1)/4N,$$
$$Var(g)=[C_6-3C_3C_5+(2.25C_3^2-6)C_4+8.75C_3^2+9]/N, \quad Cov(\mu,\sigma) = \mu_2C_3/2N,$$
$$Cov(\mu,g) = \mu_2^{1/2}[C_4-3(C_3^2/2+1)]/N,$$
$$Cov(\sigma,g)= \mu_2^{1/2}[2C_5-C_3(3C_4+5)]/4N \quad \ldots\ldots(1)$$

ここで、μ_r は母平均のまわりのr次の母集団積率。　$C_3 = \mu_3/\mu_2^{3/2}$ ，$C_4 = \mu_4/\mu_2^2$ ，$C_5 = \mu_5/\mu_2^{5/2}$ ，$C_6 = \mu_6/\mu_2^3$

4次から6次までの積率は推定パラメータから、各々の確率分布形につき、演えき的に求める。

2. 2 パラメータを含む関数の分散・共分散[6)]

分布パラメータないしは標本統計量をa_1、a_2 、a_3としよう。　次に、これらのパラメータを含む 2つの関数をそれぞれ、　$g(a_1,a_2,a_3)$，$h(a_1,a_2,a_3)$と定義する。　この時、関数 gの分散および 2つの関数の共分散は次式で与えられる。

$$Var(g)= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial a_i}\frac{\partial g}{\partial a_j}Cov(a_i,a_j) \quad \ldots(2)$$

$$Cov(g,h) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial a_i}\frac{\partial h}{\partial a_j}Cov(a_i,a_j) \quad \ldots(3)$$

ここで、一次微係数は推定値にて求める。
その一例として、 P3 分布の 積率法によるパラメータ a の分散を求める。$a = \sigma_x g_x/2$ で推定されるから、分散 $Var(a)$ は (2)式により次式で与えられる。

$$Var(a) = (\partial a/\partial\sigma_x)^2Var(\sigma_x)+(\partial a/\partial g_x)^2Var(g_x) + 2(\partial a/\partial\sigma_x)(\partial a/\partial g_x)\cdot Cov(\sigma_x,g_x) \quad \ldots(4)$$

ここで、$\partial a/\partial\sigma_x= g_x/2$, $\partial a/\partial g_x=\sigma_x/2$ である。 したがって、(4)式に (1)式の標本統計量の分散・共分散を代入すれば $Var(a)$ を求めることができる。

Table 1 Adopted probability density function and theoretical moments

Distribution	*Density Function (p.d.f)*	*Moments*
Gamma (GM)	$f(x) = x^{b-1}\exp(-x/a)\,[a^b\Gamma(b)]^{-1}$	$\mu_x = ab,\ \sigma_x^2 = a^2b,\ g_x = 2/b^{1/2}$
Log Gamma (LG)	$f(x) = (\ln x)^{b-1}\exp(-\ln x/a)\,[a^b\Gamma(b)x]^{-1}$	$\mu'_{xr} = (1-ra)^{-b}\ (r=1,2,3,\ldots\ldots)$ $y = \ln x;\ \mu_y = ab,\ \sigma_y^2 = a^2b,\ g_y = 2/b^{1/2}$
2 Parameter Log Normal (2LN)	$f(x) = \exp[-(\ln x-\mu_y)/2\sigma_y^2]\,[\sqrt{2\pi}\sigma_y x]^{-1}$	$\mu_x = \varepsilon\phi^{1/2},\ \sigma_x^2 = \varepsilon^2\phi(\phi-1),$ $g_x = (\phi-1)^{1/2}(\phi+2)$ $\{\varepsilon = \exp(\mu_y),\ \phi = \exp(\sigma_y^2)\}$
Pearson Type 3 (P3)	$f(x) = [(x-c)/a]^{b-1}\exp[-(x-c)/a]\,[\lvert a\rvert\Gamma(b)]^{-1}$	$\mu_x = ab + c,\ \sigma_x^2 = a^2b,$ $g_x = 2a/(\lvert a\rvert b^{1/2})$
Log Pearson Type 3 (LP3)	$f(x) = [(\ln x-c)/a]^{b-1}\exp[-(\ln x-c)/a]\,[\lvert a\rvert\Gamma(b)x]^{-1}$	$\mu'_{xr} = \exp(rc)(1-ra)^{-b}\ (r=1,2,3,\ldots)$ $y = \ln x;\ \mu_y = ab + c,\ \sigma_y^2 = a^2b$ $g_y = 2a/(\lvert a\rvert b^{1/2})$
3 Parameter Log Normal (3LN)	$f(x) = \exp[-(\ln(x-a)-\mu_y)/2\sigma_y^2]\,[\sqrt{2\pi}\sigma_y(x-a)]^{-1}$	$\mu_x = a + \varepsilon\phi^{1/2},\ \sigma_x^2 = \varepsilon^2\phi(\phi-1),$ $g_x = (\phi-1)^{1/2}(\phi+2)$ $\varepsilon = \exp(\mu_y),\ \phi = \exp(\sigma_y^2)$

μ ; mean σ ; standard deviation g ; coefficient of skewness

μ'_{xr}; r-th moments about the origin

同様にして、パラメータ a、b、cの分散・共分散は標本統計量 μ_x、σ_x 、g_x の分散・共分散を変換して求める。他の確率分布形の積率解法によるパラメータ推定値の分散・共分散についても同様である。[5,7,8]

2．3 最尤法によるパラメータ推定

確率変数 X が 3変数確率密度関数 $f(x;\ a_1,a_2,a_3)$ に従うと仮定しよう。 x_i を標本値として、対数尤度関数 L を定義すれば、 Lは次式で与えられる。

$$L=\sum \ln f(x_i;\ a_1,a_2,a_3) \quad \ldots\ldots\ldots(5)$$

(5)式において L を最大にするパラメータa_1、a_2、a_3 が最尤推定値となる。 したがって、最尤法は次式を同時に満足するパラメータ a_1、a_2、a_3 を求めることに帰着する。

$$\partial L/\partial a_1=0,\quad \partial L/\partial a_2=0,\quad \partial L/\partial a_3=0 \quad \ldots\ldots(6)$$

(6)式は非線型連立方程式であり、通常Newton－Raphson法の数値解法が利用される。

最尤推定値の分散・共分散行列 V は次式で与えられる。

$$V = R^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

ここで、 R は情報行列で R^{-1} は逆行列である。R の各要素は次式で算定される。

$$r_{ij} = -E[\partial^2 L/\partial a_i \partial a_j] \quad \ldots\ldots(8)$$

表－1 に示すすべての密度関数について最尤解法式を述べることは、紙面の都合上できないので 3変数分布の P3分布の結果だけを示す。 まず、 P3分布の対数尤度関数 L を示すと、

$$L = -Nb\ln\lvert a\rvert - N\ln\Gamma(b) + (b-1)\sum \ln(x_i-c) - \sum(x_i-c)/a$$

したがって、 L のパラメータ a、b、c に関する一次と二次の導関数は次式で与えられる。

$$\partial L/\partial a = -Nb/a+\sum(x_i-c)/a^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(9)$$

$$\partial L/\partial b = -N\ln a - N\Psi(b)+\sum \ln(x_i-c) = 0 \quad \ldots(10)$$

$$\partial L/\partial c = -(b-1)\sum(x_i-c)^{-1}+N/a = 0 \quad \ldots\ldots(11)$$

$$\partial^2 L/\partial a^2 = Nb/a^2-2\sum(x_i-c)/a^3$$

$$\partial^2 L/\partial b^2 = -N\Psi'(b)$$

$$\partial^2 L/\partial c^2 = -(b-1)\sum(x_i-c)^{-2}$$

$$\partial^2 L/\partial a\partial b = -N/a$$

$$\partial^2 L/\partial b\partial c = -\sum(x_i-c)^{-1}$$

$$\partial^2 L/\partial a\partial c = -N/a^2$$

ここで、summationは標本数 N について行なう。また、$\Psi(b)$ 、$\Psi'(b)$ は、それぞれ、パラメータ b に関する digamma、 trigamma 関数である。

(8)式から情報行列の各要素は二次導関数の期待値に負号をつけたもので表わされるから、

$$R = N^3\cdot\begin{pmatrix} b/a^2 & 1/a & 1/a \\ & \Psi'(b) & 1/a(b-1) \\ \text{Symme.} & & 1/a^2(b-2) \end{pmatrix} \quad \ldots(12)$$

したがって、最尤推定値 a、b、c の分散・共分散は情報行列の逆行列から、次式で与えられる。

$$\mathrm{Var}(a) = a^2[(b-1)^2\Psi'(b)-(b-2)]/ND \quad ..(13)$$

$$Var(b) = 2(b-1)^2/ND \quad ..(14)$$
$$Var(c) = a^2(b-1)^2(b-2)[b\Psi'(b)-1]/ND \quad ..(15)$$
$$Cov(a,b) = -a(b-1)/ND \quad ..(16)$$
$$Cov(b,c) = -a(b-1)(b-2)/ND \quad ..(17)$$
$$Cov(a,c) = -a^2(b-1)(b-2)[(b-1)\Psi'(b)-1]/ND \quad ...(18)$$

ここで、

$$D = 2(b-1)^2\Psi'(b)-2(b-1)+1$$

他の密度関数についても P3 分布と同様な最尤解法式が誘導される。

2．4 Newton－Raphson 法

最尤法では、(6)式の非線型連立方程式を解かねばならない。その解法として Newton－Raphson 法がしばしば用いられる。P3 分布を例としてその解法を簡単に述べる。今、a_k、b_k、c_k を収束計算上の k step の推定値としよう。(9)～(11)式をこれらの最新推定値のまわりでTaylor 展開し、二次の導関数を(12)式の情報行列でおき換えると次のパラメータ補正線型方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix}\Delta a_k\\ \Delta b_k\\ \Delta c_k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Var(a) & Cov(a,b) & Cov(a,c)\\ & Var(b) & Cov(b,c)\\ Symme. & & Var(c)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_a\\ L_b\\ L_c\end{bmatrix} \quad ......(19)$$

$$\begin{bmatrix}a_{k+1}\\ b_{k+1}\\ c_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_k\\ b_k\\ c_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta a_k\\ \Delta b_k\\ \Delta c_k\end{bmatrix} \quad ......(20)$$

ここで、L_a、L_b、L_c は推定値 a_k、b_k、c_k にて求めた(9)～(11)式の値である。また、(19)式右辺の分散・共分散も最新推定値にて求める。(20)式は収束計算のための update推定式である。本報告では、Newton－Raphson法の収束精度を、Δa_k、Δb_k、Δc_k ともに 10^{-5} とした。

3．T－年確率水文量の推定とその分散

T－年確率水文量を推定するには、各密度関数の分布関数をまず求める必要がある。対数正規分布についてはその算定は容易であるので、とくにここでは P3 分布について詳述する。x の分布関数を F(x) とし、非超過確率を p とすれば、F(x) は次式で求められる。

$$p = F(x) = \begin{cases}\gamma(b,w)/\Gamma(b) & (歪度 > 0)\\ 1-\gamma(b,w)/\Gamma(b) & (歪度 < 0)\end{cases} \quad ..(21)$$

ここで

$$\gamma(b,w) = \int_0^w \exp(-t)t^{b-1}dt \quad ......(22)$$

（第一種不完全ガンマ関数）

$$w = (y-c)/a \quad ......(23)$$

(23)式の変数 y と パラメータ c は確率分布形により異なり、次の型に分類される。

(1) GM; y=x , c=0　(2) LG; $y=\ln x$, c=0
(3) P3; y=x　(4) LP3; $y=\ln x$

今、再現期間を T として、T－年確率水文量を $E(x_T)$ とすれば、P3 分布による T－年確率水文量は次式で算定される。

$$E(x_T) = aw_T + c \quad ......(24)$$

ここで、w_T は a が正の時、非超過確率レベル 1 － 1/T に対応する(22)式の標準ガンマ変量 w、aが負の時、超過確率レベル 1/T に対応する(22)式の標準ガンマ変量 wである。この標準ガンマ変量 w_T は確率レベル p が固定されれば、パラメータ bだけの関数となるから、便宜上、次式で表わす。

$$w_T = f(p,b) \quad ....(25)$$

次に、T－年確率水文量の分散 $Var(x_T)$ を P3 分布について求める。(24)式に(2)式を適用すれば、$Var(x_T)$ は次式で求められる。

$$Var(x_T) = (\partial x_T/\partial a)^2 Var(a)+(\partial x_T/\partial b)^2 Var(b) +(\partial x_T/\partial c)^2 Var(c)+2(\partial x_T/\partial a)(\partial x_T/\partial b)Cov(a,b)+2(\partial x_T/\partial b)(\partial x_T/\partial c)Cov(b,c)+2(\partial x_T/\partial a)(\partial x_T/\partial c)Cov(a,c) \quad .....(26)$$

ここで、

$$\partial x_T/\partial a = w_T,\quad \partial x_T/\partial b = a\partial w_T/\partial b \quad ...(27)$$
$$\partial x_T/\partial c = 1,\quad \partial w_T/\partial b = f'(p,b)$$

(27)式の一次微係数 f'(p,b) は w_Tを b の多項式で近似したのち、推定値 b にて求めた。

対数正規分布による T－年確率水文量は次の型に分類される。

(5) 2LN; $E(x_T) = \exp(\mu_y+\sigma_y t)$
(6) 3LN; $E(x_T) = \exp(\mu_y+\sigma_y t)+a$

ここで、t は非超過確率 1-1/T に対応する標準正規変量である。2LN と 3LN分布による T－年確率水文量の分散も P3 分布と同様に上式に示した x_T に(2)式を適用すれば求められる。

4. 適用例と考察 以上述べた 6個の確率分布形と 2個のパラメータ推定法を実測資料を用いて比較検討する。 表－2に採用観測地点、観測値の種類、および標本数を示す。 表中の○印は 6個の確率分布形についてパラメータ推定値が得られたもの、×印は得られなかったものを表わす。 一見して、最尤法 (M.L.) のうち、とくに 3変数分布の非線型方程式解法である Newton－Raphson 法が作動しなかったことがわかる。 最尤推定値を得るためには、 Newton－Raphson法以外の非線型数値解析を試みる必要があろうが、 3 変数分布の最尤解法は実際の適用上、多くの問題をかかえている。 表－2に示すすべての観測地点について計算結果を述べることは紙面の関係上不可能であるので、すべての密度関数で推定値が得られた高山地点の年最大時間降雨量について、その結果の考察を進める。 表－3に分布パラメータ推定値を用いて表－1に示す理論積率を計算した結果を示す。 μ_x は平均値 (mm/hr)、σ_x は標準偏差 (mm/hr)、g_x は歪度である。 また、表中の MSE は平均自乗誤差 (mm/hr) で次式で算定される。 $MSE = \sum (x_i^o - x_i^t)^2 / N$ ...(28) ここで、 x_i^o は順序標本値で、x_i^t は経験的分布関数として Weibull Plotを採用した時の各々の密度関数の理論変量である。 2 変数分布 (GM, LG, 2LN) の積率法では歪度を保存する保証がないにもかかわらず、比較的観測値の歪度に近い。 3 変数分布 (P3, LP3, 3LN) の積率法では歪度の bias correction を行なったのち、分布パラメータを推定した。[4] また、積率法では、歪度の推定に関し、とくに異常標本値に注意する必要がある。 LG分布と LP3分布の積率解が原系列の積率を保存していないのは、対数変換標本値に積率法を適用したためである。 この近似解法は U. S. Water Resources Council[1] が推奨している方法であるが、σ_x と g_x は少し大きな理論値を与える。 LP3 分布にて原系列の 3次までの積率を保存しようとすれば、表－1 の μ'_{xr} に標本特性値を代入して非線型連立方程式を解き[3]、パラメータ a、b、cを推定する。 しかしながら、この方法では推定パラメータの分散・共分散を理論的に算定することは困難である。 観測値への分布あてはめの適合度を測る尺度としての MSE を比較すると、積率法(M.M.) が最尤法 (M.L.) より幾分小さな値をとる。 表－4に 2 変数分布 (GM, LG, 2LN) の推定パラメータとその分散・共分散を示す。 この表から、確率密度関数が同一であれば、積率法 (M.M.) と最尤法 (M.L.) によるパラメータ推定値とその分散・共分散はほぼ同一であることがわかる。 表－5には 3 変数分布 (P3, LP3, 3LN) の推定パラメータと分散・共分散が示される。 表－4の 2変数分布と異なり、 3変数分布では積率法と最尤法で推定値、および分散・共分散が著しく異なる。 P3分布の実用上の問題をあげれば、パラメータ b が2 以下 (歪度が約 1. 42 以上) では、最尤解法で用いられたNewton－Raphsonが収束しない。 したがって、実際の水文量解析では、しばしば歪度が 1～2程度となるから、 P3分布の Newton－Raphson 法の適用は困難となる。 もし最尤推定パラメータ bが 2 以下となれば、位置パラメータ c の分散 ((15)式に示される) が負となり統計的意味を失なう。 次に、 P3分布と 3LN分布の積率解法上の問題点をあげれば、変動係数と歪度が大なるにつれて位置パラメータ (P3 分布では c, 3LN 分布では a) が負となる場合がある。 その例がみられるのは、札幌、高山、橋本、 Skykomish、Weldon 地点である。 位置定数が負となると、分布あてはめの際分布下端領域が座標軸の負領域におちることになる。 水文量は物理量として負値をとり得ないから、負値を零の水文量におきかえなければならない。 位置パラメータが負となれば、 T－年確率水文量算定上大きな問題を生ずることを以下に指摘する。 LP3 分布の問題点をあげれば、対数変換系列の歪度が正の場合には、パラメータ a も正となり、

Table 2 Selected stations and applicability of parameter estimators

Site	Data	Sample size(N)		GM	LG	2LN	P3	LP3	3LN
Sapporo	max. daily rainfall	78	M.L. M.M.	O O	O O	O O	X O	O O	O O
Asahikawa	max. daily rainfall	80	M.L. M.M.	O O	O O	O O	X O	O O	O O
Toya	max. daily rainfall	45	M.L. M.M.	O O	O O	O O	X O	X O	O O
Takayama	max. hourly rainfall	62	M.L. M.M.	O O	O O	O O	O O	O O	O O
Hashimoto	max. daily discharge	24	M.L. M.M.	O O	O O	O O	X O	X O	X O
Skykomish	max. hourly discharge	60	M.L. M.M.	O O	O O	O O	X O	X O	O O
Weldon	annual flow	31	M.L. M.M.	O O	O O	O O	X O	O O	O O

x の存在領域は $\exp(c) \leq x < \infty$ で下限定数は常に正となるが、歪度が負の時は a が負となり、x の存在領域は $0 \leq x \leq \exp(c)$ で上限定数をもつ。実際の解析では、対数変換標本値は負の歪度を持つ場合が多く、したがって、上述した性質により分布の上限値を超える水文量が起り得ないという物理的不都合が生ずる。この例として、橋本と Weldon 地点の対数変換標本値は負の歪度をもつ。最尤法 (M.L.) によるパラメータ推定法が積率法 (M.M.) に比べてより efficient であることを示すためには percent standard error (たとえば、$\sqrt{Var(a)}/a$) を計算すればよい。

表－6には、再現期間を 10 年，50 年，100 年，200 年，500 年として、T－年確率水文量 $E(x_T)$ (mm/hr) と推定値の percent standard error $St(x_T)$ ($\sqrt{Var(x_T)}/E(x_T)$) を示す。まず、2 変数分布 (GM, LG, 2LN) については、表－4に示したように、最尤法 (M.L.) と積率法 (M.M.) によるパラメータ推定値、およびその分散 共分散には大きな差がみられなかった。このため、T－年確率水文量とその推定誤差には顕著な差はみられない。しかしながら、M.M法は M. L法に比して推定値が大きく、しかも推定誤差が大である。この特性は他の地点水文量解析についてもあてはまる。GM分布と 2LN分布で比較すると、2LN分布がより大きな確率水文量を与えるのは、表－3に示したように、2LN 分布の理論歪度が大であることによる。LG分布が他の 2変数分布より過大な確率水文量と大きな推定誤差をもつ理由は、対数標本値に積率法を適用したため、原系列の標本特性値を保存しないことによる。次に、3変数分布 (P3, LP3, 3LN) による T－年確率水文量とその推定誤差について考察する。P3分布で M. M法が M. L法より小なる確率水文量が推定された理由は 2つ考えられる。第一の理由は、表－5に示したように、位置パラメータ cがM. Mでは 3.91 (mm/hr) M. Lでは 14.14 (mm/hr) で M. M法が小なるためである。ちなみに、位置パラメータが 0 のGM分布と比較すると、正の位置パラメータをもつ P3分布の方が大きな確率水文量を与えていることからも推論される。第二の理由は、表－3に示したように、M. Lの理論歪度が M. Mのそれよりも大であることによる。P3分布による推定誤差では、M. M法の方がより大である。LP3分布において、M.M法が M.L 法より小なる推定値を与えるのは、表－5からも明らかなように、M. M法では分布下限値が、$\exp(-0.18) = 0.835$、M. L法では $\exp(1.9) = 6.69$ となることによる。ちなみに、LG分布の下限定数

Table 3 Theoretical first three moments and mean square error

Distribution		μ_x	σ_x	g_x	$\sqrt{MSE}$
Origi. Data		29.248	9.281	0.670	/
GM	M.L.	29.248	8.974	0.614	1.480
	M.M.	29.248	9.281	0.635	1.353
LG	M.L.	29.269	9.502	1.251	1.376
	M.M.	29.293	9.609	1.266	1.352
2LN	M.L.	29.236	9.217	0.980	1.361
	M.M.	29.248	9.281	0.984	1.336
P3	M.L.	29.248	9.765	1.293	1.289
	M.M.	29.248	9.281	0.733	1.291
LP3	M.L.	29.328	10.062	1.697	1.550
	M.M.	29.287	9.591	1.250	1.348
3LN	M.L.	29.318	10.015	1.601	1.508
	M.M.	29.248	9.281	0.745	1.355

Table 4 Estimated parameters and their variance and covariance (2-parameter)

Para. and Stan. Error		*GM*	*LG*	*Para. and Stan. Error*		*2LN*
a	M.L.	2.7533	0.0284	μ_y	M.L.	3.3280
	M.M.	2.9450	0.0289		M.M.	3.3279
b	M.L.	10.6232	117.1535	σ_y	M.L.	0.3078
	M.M.	9.9315	115.0048		M.M.	0.3097
Var(a)	M.L.	0.2486	0.00003	Var(μ_y)	M.L.	0.0015
	M.M.	0.3220	0.00003		M.M.	0.0019
Var(b)	M.L.	3.5299	441.4825	Var(σ_y)	M.L.	0.0008
	M.M.	3.5022	430.3580		M.M.	0.0010
Cov(a,b)	M.L.	-0.9148	-0.1071	Cov(μ_y,σ_y)	M.L.	0.0000
	M.M.	-1.0385	-0.1083		M.M.	-0.0001

Table 5 Estimated parameters and their variance and covariance (3-parameter case)

Para. and Stan. Error		*P3*	*LP3*	*Para. and Stan. Error*		*3LN*
a	M.L.	6.3130	0.0671	μ_y	M.L.	2.9010
	M.M.	3.4002	0.0275		M.M.	3.6118
b	M.L.	2.3929	21.4403	σ_y	M.L.	0.4670
	M.M.	7.4505	127.7244		M.M.	0.2400
c	M.L.	14.1423	1.8889	a	M.L.	9.0306
	M.M.	3.9154	-0.1792		M.M.	-8.8662
Var(a)	M.L.	1.7799	0.0023	Var(μ_y)	M.L.	0.0482
	M.M.	4.7838	0.0148		M.M.	0.3848
Var(b)	M.L.	0.2840	826.8692	Var(σ_y)	M.L.	0.0115
	M.M.	75.8616	284.6533		M.M.	0.0215
Var(c)	M.L.	0.5272	0.8576	Var(a)	M.L.	11.8864
	M.M.	189.9121	1.8305		M.M.	485.4613
Cov(a,b)	M.L.	-0.6436	-1.3576	Cov(μ_y,σ_y)	M.L.	-0.0209
	M.M.	-18.7009	2.0429		M.M.	-0.0899
Cov(b,c)	M.L.	-0.2528	-26.3928	Cov(σ_y,a)	M.L.	0.3403
	M.M.	-118.6129	22.7380		M.M.	3.1993
Cov(a,c)	M.L.	0.4467	0.0426	Cov(μ_y,a)	M.L.	-0.7287
	M.M.	28.6415	0.1621		M.M.	-13.6521

は exp(0)=1 となり、このため、LP3分布の積率解による推定値とほぼ同じである。また、LP3分布のM. M法が他の3変数分布より大なる確率水文量を推定するのは、LG分布の積率法と同じ理由による。

最後に、3LN分布による結果の比較を行なう。M. L法がM. M法より大きな推定値を与えるのは、表－5に示したように、位置パラメータ aがM. Mでは負、M. Lでは正となっているためである。また、M. M法のT－年確率水文量の推定誤差が小となるのは、位置パラメータ a が負となることに起因する。すなわち、a が負であれば、推定誤差はM. L法によるそれよりも小となり、a が正であれば、M. L法によるそれよりも大となる。このことは、旭川地点のM. M解法において、位置パラメータaが正となり、他の観測地点のM. M解においては、a が負となったことから確認された。P3分布と3LN分布の積率解により推定された位置パラメータが負の場合には、上述したような種々の問題が生ずるので実際の適用にあたっては注意を要する。3LN分布のこの欠点を除去する一手段として、$y=ln(x-a)$のかわりに $y = lnx-a$ とする変数変換が考えられる。この時、分布下限値は exp(a) となり、常に正となる利点がある。LP3分布の積率法の問題点を解決するためには、原系列の3次までの積率を保存するように非線型方程式を解き分布パラメータを求める必要がある。この時、推定パラメータの分散・共分散を理論的に導出する必要があろう。

Table 6 T-year design event (mm/hr) and its percent standard error at Takayama

Return Period T (year)	Method		GM	LG	2LN	P3	LP3	3LN
10	M.L.	$E(x_T)$	41.2	41.6	41.4	42.3	42.0	42.1
		$St(x_T)$ (%)	4.73	5.68	5.28	5.98	6.45	6.47
	M.M.	$E(x_T)$	41.6	41.7	45.5	41.6	41.7	41.5
		$St(x_T)$ (%)	4.99	5.75	5.86	5.16	5.85	5.15
50	M.L.	$E(x_T)$	50.5	54.0	52.5	55.3	56.6	56.5
		$St(x_T)$ (%)	5.77	7.77	6.89	7.77	10.86	10.30
	M.M.	$E(x_T)$	51.3	54.4	52.7	51.7	54.3	51.8
		$St(x_T)$ (%)	6.17	7.88	7.75	7.95	9.71	8.13
100	M.L.	$E(x_T)$	54.1	59.4	57.1	60.6	63.4	63.0
		$St(x_T)$ (%)	6.15	8.62	7,53	8.41	13.07	12.05
	M.M.	$E(x_T)$	55.0	59.9	57.3	55.7	59.8	55.9
		$St(x_T)$ (%)	6.59	8.74	8.49	9.23	11.71	9.74
200	M.L.	$E(x_T)$	57.5	65.0	61.6	65.8	70.5	69.6
		$St(x_T)$ (%)	6.49	9.43	8.12	8.99	15.40	13.80
	M.M.	$E(x_T)$	58.6	65.5	61.9	59.5	65.3	59.9
		$St(x_T)$ (%)	6.98	9.58	9.18	10.49	13.82	11.39
500	M.L.	$E(x_T)$	61.8	72.4	67.6	72.5	80.5	78.8
		$St(x_T)$ (%)	6.89	10.47	8.87	9.67	18.60	16.09
	M.M.	$E(x_T)$	63.1	73.1	68.0	64.4	72.9	65.0
		$St(x_T)$ (%)	7.42	10.63	10.04	12.07	16.74	13.59

参考文献

1) Benson, M.A., Uniform flood frequency estimating methods for federal agencies, Water Resources Research, 4(5), 891-908, 1968.

2) Bobée, B., Sample error of T-year events computed by fitting a Pearson type 3 distribution, Water Resources Research, 9(5), 1264-1270, 1973.

3) Bobée, B., The log Pearson type 3 distribution and its application in hydrology, Water Resources Research, 11(5), 681-689, 1975.

4) Bobée, B. and Robitaille, R., Correction of bias in the estimation of the coefficient of skewness, Water Resour. Res., 11(6), 851-854, 1975.

5) Condie, R., The log Pearson type 3 distribution: The T-year event and its asymptotic standard error by maximum likelihood theory, Water Resour. Res., 13(6), 987-991, 1977.

6) Kendall, M.G. and Stuart, A., The advanced theory of Statistics, Vol. 2, Third Edition, Charles Griffin & Company, London, 1973.

7) Matalas, N.C. and Wallis, J.R., Eureka! It fits a Pearson type 3 distribution, Water Resources Research, 9(2), 281-289, 1973.

8) 端野 道夫，最尤法による対数正規分布の実用的定数推定法とその応用例、第20回水理講演会論文集 29 － 34，1976。